ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ЛЮБОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

Лина КИСЛЯКОВА

МОУ «Рыбницкий теоретический лицей»

În prezenta lucrare este dată deducția formulei suprafeței oricărui pătrat convex, pe care o putem denumi analog al formulei lui Gheron, luând în considerație unele afinități exterioare. Aplicarea formulei deduse la lecțiile de geometrie pentru rezolvarea problemelor ar fi mai comodă şi rațională.

This work is a conclusion of formula square of amy convexity quadrangle , which can be named analogy formula of Geron, taking into account outward likeness. Using infering formula at the geometry lessons to do geometry seems, it would be more convenient and rational.

Математику, состоящую главным образом из фактов, можно представить и описывать подобно любому явлению природы. Эти факты иногда сформулированы явно – в виде теорем, иногда лишь упоминаются по ходу доказательства или приводятся в качестве примеров, составляя основную часть приложений математики. Они извечны, невзирая на изменчивость интересов исследователей.

Обладать активными знаниями в области математики означает не только готовность приводить достаточно длинные списки математических фактов и умение строго воспроизводить доказательства некоторых из них. Активность математического знания – это стремление и способность всё осмысливать: сопоставлять отдельные факты, связывать новое со старым, непривычное с обычным по аналогии, сложное разложить на части, найти применение общего правила к частному случаю, перейти от единичного факта к общей закономерности, создать целостное представление о математическом объекте и т.д.

Овладеть математикой – значит научиться решать задачи, причём стандартные, но требующие оригинальности, изобретательности, здравого смысла. Решение задач – практическое искусство, и научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь. Меня заинтересовал вопрос: можно ли вычислить площадь произвольного выпуклого четырёхугольника, зная четыре его стороны. В рамках школьной программы мы рассматриваем вычисление площади фактически двух видов выпуклых четырёхугольников: параллелограмма и трапеции. И как результат появилась исследовательская работа на тему «Площадь четырёхугольника».

Я поставила перед собой цель: вывести формулу вычисления площади произвольного выпуклого четырёхугольника, которую можно назвать аналогом формулы Герона, учитывая некоторые внешние сходства; показать способы решения задач на вычисление площади любого выпуклого четырёхугольника, применяя ранее полученные знания и выведенную формулу. Сравнить, насколько выведенная формула более удобна.

Докажем следующую теорему:

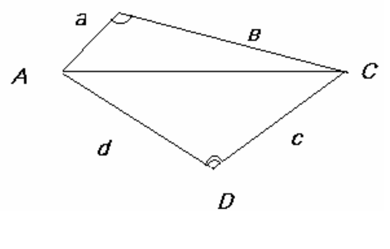
площадь произвольного выпуклого четырёхугольника может быть определена по формуле:

$$S=\sqrt{A-abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

где A= (p -a)(p - в)(p - c)(p - d);

a, в, c, d – длины сторон, p – полупериметр, α и β – противолежащие углы четырёхугольника.

Доказательство: пусть в четырёхугольнике ABCD AB= a, BC= в, CD = c, DA= d; $\angle$ ABC=β, $\angle$ ADC= α



Зная теорему косинусов (квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними), для треугольника ABC запишем $AC^2=a^2+в^2-2ав\cos\beta$, для треугольника ADC имеем $AC^2=c^2+d^2-2cd\cos\alpha$.

Приравнивая правые части этих выражений, получим:

$$a^2+в^2-2ав\cos\beta=c^2+d^2-2cd\cos\alpha,$$

$$\text{или}\quad a^2+в^2-c^2-d^2=2ав\cos\beta-2cd\cos\alpha. \qquad (1)$$

Найдём площадь четырёхугольника ABCD как сумму площадей треугольников ABC и ADC:

$$S=\frac{1}{2}ав\sin\beta+\frac{1}{2}cd\sin\alpha, \text{ откуда}$$

$$4S=2ав\sin\beta+2cd\sin\alpha. \qquad (2)$$

В равенствах (1) и (2) обе части возведём в квадрат, а затем почленно сложим:

$$(a^2+в^2-c^2-d^2)^2+16S^2=(2ав\cos\beta+2cd\cos\alpha)^2+(2ав\sin\beta+2cd\sin\alpha)^2.$$

Выполним равносильные преобразования:

$$16S^2=(2ав\cos\beta-2cd\cos\alpha)^2+(2ав\sin\beta+2cd\sin\alpha)^2-(a^2+в^2-c^2-d^2)^2=$$
$$=4a^2в^2\cos^2\beta-8авcd\cos\beta\cos\alpha+4c^2d^2\cos^2\alpha+4a^2в^2\sin^2\beta+8авcd\sin\beta\sin\alpha+$$
$$+4c^2d^2\sin^2\alpha-(a^2+в^2-c^2-d^2)^2=4a^2в^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+4c^2d^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-$$
$$-8авcd(\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha)-(a^2+в^2-c^2d^2)^2=4a^2в^2+4c^2d^2-8авcd\cos(\alpha+\beta)-$$
$$-(a^2+в^2-c^2-d^2)^2=((2ав)^2+(2cd)^2+8авcd)-(a^2+в^2-c^2-d^2)-8авcd-8авcd\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=(2ав+2cd)^2-(a^2+в^2-c^2-d^2)-8авcd(1+\cos(\alpha+\beta))=$$
$$=(2ав+2cd-a^2-в^2+c^2+d^2)(2ав+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)-8авcd\,2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=((c^2+d^2+2cd)-(a^2+в^2-2ав))((a^2+в^2+2ав)-(c^2+d^2-2cd))-16авcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=((c+d)^2-(a-в)^2)((a+в)^2-(c-d)^2)-16авcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=(c+d+a-в)(c+d-a+в)(a+в+c-d)(a+в-c+d)-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\text{Тогда } S^2=\frac{в+c+d-a}{2}\,\frac{a+c+d-в}{2}\,\frac{a+в+d-c}{2}\,\frac{a+в+c-d}{2}-авcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=(p-a)(p-в)(p-c)(p-d)-авcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$S=\sqrt{(p-a)(p-в)(p-c)(p-d)-авcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\sqrt{A-авcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

При доказательстве были применены формулы:

$$(a+в)^2=a^2+2ав+в^2 \text{ и } (a-в)^2=a^2-2ав+в^2;$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1,\ \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta),$$
$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};\ a^2-в^2=(a+в)(a-в).$$

Учтено также, что p - это полупериметр, т.е. $p=\dfrac{a+в+c+d}{2}$, значит

$$p-a=\frac{a+в+c+d}{2}-a=\frac{a+в+c+d-2a}{2}=\frac{в+c+d-a}{2} \text{ и т. д.}$$

Следствие 1: Площадь произвольного четырёхугольника, вписанного в окружность, вычисляется по формуле: S=$\sqrt{(p-a)(p-в)(p-c)(p-d)}$.

Доказательство:

Известно, что сумма противолежащих углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180^0, т.е. $\alpha + \beta = 180^0$, $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \cos 90^0 = 0$, поэтому S=$\sqrt{(p-a)(p-в)(p-c)(p-d)}$.

Следствие 2: Площадь произвольного четырехугольника, описанного вокруг окружности, вычисляется по формуле: S=$\sqrt{авсd\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$.

Доказательство:

Известно, что у описанного вокруг окружности четырёхугольника суммы противолежащих сторон равны, т.е. a + c = в + d, и p – a = c ; p - в = d ;p - c = a; p - d = в.

Имеем: S=$\sqrt{авсd - авсd\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \sqrt{авсd(1-\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2})} = \sqrt{авсd\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$.

Следствие 3: Площадь четырёхугольника, вписанного в окружность и описанного вокруг окружности, может быть вычислена по формуле:

$$S=\sqrt{авсd}\ .$$

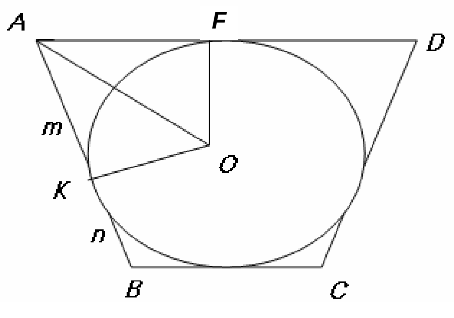
Доказательство:

Так как a+c = в+d и S=$\sqrt{(p-a)(p-в)(p-c)(p-d)}$,

$$S=\sqrt{\frac{c+d+в-a}{2}\frac{c+d+a-в}{2}\frac{a+в+d-c}{2}\frac{a+в+c-d}{2}} = \sqrt{\frac{2c}{2}\frac{2d}{2}\frac{2a}{2}\frac{2в}{2}} = \sqrt{авсd}\ .$$

№1.177. Сборник Сканнави.

В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки m и n.Определить площадь трапеции.



Решение

1. По условию точка касания K делит сторону AB на отрезки AK=m , KB=n.
2. Из точки O – центра окружности, проведем радиусы, перпендикулярные AD и AB; соединим O с A.
3. Δ AKO = Δ AOF, по катету и гипотенузе, =>, AF=FD=m, значит AD=2m.
4. На том же основании BC=2n.
5. Площадь четырехугольника, описанного вокруг окружности, вычисляется по формуле

S=$\sqrt{авсd\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$. Так как сумма противолежащих углов равнобокой трапеции равна 180^0, т.е. $\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \sin 90^0 = 1$, то S=$\sqrt{(m+n)^2\cdot 2m\cdot 2n}$ =2(m+n)$\sqrt{nm}$

Ответ: 2(m+n)$\sqrt{nm}$

Таким образом, я не только вывела формулу площади любого выпуклого четырехугольника, но и показала ее практическое применение, тем самым акцентировав необходимость глубокого изучения данной темы.

Изучение математики формирует не только логическое мышление, но и многие другие качества личности: сообразительность, настойчивость, аккуратность, критичность и т.д. Решение математических задач помимо пространственного воображения развивает способность догадываться, предвидеть заранее результат, способность разумно искать верный путь в самых запутанных ситуациях. Математику следует глубоко и серьёзно изучать не только потому, что без неё нельзя сделать ни шагу в жизни, в практической деятельности, на любой работе, но и потому, что процесс её изучения способствует развитию у человека важнейших качеств и способностей.

Красота в математике зачастую неброская, скрытая, «жар холодных формул» проявляется не сразу.

Применение выведенной формулы на уроках геометрии для решения задач на вычисление площади произвольного выпуклого четырёхугольника было бы более удобным и рациональным. Данное исследование может также заинтересовать учителей математики как дополнительный материал к элективным курсам по геометрии и учеников старших классов гимназий и лицеев, самостоятельно готовящихся к конкурсным экзаменам по математике для поступления в вуз.

Литература:

1. Атанасян Л.С. Геометрия: Учебник для 7-9 классов - Москва: Дрофа, 2004.
2. Погорелов А.В. Геометрия: Учебник для 7-11 классов - Москва: Просвещение, 2001.

Prezentat la 20.05.2008