STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă ştiinţifică a Universităţii de Stat din Moldova, 2007, nr.9

РОЛЬ МОТИВАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ В ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: МОТИВАЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ

Антонина ЧОБАН-ПИЛЕЦКАЯ

Тираспольский теоретический лицей, г. Тирасполь

În articolul de faţă sunt elucidaţi factorii ce determină dezvoltarea motivaţiei învăţării ştiinţelor matematice în şcoală. Cu acest scop au fost evidenţiate particularităţile dezvoltării motivaţiei şi intereselor cognitive în procesul învăţării ştiinţelor matematice în şcoală; au fost elaborate şi experimental argumentate metode de dezvoltare a motivaţiei învăţării ştiinţelor matematice în şcoală.

In the present paper the psychological-pedagogical factors of development of motives of mathematical learning in school are studied. From this point of view:

- we have exposed the peculiarities of development of motives of the cognitive interest to learning mathematics;
- we have elaborated and experimentally substantiated the methodology of the development of motivation in the process of mathematical learning.

1. Введение

При обучении математике имеются разнообразные возможности для развития творческого мышления учащихся. В VI-IX классах математика предстает перед учащимися как стройная наука, с присущими ей прочными связями между ее разделами и другими школьными предметами. Казалось, это создает благоприятные условия для пробуждения интереса к математике. Тем не менее, наблюдения показывают, что в V-VI классах наряду с пробуждением интереса к математике у одних, у других возникает отрицательное отношение к ней. Пробуждение мотивации к изучению математики или отрицательное отношение к ней связаны со следующими факторами-мотивами, высказанными учащимися:

1. Я получаю удовлетворение от роста моих знаний по математике при усвоении нового материала. (10%)
2. Мне нравятся дискуссии на уроках при решении сложных задач. На уроках математики интересно. (20 %)
3. Мне просто нравится преодолевать трудности, решая задачи, разгадывая головоломки. (15%)
4. Мне нравится чувствовать себя успешным в учёбе. Знания по математике необходимы в современном мире и, в частности, для моей будущей специальности. (10%)
5. Меня волнует средний балл в аттестате, поэтому я стремлюсь получить хорошую оценку и по математике. Не люблю испытывать неудачи и провалы. Привык быть в числе лучших по математике. (10%)
6. Участие в кружках и внеклассных мероприятиях. (5%)
7. Мне нравится учитель. (5%)
8. Влияние близких и родных. (5%)
9. Трудный предмет, плохие успехи. (15%)
10. Не понимает пользы от предмета. Неосознанно не любит математику. (5%)

Эти оценки приблизительны. Заметим, что в большинстве случаев возникновение мотивации к изучению математики связано с содержанием предмета, с процессом деятельности, а влияние учителя, внеклассных мероприятий и близких – не столь значительно. Это только видимая часть явления, поскольку:

- от учителя зависит глубина осознания значения предмета;
- успехи достигаются при помощи учителя;
- в кружки и в организацию внеклассных мероприятий привлекаются хорошо успевающие ученики;
- успехи детей в учебе всегда радуют близких и родных.

Опыт показывает, что представления многих учащихся о значении математики расплывчаты и примитивны. Поэтому развитие мотивации к изучению математики должно быть связано со значением математики в жизни, в быту, в развитии техники, в овладении профессий, в изучении других предметов и т.д. Развитие мотивации обучения математике происходит поэтапно. На первом этапе возникает интерес к процессу изучения математики. На этом этапе мотивация неустойчива, в основном эмоционального характера. На следующем этапе мотивация начинает концентрироваться, принимает устойчивый характер и возникает интерес к содержанию математики. На последнем этапе учащиеся осознают, что выполнение заданий соответствует личным целям, которые важны для дальнейшего развития личности. В частности, развивается интерес к достижению успеха в изучении математики [19].

Данная статья продолжает исследования, начатые нами [23, 24].

2. Мотивационные стратегии

К.Эймс дал описание методов обучения, способствующих формированию мотивационной модели [1, с.47]. Он отмечает важность трёх элементов: используемых *учебных заданий*; *авторитета* или *роли*, которую играет учитель во время урока; *оценки/признания*, которая является результатом усилий учеников.

Проанализировав результаты предварительного тестирования, отметим доминирующие мотивы изучения математики каждого учащегося в отдельности и класса в целом. Основываясь на этих выводах, выбираем стратегию повышения мотивации изучения математики, а именно: подбираем задачи, обогащающие интерес к предмету, выбираем методы и средства для изучения новой темы. Это оправдывает себя, потому что если учащийся «зажёгся», заинтересовался темой, то это станет стимулом для последующих уроков. Но чтобы зажжённое вами «пламя» не погасло, необходимо поддерживать интерес учащихся постоянно, т.е. на каждом уроке должен быть запланирован этап мотивации. Цели этого этапа: раскрыть значимость изучения данного материала, привлечь внимание учащихся, пробудить их интерес, желание узнать, понять, применить. Каким же образом можно заинтересовать учащихся?

Можно использовать следующий материал:

- исторические задачи, исторические экскурсы, легенды, сведения из истории по данной теме, научно-популярные рассказы, жизненные факты;
- решение задач с практическим содержанием, с использованием проблемных ситуаций и межпредметных связей;
- проведение исследовательских, лабораторных и практических работ с использованием моделей, чертежей, таблиц и т.п.;
- решение задач, требующих расширения знаний по теме;
- математические фокусы, задачи занимательного характера, отрывки из литературных произведений с математическим содержанием, в которых содержатся противоречия или несоответствия привычным жизненным фактам.

Выявление практической значимости изучаемых фактов не только возбуждает интерес, но и служит сильным стимулом, поскольку взаимосвязано с основными целями обучения. Средствами эмоционального воздействия являются необычность, новизна, неожиданность, несоответствие прежним представлениям, элементы занимательности.

3. Задачи занимательного характера и исторические экскурсы

При изучении темы «Арифметическая прогрессия» полезно сообщить учащимся следующие сведения из истории математики, которые связаны с формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии. Речь идёт об эпизоде из жизни немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777-1855). Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой работ учеников других классов, задал на уроке следующую задачу: *«Сосчитать сумму натуральных чисел от 1 до 40 включительно»*. Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: «Я уже решил…» Большинство учеников после долгих подсчётов получили неверный результат. В тетради Гаусса было написано одно число и притом верное. Вот схема рассуждений. Сумма чисел в каждой паре 41. Таких пар 20, поэтому искомая сумма равна $41 \cdot 20 = 820$.

В качестве задачи-шутки можно взять следующую задачу: «*В некотором населенном пункте живут $2n + 1$ людей и каждый из них дружит с m людьми. При каких m это возможно? Докажите, что число m четно*». Можно рассматривать частные случаи $n \in \{25, 35, 47, 51, 89\}$, $m \in \{9, 14, 15, 22\}$.

При изучении операций с многочленами можно привести примеры занимательных задач с отгадыванием чисел.

Задача 1. Учитель предлагает учащимся запомнить какое-нибудь натуральное число. Каждый ученик задумывает свое число x (день недели, число месяца, день рождения, номер месяца и т.д.). Затем учитель говорит: умножьте это число на 2; прибавьте к произведению 5; полученную сумму умножьте на 5; к найденному числу допишите справа нуль.

Ученики по очереди объявляют результаты вычислений, а учитель сразу отгадывает задуманное число. В чем секрет фокуса? Замечаем, что $(2x + 5) \times 5 \times 10 = 100x + 250$. Значит, достаточно из результата вычесть 250 и снять справа два нуля. Тогда получим задуманное число x.

Задача 2. Каждый ученик задумывает два натуральных числа x и y, где $y < 100$ (число и месяц рождения ученика, год и номер месяца рождения и т.д.). Затем учитель говорит: умножьте первое число x на 2; потом умножьте это число на 10; прибавьте к произведению 73; полученную сумму умножьте на 5; к найденному числу прибавьте y; назовите результат.

Учитель сразу отгадывает задуманные числа. Как это ему удается? Замечаем, что $(x \times 2 \times 10 + 73) \times 5 + y = 100x + 365 + y$. Итак, если из названного результата вычесть 365, то первые две цифры справа дают число y, а остальные – число x.

Исторические моменты при изучении конкретных тем содержатся в [9, 10]. Биографии знаменитых математиков следует сочетать с примерами проблем, решённых ими, которые просты в формулировке. Например:

1. При ознакомлении с биографией Л.Эйлера (1707-1783) можно говорить о задаче о семи мостах.
2. При рассмотрении биографии Платона (427-347 до н.э.) следует рассказать о классификации правильных многогранников.
3. При изложении биографии К.Ф.Гаусса (1777-1855) важно отметить:
   - построение циркулем и линейкой правильных многоугольников;
   - решение уравнений высших степеней (основная теорема алгебры).
4. При изучении свойств поверхностей (цилиндра, конуса и т.д.) занимательно рассказать о свойствах листа Мёбиуса и биографии немецкого астронома и математика А.Ф.Мёбиуса (1790-1868). При помощи листа Мёбиуса можно задумать увлекательные эксперименты [2, 9].
5. С именем знаменитого французского математика и механика С.Д. Пуассона (1781-1840) связана задача о сосудах: имеются два сосуда – трехлитровый и пятилитровый. При их помощи получить: один литр воды; два литра воды; четыре литра воды.
   Хорошо известны и другие задачи этого типа (см. [9], с. 17).
6. С именем немецкого математика П.Г.Л.Дирихле (1805-1859) связан «принцип Дирихле», который полезен при решении задач на доказательство.

Проблема 1. В классе m учащихся. При написании письменных работ один ученик сделал n ошибок, а остальные меньше. Докажите:

1. Если $n \geq 11$ и $3(n\text{-}3) \leq m$, то по крайне мере 3 ученика сделали равное количество ошибок.
2. Если $n \geq 2+3k$ и $k(n\text{-} 3) \leq m$, то по крайне мере k учеников сделали равное количество ошибок.

Решение. Каждый из $m\text{-}1$ учащихся сделал $\leq n\text{-}1$ ошибок. Если бы для каждого числа i, где $0 \leq i < n$, не более $k\text{-}1$ учащихся сделали ровно i ошибок, то $m \leq 1 + n(k - 1) = nk - n + 1 \leq nk - (2+3k) + 1 = k(n - 3\} - 1 \leq m - 1 < m$, противоречие.

Этим же методом решаются задачи следующего типа.

Задача 3 ([9], задача 15.4). На земле живут более 4 миллиардов человек и среди них не более 1% людей старше 100 лет. Докажите, что существуют два человека, которые родились в одну и ту же секунду.

При изучении деления с остатком интересны задачи следующего содержания.

Задача 4. В 2007 году 2 сентября приходится на воскресенье. А каким днем недели будет 1 сентября через $m \geq 1$ лет.

Решение. И обычном году 365 дней, а в високосном (например, в 2008) – 366 дней. Каждый четвертый год является високосным. Пусть $[k]$ есть целая часть действительного числа k. Поскольку $365 = 7 \times 52 + 1$, то через m лет будем иметь $m \times 7 \times 52$ недель и $p = 1 + m + [m:4]$ дней. Число p позволяет вычислить, на какой день недели выпадет 2 сентября m +2007 года. Например, при $m = 7$

получаем $p = 1 + 7 + 1 = 7 + 2$. В 2014 году 2 сентября выпадает на второй день недели. Значит, 1 сентября 2014 года будет первым днем недели – понедельником.

Различные исторические задачи и легенды с математическим содержанием содержатся в [2, 6, 7, 9].

4. Учебные проблемы и мотивация

Возбуждение интереса к учебной проблеме, создание проблемных ситуаций возможны при изучении большинства тем курса математики (см. [12, 14, 15, 16, 17, 20]). Приведём некоторые примеры подобных задач. При составлении некоторых задач были использованы [2, 5, 7, 9, 13].

Следующая задача решается при помощи математической индукции и свойств арифметических прогрессий.

Задача 5. Фиксируем действительное число $k \neq 0$. Найдите определенную на множестве натуральных чисел функцию $f(n)$, такую, что $f(1) = k$ и $f(n + m) = f(n) + f(m) + kmn$ для любых натуральных чисел n, m.

Решение. Замечаем, что $f(n) = f((n-1) + 1) = f(n - 1) + f(1) + k (n-1) = f(n-1) + kn = f(n-2) + k(n-1) + kn = ... = k + 2k + ... + k(n-1) + kn = kn(n-1)/2$.

Интересны частные случаи $k \in \{-2, -1, 1, 2, 3\}$.

Приведём примеры задач с практическим содержанием. Общеизвестна следующая задача Герона Александрийского (I в. до н.э.):

Задача 6. Из-под земли бьют четыре источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй – за 2 дня, третий – за 3 дня, четвёртый – за 4 дня. Сколько времени потребуется четырём источникам вместе, чтобы заполнить бассейн?

На основании этой задачи можно составить различные однотипные задачи.

Проблема 2. Из под земли бьют $n \geq 2$ источников. Первый заполняет бассейн за m_1 дней, второй – за m_2 дней,..., n-й – за m_n дней. Сколько времени потребуется всем источникам вместе, чтобы заполнить бассейн?

Проблема 3. Со склада различным потребителям распределяется определённое количество товара. Имеется $n \geq 2$ автопарков. Первый развозит весь товар за m_1 дней, второй – за m_2 дней, ..., n-й – за m_n дней. Сколько дней потребуется всем автопаркам вместе, чтобы развезти весь товар?

Рассмотрим следующую общую проблему.

Проблема 4. Тело движется по закону $S(t) = at^{n+3} + bt^{n+2} + ct^{n+1}$, где $n \geq 0$.

A. Каким условиям удовлетворяет момент t_1 начала пути? Во первых, $t_1 \geq 0$. Во-вторых, $S'(t_1) \geq 0$ и $S'(t)<0$ при $0 < t < t_1$.

B. Каким условиям удовлетворяет момент t_2 остановки тела? Во-первых, $t_1 < t_2$. Во-вторых, $S'(t_2) = 0$ и $S'(t)>0$ при $t_1 < t < t_2$ и $a < 0$.

C. Определить: время начала пути; длину пути; время остановки тела.

Решение. Эта задача связана с исследованием свойств функций при помощи производной. Обозначим через t_1 время начала пути, через t_2 – время остановки тела. Производная $S'(t) = t^n ((n+3)at^2 + + (n+2)bt + (n+1)c)$ равна скорости движения тела.

Для решения этой задачи можно применить метод мозговой атаки (brainstorming). В этом случае у учащихся последовательно возникают следующие вопросы с соответствующими ответами:

A. При каких условиях тело движется? Во временном интервале $[p, q]$ тело движется при условиях: $t \geq 0$; $S'(t)>0$, как только $p < t <q$.

Выводы:

1. Для решения задачи находим корни x_1, x_2 квадратного уравнения $(n+3)at^2 + (n+2)bt + (n+1)c = 0$. Если корни мнимые, или равны, или оба неположительные, то задача не имеет физического смысла.

2. Предположим, что корни действительные, $x_1 < x_2$ и $0 < x_2$. В этом случае $t_2 = x_2$ и $t_1 = max \{0, x_1\}$.

3. Конкретные примеры могут быть построены следующим образом:

- фиксируем действительные числа x_1, x_2, такие, что $x_1 < x_2$ и $0 < x_2$;

- фиксируем положительное число n и отрицательное число p;
- положим $a = p:(n+3)$, $b = -p(x_1 + x_2):(n+2)$, $c = p \cdot x_1 \cdot x_2 :(n+1)$.

Задача 7. Может ли дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами равняться одному из чисел: 6, 8, 13, 19, 103, 1002, 2001, 3853715, 4732134, 521432289?

Эта задача является частным случаем следующей общей проблемы.

Проблема 5. При каких условиях целое число d может быть дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами?

Решение.

1. Если число d является дискриминантом заданного квадратного уравнения, то $d = b^2 - 4ac$. Поэтому если a, b, c являются целыми числами, то и d является целым. Если $d = p:q$ является рациональным числом, то легко найти рациональные числа a, b, c, для которых $d = b^2 - 4ac$. Например, $a = b = 1$ и $4c = d - b^2$. Поэтому кажется правоподобным, что общая проблема решается положительно.

2. При делении любого целого числа на 4 получим один из следующих остатков: 0, 1, 2, 3. Значит, возможен один из следующих случаев:

Случай 2.1. $d = 4d_1$, где d_1 – целое число.

Случай 2.2. $d = 4d_1 + 1$, где d_1 – целое число.

Случай 2.3. $d = 4d_1 + 2$, где d_1 – целое число.

Случай 2.4. $d = 4d_1 + 3$, где d_1 – целое число.

3. При делении целого числа на 2 получим остаток 0 или 1. Значит,возможны два случая.

Случай 3.1. $b = 2e$, где e – целое число.

В этом случае $d = b^2 - 4ac = (2e)^2 - 4ac = 4(e^2 - ac)$ и $d_1 = e^2 - ac$, т.е. для d реализуется случай 2.1.

Случай 3.2. $b = 2e + 1$, где e – целое число.

В этом случае $d = b^2 - 4ac = (2e + 1)^2 - 4ac = 4(e^2 + e - ac)^2 + 1$, т.е. для d реализуется случай 2.2.

Итак, для d случаи 2.3 и 2.4 не реализуются.

Вывод 1. Если остаток от деления числа d на 4 равен 2 или 3, то d не может быть дискриминантом квадратного уравнения с целочисленными коэффициентами.

Вывод 2. Если целое число d является дискриминантом квадратного трехчлена с целочисленными коэффициентами, то остаток от деления числа d на 4 равен 0 или 1.

Как найти коэффициенты a, b, c? Сколько таких коэффициентов существует?

Случай 2.1. $d = 4\, d_1$, где d_1 – целое число.

Предлагаем вариант общего решения.

1. Положим $a = 1$.
2. Фиксируем целое число e.
3. Положим $b = 2e$.
4. Вычисляем $c = e^2 - d_1$

Случай 2.2. $d = 4\, d_1 + 1$, где d_1 – целое число.

Предлагаем вариант общего решения.

1. Положим $a = 1$
2. Фиксируем целое число e.
3. Положим $b = 2e + 1$.
4. Вычисляем $c = e^2 + e - d_1$.

В каждом из случаев 2.1 и 2.2 существует бесконечное число решений. В случаев 2.3 и 2.4 решений нет.

Замечание. Эффект достигается, когда число d является небольшим. В этом случае ученики предполагают, что методом подбора легко найдут некоторое решение. Большие числа отпугивают многих.

Замечание. Переход от конкретных однотипных упражнений к общей задаче развивает у учащихся творческую, поисковую деятельность. Применение исследовательско-поискового метода в обучении помогает учащимся овладевать методами научного познания, пробуждает потребность в творческой деятельности. К сожалению, применение этого метода на уроках ограничено дефицитом учебного времени и неоднородностью состава учащихся в классе. Эти трудности исчезают при организации внеклассной работы. Исследовательские домашние задания могут проводиться как обязательные или предлагаться для желающих как одна из форм внеклассной работы.

В классах биолого-химической направленности по теме «Решение задач с помощью уравнений и систем уравнений» в 9-х классах можно предложить задачи на смешивание растворов. При этом полезным будет рассмотрение решения данных задач различными способами. Приведём примеры таких задач:

Задача 8. К 100 г 20%-ного раствора соли добавили 300 г её 10%-ного раствора. Определите процентную концентрацию раствора.

Ответ: 12,5%

Задача 9. Смешали 10%-ный и 25%-ный растворы соли и получили 3 кг 20%-ного раствора. Какое количество каждого раствора в килограммах было использовано?

Ответ: 1 кг, 2 кг.

Рассмотрение темы «Неравенства» можно начать с решения следующей задачи.

Проблема 6. Река течет с постоянной скоростью в озеро. На берегу озера находятся два населенных пункта A и B, а вверх по течению расположен населенный пункт C. Расстояния от A до B и C равны. Из A отправляются в B и C одновременно два парохода, которые в стячей воде развивают равные скорости. Какой пароход вернется раньше, если время их стоянки в B и C одинаково?

Решение. В начале обсуждения, как правило, учащиеся отвечают, что оба парохода вернутся одновременно.

Обозначим через x скорость пароходов в стоячей воде, через y – скорость течения реки, через a – расстояние от C до озера и через b – расстояние от русла реки до A. Тогда $a+b$ равно расстояниям от A до B и C. Первый пароход, который курсирует между A и B, находится в пути $2(a+b): x = 2a: x + 2b: x$ часов. Второй пароход находится в пути $a: (x-y) + a:(x+y) + 2b: x$ часов.

Возникает вопрос: Какая из величин $2: x,\ 1:(x+y) + 1:(x-y)$ больше?

Легко устанавливается, что $1:(x+y) + 1:(x-y) = 2x:(x^2 - y^2) > 2: x$. Кроме того, первый пароход прибывает на $a(x^2 + y^2): x(x^2 - y^2)$ часов раньше второго.

Выводы:

1. Первым всегда прибывает первый пароход.
2. Чем больше скорость течения реки, тем больше находится в пути второй пароход.
3. Иногда полезно начать анализ задачи с конкретного примера. В этом случае целесообразно разбить класс на 2-3 группы, и каждая из них решает конкретный пример.

Вариант 1. *x = 50 км/час, y = 10 км/час, a = 100 км, b = 25 км*. Второй пароход находится в путь 5 часов и 10 минут, а первый – 5 часов.

Вариант 2. *x = 12 км/час, y = 2 км/час, a = 210 км, b = 6 км*. Второй пароход находится в пути 37 часов, а первый – 36 часов.

Вариант 3. *x = 8 км/час, y = 2 км/час, a = 30 км, b = 4 км*. Второй пароход находится в пути 9 часов, а первый – 8 часов, 30 минут.

Решение различных конкретных вариантов общей задачи можно организовать в форме дидактических игр, разбив класс на 2 – 3 группы. Игровые моменты выступают как средство побуждения, стимулирования учащихся к математической деятельности. Дидактические игры достигают своей цели при правильной их организации и при условии, что учащиеся сосредоточены, внимательны, активны.

Учащимся, знающим неравенства и квадратные уравнения, можно рассказать о формуле Вильсона из экономической теории управления запасами.

К решению уравнений приводит решение задач следующих типов.

Задача 10. Найти два числа, зная, что их сумма равна 16, а сумма их квадратов - 130.

Задача 11. Найти стороны прямоугольника, зная их разность и площадь прямоугольника.

Задача 12 (задача ал-Караджи) . Найти стороны прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру.

Задача 13. Участники заседания обменялись рукопожатиями и кто-то заметил, что рукопожатий было 56. Сколько человек явилось на заседание?

При исследовании операции извлечения корня при помощи метода математической индукции можно решать задачи следующего вида.

Задача 14. Фиксируем положительное число a, неотрицательное число c и натуральное число m. Положим $b = a+c$, $s_1 = \sqrt{c}$, ..., $s_{n+1} = \sqrt{c+s_n}$,.... Докажите, что $s_m < a$, если $b \le a^2 - 2a$.

Рассмотрите конкретные случаи $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $m \in \{3, 4, 5, 6\}$.

Многие задачи имеют по два и более решений. В этом случае каждая такая задача может быть предложена для решения в двух уровнях.

Уровень 1. Найти какое-нибудь решение задачи.

Уровень 2. Найти все решения задачи.

Если для каждого решения задано определенное число, называемое ценою решения, то можно предложить и следующий уровень.

Уровень 3. Найти решения с минимальной ценой.

Известно, что транспортные задачи, решаемые методом линейного программирования, имеют все три уровня. Простые задачи, имеющие три уровня, могут быть следующего типа.

Проблема 7. В живом уголке школы имеются n существ трех видов. Каждая особь первого вида весит 3 кг и имеет 2 ноги, каждая особь второго вида весит 5 кг и имеет 4 ноги, а каждая особь третьего вида весит 9 кг и имеет 6 ног. Вместе у них $2m$ ног. Сколько существ каждого вида? Найти все возможные случаи. Рассмотреть и случай, когда сумма их веса является наименьшей.

Решение. Обозначим через x число животных первого вида, через y – число животных второго вида, через z – число животных третьего вида. Тогда $x + y + z = n$, $2x + 4y + 6z = 2m$ или $x + 2y + 3z = m$, а $3x + 5y + 9z$ равно сумме их веса. Задача имеет смысл при $n < 2m < 6n$. Из первых двух равенств получаем $y = m - n - 2z$. Если $\{x, y, z\}$ есть решение, то $y = m - n - 2z$, $x = n - y - z$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Рассмотрим следующие частные случаи этой задачи.

Вариант 1. $n = 9$, $2m = 28$. В этом случае задача имеет два решения $\{5, 3, 1\}$, $\{6, 1, 2\}$. Решение $\{6, 1, 2\}$ является минимальным по весу.

Вариант 2. $n = 10$, $2m = 46$. В этом случае задача имеет три решения $\{1, 5, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 1, 6\}$. Решение $\{1, 5, 4\}$ является минимальным по весу.

Вариант 3. $n = 13$, $2m = 54$. . В этом случае задача имеет пять решения $\{1, 10, 2\}$, $\{2, 8, 3\}$, $\{3, 6, 4\}$, $\{4, 4, 5\}$, $\{5, 2, 6\}$. Решение $\{1, 10, 2\}$ является минимальным по весу.

В 5 – 6 классах можно решать арифметически задачи следующего типа.

Проблема 8. В живом уголке школы имеются три существа. Второе существо весит на *а кг* больше, чем первое, а третье – на *b кг* больше, чем второе. Все вместе они весят *с кг*. Сколько весит каждое существо.

Следующая задача приводится к решению систем уравнений.

Проблема 9. Подберите числа a, b, c, d, e так, чтобы уравнение $\sqrt{ax+c} + \sqrt{bx+d} = e$ имело корни $x_1 = n$, $x_2 = m$, где $n \ne m$.

Решение. Фиксируем положительные числа e_1, e_2, e_3, e_4, где $e_1 + e_2 = e_3 + e_4 = e$. Можем считать, что $\sqrt{an+c} = e_1, \sqrt{bn+d} = e_2, \sqrt{am+c} = e_3, \sqrt{bm+d} = e_4$. Возводим в квадрат и получаем для a, b, c, d две системы уравнений. Все решения могут быть построены так. Задача имеет бесконечное число решений.

Задачи следующего типа решаются при помощи квадратных уравнений.

Проблема 10. Найдите действительные корни урвнения $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = px^2 + qx + r$, если $a+d = b+c$ и $q : p = k(a+d)$, как только $pq \ne 0$.

Решение. Имеем $(x+a)(x+d) = x^2 + (a+d)x + ad$. Положим $y = x^2 + (a+d)x$. Тогда заданное уравнение принимает вид $(y+ad)(y+bc) = kpy + r$. Считаем $k = p = q = 0$, если $pq = 0$. Это квадратное уравнение, которое имеет не более двух действительных корней. Если y_0 есть один из таких корней, то решаем уравнение $x^2 + (a+d)x - y_0 = 0$. Заданное уравнение имеет не более четырех действительных корней.

Проблема 11. Фиксируем число $k \ne 0$. Найдите все функции $f(x)$, для которых $f(x) f(y) - kxy = f(x) + f(y) - k$ и $f(1) = k \ne 1$.

Решение. Имеем $f(x) f(1) - kx = f(x) + f(1) - k$ или $k f(x) - kx = f(x)$. Следовательно, $f(x) = kx/(k-1)$.

5. Общие выводы и рекомендации

С.И. Рубинштейн [18, с.412] отметил, что эффективность включения обучаемого в работу определяется не только тем, насколько стоящие перед ним задачи понятны ему, но и тем, какой они нашли «отклик и опорную точку в его переживаниях».

Для осуществления внутренней мотивации необходимо тщательно структурировать весь учебный материал, выделить главные идеи и подчинённые. Необходимо, чтобы последовательность и способы изучения материала были понятны учащимся. С этой целью учебный материал рекомендуется разбить на логические целостные блоки. По мнению Я.А. Коменского [11, с.412], живой и страстный интерес к учебной деятельности можно пробудить в учащемся, лишь если его работа не представляется ему отдалённой, недоступной и трудной.

Внутренние и внешние мотивы учебной деятельности в совокупности друг с другом оказывают влияние на ее результат. Внутренние и внешние мотивы – это постоянно изменяющаяся система. По мнению И.А. Васильева [4, с.50], внешние и внутренние мотивы играют разную роль: внутренние мотивы придают деятельности личностный смысл, а внешние мотивы являются побудителем деятельности.

Ж.М. Келлером [10] был предложен ряд условий зависимости мотивации от учения, которые включают внутренний интерес; уместность обучения в соответствии с личными требованиями ученика, его целями, ценностями; ожидание успеха; удовлетворение при завершении активности от полученных внутренних и внешних поощрений. Всё это необходимо учитывать при разработке дидактической системы и выборе методов обучения. Например, в классах гуманитарного направления, где количество часов, отведенных программой по математике, составляет всего 3 часа в неделю и математика не является профильным предметом, вопрос повышения уровня развития мотивации стоит особенно остро. В связи с этим рекомендуется в таких классах на дом задавать дифференцированные творческие задания. Например, учащиеся могут по выбору написать дома стихотворение, сказку, оду и т.д., с использованием изученного теоретического материала. Ученики, не открывшие в себе «писательского дара», могут составить кроссворд, ребус и т.д. Такого рода задания требуют от учащихся хорошего знания теории и побуждают их к дополнительному повторению и систематизации знаний. Такие задания учащиеся выполняют с удовольствием, используя свой талант, фантазию и знания. Лучшие работы можно зачитать в классе. При оценке отмечается объём использованного теоретического материала в работе и оригинальность сюжета. Лучшие кроссворды можно использовать для проверки знаний учащихся на уроке или как разминку при повторении пройденного материала. Такие формы работы повышают уровень мотивации и интерес к математике, помогают осуществлять индивидуальный подход к учащимся, включать каждого в осознанную учебную деятельность, мотивировать её, успешно решать учебные и коррекционно-развивающие задачи.

Одной из основных задач учителя является организация учебной деятельности таким образом, чтобы сформировать у учащихся потребность в осуществлении творческого преобразования учебного материала с целью овладения новыми знаниями.

Китайская мудрость гласит: «Я слышу – я забываю, я вижу – я запоминаю, я делаю – я усваиваю». Для того чтобы знания учащихся были результатом их собственных поисков, учителю необходимо организовывать и контролировать эти поиски, развивая у учащихся их познавательную деятельность. С этой целью ученикам предлагается исследовательская работа. Это своего рода логическое завершение темы, задание, требующее владения всем материалом темы. Сильным ученикам эти задания можно давать как индивидуальные, а остальным, например – в качестве комплексного домашнего задания и желательно после предварительного обсуждения в классе.

Воспитание у учащихся творчества, инициативы развивает у них мотивацию поисковой деятельности и учения в целом.

Литература:

1. Ames C. Classrooms, goal structures and student motivation // Journal of Educational Psychology. - 1992. - 84(3). - P.261-271.
2. Аренс В. Математические игры и развлечения. - СПб., 1911, с.127.
3. Ausubel D. şi Robinson F. Învăţarea în şcoală. O introducere în psihologia pedagogică. - Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 1981.
4. Васильев И.А. Роль интеллектуальных эмоций в регуляции // Психологический журнал. - 1998. - Т.19. - №4.

5. Chiriac V. şi Chiriac M. Probleme de algebră. - Bucureşti: Editura Tehnică, 1977.
6. Глейзер Г. И. История математики в школе. - Москва: Просвещение, 1983 (Gleizer G.I. Istorizmul în predarea matematicii, vol. 1-3. - Chişinău: Lumina, 1966).
7. Галицкий А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. - Москва: Просвещение,1994. - 271 с
8. Golu M. Fundamentele Psihologiei. - Bucureşti: România de mâine, 2000.
9. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах. - Москва: Просвещение, 1984.
10. Keller J. V. Motivational design of instructional // C.M. Reigelruth (ed.). Instructional design theories an current status. - 1983, p.383-434.
11. Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения. - Москва, 1982. - 656 с.
12. Лук А.Н. Эмоции и чувства. - Москва, 1972.
13. Lupu I. Metodica predării matematicii. - Chişinău:LICEUM, 1996. - 308 p.
14. Маркова А.К. Формирование мотивации учения в школьном возрасте. - Москва, 1990.
15. Махмутов М.И. Проблемное обучение. - Москва: Педагогика, 1975. - 348 с.
16. Родионов М.А. Мотивация учения математике и пути ее формирования. - Москва, 1990.
17. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования. - Москва: Изд-во АН СССР, 1958. - 412 с.
18. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии: В 2-х тт. Т.2. - Москва: Педагогика, 1989. - 458 с.
19. Sălăvăstru D. Psihologia Educaţiei. - Iaşi: Polirom, 2004.
20. Скаткин М.Н. Совершенствование процесса обучения. - Москва: Педагогика, 1971.
21. Хон Р.Л. Педагогическая психология. Приципы обучения. - Москва: Деловая книга, 2002.
22. Viau R. La motivation en contexte scolaire. - Paris: Bruxelles. De Boeck et Larcier S.A., 1997.
23. Чобан-Пилецкая А. Применение мотивации при обучении математике. - Concepte şi strategii în pregătirea cadrelor didactice. Materialele conferinţei ştiinţifice internaţionale. Chişinău, 12-13 octombrie 2007. - Chişinău: UST, 2007, p.94-104.
24. Чобан-Пилецкая А. Роль мотивационных принципов в организации обучения математике: общие проблемы. - В данном издании.

Prezentat la 09.10.2007