CZU: 330.45:517.9:005.584.1 **https://doi.org/10.59295/sum11(6)2025_07**

ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ МНОГОПРОДУКТОВОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Олег Петрович КОЛОМИЙЧУК,
Государственный университет Молдовы

В работе рассматривается математическая модель экономической системы, как и в [1], в матричном виде второго порядка, эта модель сводится к линейной модели второго порядка. Такая модель описывает систему многопродуктовой экономики учитывая внешние и внутренние инветиции в экономику. Для модели ставится задача оптимального наблюдателя фильтра Калмана [2]. Решение такой задачи описано в теории управления и позволяет восстановить вектор состояния модели экономической системы, если последний не полностью известен или зашумлен. Модель приводится к нетрадиционной задаче наблюдения динамической системы, так называемой неокласической. В такой постановке используется информация при старших производных.

Ключевые слова: *линейная математическая модель многопродуктовой системы, управление, фильтр Калмана, динамическая система, ветор состояния, матрица коефициентов, шум системы и измирений.*

KALMAN FILTER FOR A MULTI-PRODUCT ECONOMIC MODEL

This paper considers a mathematical model of an economic system, as in [1], in second-order matrix form. This model is reduced to a second-order linear model. This model describes a multi-product economy, taking into account external and internal economic inputs. The optimal observer problem for a Kalman filter is posed for the model [2]. The solution to this problem is described in control theory and allows one to reconstruct the state vector of an economic system if the latter is incompletely known or noisy. The model is reduced to a non-traditional problem of observing a dynamic system, a so-called neoclassical problem. In this formulation, information on higher-order derivatives is used.

Keywords: *linear mathematical model of a multi-product system, control, Kalman filter, dynamic system, state vector, coefficient matrix, system noise* and measurements.

Вступление

Целью работы является применение мощного математического аппарата теории управления, в частности теории наблюдения, к модели второго порядка экономической системы с целью восстановления вектора состосяния модели. Применяемые методы базируются на втором методе Ляпунова и развивались автором и его коллегами в Институте математики НАН Украины в последние годы. Идеи и методы применялись и развивались для построения, как управления, так и наблюдения гироскопичных систем, а также почти консервативных динамических систем.

Гироскопические и почти консервативные модели, как и экономические, описываются дифференциальными уравнениями второго рода. Такие модели сводятся к уравнениям в форме Коши, что дает возможность применить традиционные методы упраления описаные в [2] и развитые в [3]. Известным есть факт, дуальности задач управления и наблюдения, что в свою очередь дает возможнось применять наработки исследований в области управления описаных в [2] к задачам наблюдения.

Также известно, что решение экономических задач, требует построения опорных решений системы, что требует проведения дополнительных исследований при восстановлении состояния и построениии управления.

Материалы и методы

Материалами исследования есть труды автора, а также отечественных и зарубежных авторов, публикации которых сосредоточены в математическом моделировании и теории управления как для механических, так и экономических систем.

В процессе осуществления исследования были использованы следующие методы: методы теории управления и наблюдения, методы матричного анализа, методы линейного и оптимального упраления и наблюдения, второй метод функции Ляпунова.

Постановка проблемы

Математическое моделирование – активно применяется во всех сферах, это инструмент, позволяющий исследовать, прогнозировать и анализировать различные процессы. Применяя математическое моделирование в экономике удается улучшить хозяйственную деятельность разных экономических объектов. Процесс моделирования включает в себя описания объектов с помощью математических уравнений, формул и огромных массивов данных, разной, иногда не предсказуемой структуры. При этом удаётся дать наглядную оценку полученным результатам, что в свою очередь дает возможность прогнозировать поведение системы, как следствие строить управление реальными экономическими объектами. Но для построения управления необходимо полностью знать вектор состояния системы. На практике это достичь трудно, так как либо вектор состояния не измеряется в «чистом» виде, либо в измерениях присутствует так называемый шум (т.е. помехи, ошибки измерения). Использую теорию восстановления и построения наблюдателей, можно восстановить вектор состояния системы, если система восстанавливаема (наблюдаема).

Интерессным и перспективным направлением стало применение мощного математического аппарата теории управления к экономическим задачам. Строится математическая модель, описывающая какой-то реальный процесс. Далее полученную модель можно привести к так называемой форме Коши, что в свою очередь дает возможность применить разработанные и хорошо изученные методы, базирующиеся на втором методе Ляпунова.

Активно развивающиеся рыночные отношения стимулируют к эффективному применению новейших технологий и инноваций, для управления предприятиями, государственными учреждениями, а также секторами экономики.

Актуальной и перспективной есть задачи наблюдения за определенной системой, такие задачи решаются путем построения наблюдателей (фильтров). Применять методы теории управления нужно учитывая особенности экономических задач. Именно особенности модели могут облегчить или затруднить решение. Поэтому задача построения наблюдателя для системы включает в себя анализ модели (уравнений модели) описывающих реальный процесс.

Анализ последних исследований и публикаций

В работе [1] рассматривается матричная математическая модель второго порядка, которая сводится к линейной математической модели. Эта модель описывает экономическую систему многопродуктовой экономики, учитывая внешние и внутренние инвестиции в экономику. Для модели ставится задача управления. Модель приводит к нетрадиционной задаче управления динамической системой, так называемой неоклассической. В такой постановке применяется информация о матрицах при старших производных. Большой вклад в теорию оптимального линейного управления и наблюдения внесли Х. Квакернак и Р. Сиван. В работе [2] авторы описали фундаментальные основы теории управления. Х. Квакернак и Р. Сиван в своих роботах дают анализ линейных систем управления, описывают оптимальное управление систем с обратной связью, а также задачи линейного восстановления и наблюдатели (фильтры): наблюдатель полного порядка, наблюдатель Калмана и наблюдатель Луинбергера. В [3] для гироскопической системы строится фильтр Калмана. Показано как можно упростить общее решение уравнения Риккати для гироскопической и почти консервативной динамической системы и получить решения в аналитическом виде, что в свою очередь дает возможность восстановить вектор состояния гироскопической системы. О. А. Жуковская, В. В. Новицький в [4] рассматривают традиционную задачу управления экономической системой и так называемую неокласическую задачу, в которой используется информация о старшых производных. Важно, что не полностью управляемая динамическая система в класическом случае может стать управляемой в определённом смысле при наличае дополнительной информации, при старшых производных. В [5] В. В. Новицький вместе с ученым из Китая Хуан Ченем показывают, как строится оптимальное управление для почти консервативной динамической системы, также приводят алгоритмы построения такого управления для механических и гироскопических систем. В работе [6] предложена модель векторной авторегрессии (VAR) с дополнительной задачей регуляризации по типу задачи фильтра Ходрика-Прескотта для моделирования единого, т.е. сбалансированного долгосрочного темпа роста структурной компоненты основных макроэкономических показателей экономики. В [7] используется фильтр Калмана для оценивания параметров экономических систем двумя методами: максимального правдоподобия и минимизации среднеквадратической ошибки предсказания. Рассматривается объединенная система валютного и фондового рынка. Моделируются различные типы поведения участников валютного рынка. Даётся экономическая интерпретация найденных параметров системы. Автор использует дискретный подход для построения фильтра Калмана в терминах регрисионного подхода, и на каждом этапе проводит оценку состояния, чтобы двигаться дальше. Chen A. S. с коллегами в [8] в своем исследовании пытались смоделировать и предсказать направление доходности индекса Тайваньской фондовой биржи, одной из самых быстрорастущих финансовых бирж в развивающихся странах Азии. Подход основан на представлении о том, что торговые стратегии, основанные на прогнозах направления движения цен, могут быть более эффективными и приводить к более высокой прибыли. Вероятностная нейронная сеть (PNN) используется для прогнозирования направления доходности индекса после обучения на исторических данных. Прогнозы применяются к различным стратегиям торговли индексами, результаты которых сравниваются с результатами стратегии «купи и держи», а также с инвестиционными стратегиями, основанными на прогнозах, рассчитанных с помощью модели случайного блуждания и параметрического обобщенного метода моментов (GMM) с фильтром Калмана. Эмпирические результаты показывают, что инвестиционные стратегии на основе PNN обеспечивают более высокую доходность, чем другие инвестиционные стратегии, рассмотренные в данном исследовании. Также рассматривается влияние длительности инвестиционного горизонта и ставки комиссии.

Математическая модель экономической системы

Математическое моделирование — это интересный и сложный процесс использования математических языков и методов для описания и исследования реальных объектов, систем или процессов. Оно позволяет упростить реальность, выделив главные характеристики, чтобы анализировать и предсказывать поведение объекта, получать новые знания и проводить эксперименты, которые были бы невозможны в реальной жизни, например, с экономическими системами. Процес моделирования требует приведения математической модели к определенному виду, чтобы в последствии можно было применить хорошо известные методы для новых задач.

Также, как и в [1] предметом исследования будет модель экономической системы взятой из [4]. Пусть существует n производств, $Y \in \Re_n$ - вектор доходов, $S \in \Re_n$ вектор сбережений пропорциональный вектору доходов. $K \in \Re_n$ вектор основного капитала пропорциональный вектору доходов. $H \in \Re_{n \times n}$ - известная производственная матрица. Имеем:

$$S = HY,\ K = VY,\ I = V\dot{Y} = \dot{K} \qquad (1)$$

Благодаря $H \in \Re_{n \times n}$ строится обобщенный (матричний) мультипликатор $(E-H)^{-1}$, где $E \in \Re_{n \times n}$ единичная матрица, а матрица $V \in \Re_{n \times n}$ - обобщенный матричный акселератор. Матрицы S и V неотрицательные. $I \in \Re_n$ вектор внутренних инвестиций (зависящих от состояния экономики).

Отклонение от условий баланса $I = S$, имеют вид

$$I = S + L\dot{Y} = HY + L\dot{Y} \qquad (2)$$

и $\dot{K} = I + K\dot{I}$ (3)

Матирца L учитывает запаздывания в инвестициях и характеризует запаздывания и взаимное инвестирование в разных отраслях. K - матрица характеризующая отклонения от баланса, что зависит от прироста продукции разных отраслей, т.е инвестиции состоят из двух компонентов: часть отвечает сбережениям и часть зависит от изменений дохода.

Дифференцируя (3) и преобразовав как в [4] получено модель второго порядка:

$KL\ddot{Y}-(V-L-KH)\dot{Y}+HY=0$ (4)

Где KL - произведение двух матриц характеризующее одновременно отклонение балансовых условий (2) и опоздания во вложении инвестиций (3). Модель в виде (4) описывает динамику экономики через взаимодействие трёх основных элементов: доход, сбережения и капитал. Пусть существует $(KL)^{-1}$, тогда модель в форме Коши будет иметь вид:

$\dot{x}=Ax$ (5)

где $x=[Y,\dot{Y}]^T$, $A=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -(KL)^{-1}H & (KL)^{-1}(V-L-KH) \end{pmatrix}$, $E\in\Re_{n\times n}$ - единичная матрица.

Для получения модели в виде описанном в [2] введем управляющую и наблюдающую переменную и определим понятия шума для модели (5).

Также как и в [1] введем управление в систему (5) через вектор инвестиций $u(x)\in\Re_{2n}$. Этот вектор влияет на изменение капиталов и доходов в каждой отрасли. Можно определить:

$I(t)=V\dot{Y}+u(t),\ I=HY+L\dot{V}+u(t)$

где $u(t)$ — внешнее управление (Вектор инвестиций или сбережений). Это вектор дает возможность влиять на систему путем изменения в зависимости от веремени. Так как L — матрица запаздывания, то она может быть функцией времени. Дополним её управлением:

$I=HY+L(t)\dot{V}+u(t)$

Уравнение (4) с управлением будет иметь вид:

$KL\ddot{Y}-(V-L-KH)\dot{Y}+HY+u(t)=0$ (6)

После преобразования (6) к форме Коши получим:

$\dot{x}=Ax+Bu$ (7)

где $x=[Y,\dot{Y}]^T$, $A=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -(KL)^{-1}H & (KL)^{-1}(V-L-KH) \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -KL^{-1} \end{pmatrix}$

Модель (7) не учитывает случайных и непредсказуемых событий на экономику -например, форс-мажоры, политические кризисы, стихийные бедствия, резкие колебания мировых рынков или неожиданные изменения в спросе и предложении и т.д. При построении модели мы допускаем упрощение реальности. Поэтому в модель можно включить шум. Шум отражает влияние факторов, которые не были учтены в детальном виде (например, мелкие локальные экономические потрясения, ошибки измерений, нестабильность в поведении агентов). Инвестиционные решения и сбережения предприятий и домохозяйств могут иметь случайный характер, вызванный неопределённостью на рынке, колебаниями настроений инвесторов или временными изменениями в политике. На экономику могут влиять действия отдельных фирм и домохозяйств, которые не всегда поддаются предсказанию. Шум учитывает эти разнообразные, случайные воздействия. В экономике часто бывают неожиданные задержки и временные колебания, которые мы можем учесть в моделе через шум. В (7) инвестиции не всегда точно соответствуют планируемым: могут быть задержки, непредвиденные изменения объёмов из-за рыночных условий, политики, неожиданного поведения агентов. Поэтому появляется шум в системе. Шум отражает случайные колебания в размерах и расспределении инвестиций. Также модель опирается на вектор доходов, который зависит от спроса на продукцию отраслей. Реальный спрос может случайно меняться под воздействием внешних факторов (погода, тренды, кризисы), и это будет проявляться в шуме, влияющем на Y. Матрицы H и V задают технологические параметры. В реальности технический прогресс и производительность могут изменяться случайно, например, из-за инноваций, потерь производительности, сбоев, что можно интерпретировать как шум. Матрица L характеризует задержки инвестирования. А случайные задержки и неточности в инвестиционных процессах и фактические задержки могут колебаться, быть непредсказуемыми - т.е. шумом. Дополним (7) шумом, получим:

$\dot{x} = Ax+Bu+v,$ (8)

где v - вектор шума в системе (например, гауссовский белый шум) со своей ковариационной матрицей.

В (8) шум присутствует в системе, на практике может быть ситуация когда шум присутствует в управлении, поэтому коректным так же будет:

$\dot{x} = Ax+B(u+v),$ (8.1)

Такая модификация модели может приводить к тому, что методы решения задачи могут несколько отличаться для (7) и (8). И потребуются дополнительные исследования.

Пусть мы можем, наблюдать всё состояние вектора $x = [Y, \dot{Y}]^T$ (точнее линейную комбинацию) и доходы и приросты доходов и в наших наблюдениях присутствует шум. Тогда система (8) примет вид:

$\dot{x} = Ax+Bu+v$

$y = Cx+f,$ (9)

где $x = [Y, \dot{Y}]^T,\ A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -(KL)^{-1}H & (KL)^{-1}(V-L-KH) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -KL^{-1} \end{pmatrix}$

$C \in \Re_{l \times 2n}$- матрица наблюдений, $v \in \Re_m$, $f \in \Re_l$ - вектоы шума в системе и в измерениях, со своими соответствующими ковариационными матрицами $0<Q = Q^T \in \Re_{m \times m}$ и $0<R = R^T \in \Re_{l \times l}$. Предполагается, что совокупный процес шумов можно описать как белый шум.

Шум в измерениях нашей модели может быть например в виде ошибок в статистических данных (например, неполные или неточные отчёты), сезонные или случайные колебания, не учтённые моделью, систематические погрешности измерений.

Если мы измеряем доходы отраслей каждый месяц, но: некоторые предприятия отчитываются с задержкой; часть данных оценивается по средним значениям; иногда происходят пересмотры предыдущих данных. Все эти факторы — шумы наблюдений. Для оценки состояния используется наблюдатели: полного порядка, неполного порядка (фильтр Луинбергера) и оптимальный наблюдатель (фильтр Калмана). Наблюдатели полного порядка и неполного порядка работают, когда в системе и в измерениях нет шумов, и они дают возможность восстановить вектор состояния. Фильтр Луинбергера – ефективен, когда нет необходимости востанавливать весь вектор состояния, а нужно востановить только часть ту которая неизвестна. В нашей же системе есть шумы, как в самой системе, так и в наблюдениях, поэтому для решения задачи (9) нужно воспользоваться фильтром Калмана. Фильтр Калмана учитывает как динамику системы, так и свойства шума и позволяет восстановить вектор состояния.

Фильтр Калмана

Перед построением фильтра Калмана для системы (9) нужно проверить является ли модель наблюдаемой(восстанавливаемой). В случае если система не наблюдаема, то восстановить состояние и построить фильтр невозможно. В силу дуальности задач управления и наблюдения, такое же утверждение справедливо и для управления, т.е. если система не упраляема, то нельзя построить управление. На практике есть возможность либо изменить исходную модель, если это возможно, либо прибегнуть к декомпозиции системы. Выделить наблюдаемую подсистему и востановить её состояние.

Пусть система (9) восстанавливаемая т.е наблюдаемая, тогда оптимальный наблюдатель (фильтр Калмана), выходной сигнал $\hat{x}$ которой есть наилучшей (в смысле среднеквадратического отклонения) оценкой вектора состояния x экономичского объекта, описывается уравнением [2]:

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} +Bu+K[y-C\hat{x}]$ (10)

В этом уравнении:

$K = PC^TR^{-1}$ (11)

где $0<P \in \Re_{2n \times 2n}$– матрица-решение алгебраического уравнения Риккати:

$AP+PA^T-PC^TR^{-1}CP+BQB^T = 0$ (12)

Экономическая система с Фильтром Калмана будет иметь вид:

$\dot{x} = Ax+Bu+v$

$y = Cx+f$

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}+Bu+K[y-C\hat{x}]$ (14)

Решив уравнение (12) и определив из (11) матрицу K для системы (14) мы восстановим состояние системы (вектор состояния). Решение уравнения Риккати есть достаточно сложной математической задачей. Также при решении и исследовании системы (14) нужно учитывать особенности экономических систем. Последующие исследования планируется направить на отыскание решения уравнения Риккати в аналитическом виде.

Выводы

Моделируя экономические процессы с помощью математического аппарата и теории наблюдателей, исспользуя систему уравнений, мы получаем возможность наблюдать и доходы и приросты. Таким образом, математические модели помогают предвидеть последствия экономических изменений и дают возможность анализировать и прогнозировать и принимать обоснованые решения. После восстановления вектора состояний системы можно, решать задачу управления экономической системой. А умение моделировать, и управлять экономическими процессами дает возможность строить предсказуемые и прогнозированые экономические модели.

Результаты. Математическую модель второго порядка экономической системы сведено к форме Корши и показано как применить теорию наблюдения для построения оптимального Фильтра Калмана.

Перспективы. В дальнейших научных исследованиях предлагается сосредоточиться на построении фильтра Луинбергера и полного порядка для экономических моделей, исследовать матричную структуру уравнений Ляпунова и Риккати, найти способы упрощения решения этих уравнений для экономических задач. А также попытаться построить решения в аналитическом виде. Кроме этого, как отмечалось ранее, следует уделить внимание особенностям економических систем и особенностям их решения, так как при решении таких систем известным есть тот факт, что решения должны быть опорными - т.е. только часть решений будут удовлетворять поставленой задаче.

Литература:

1. КОЛОМІЙЧУК, О. П. Керування багатопродуктовою економічною системою // *Міжнародний науковий журнал «Інтернаука». Серія: «Економічні науки».* – 2025. – № 2. *ht*tps://doi.org/10.25313/2520-2294-2025-2-10681
2. КВАКЕРНАК, Х. Сиван Р. *Линейные оптимальные системы управления* / Перевод на русский язык. «Мир» 1977 650С.
3. КОЛОМІЙЧУК, О. П., НОВИЦЬКИЙ, В. В. *Оптимальні спостережники для гіроскопічних систем /* Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2011, Т.8, №2, С. 69-82.
4. ЖУКОВСЬКА, О. А., НОВИЦЬКИЙ, В. В. *Неокласичні керовані системи лінійні моделі. Питання аналітичної механіки та її застосування*. Інститут математики НАН України. – 1999. Т.26, – С.84-93.
5. НОВИЦЬКИЙ, В. В., ХУАН ЧЕНЬ. *Оптимальне керування майже консервативними системами* / В. В. Новицький, Хуан Чень //зб. праць Інституту математики НАН Укаїни. – 2004. Т.1, – №2. – С.152-157.
6. ПОЛБИН, А. В. , ФОКИН, Н. Д. Эконометрическое моделирование сбалансированной структурной компоненты основных российских макроэкономических показателей, *Матем. моделирование*, 2020, том 32, номер 7, 98–112.
7. БОРДАЧЕВ, С. М. Оценка параметров экономических систем фильтром Калмана Economic systems parameters estimation by Kalman filter, November 2022, *Теоретическая и прикладная экономика,* 2019 (№ 1):93-97 DOI:10.25136/2409-8647.2019.1.21085

8. CHEN, A. S., LEUNG, M. T., DAOUK, H. Application of neural networks to an emerging financial market: forecasting and trading the Taiwan Stock Index. In: *Computers & Operations research*. 2003. V. 30, P. 901 – 923.

Информация о авторе:
Олег Петрович КОЛОМИЙЧУК, кандидат физ.-мат. наук, Государственный университет Молдовы.
ORCID: 0009-0000-1173-7399
E-mail: o.kolomiichuk@gmail.com

Представлено: 01.10.2025