STRATEGII ALGORITMICE ŞI EURISTICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

Ilie LUPU, Liubov ZASTÎNCEANU*

Universitatea de Stat din Tiraspol
**Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălți*

The successful solving of problems is influenced by the utilized strategies. The essence of the algorithmic and heuristic strategies, its applications in solving of distinct problems and, in particular, of the more difficult problems make up the object of the present research.

Rezolvarea problemelor şi creativitatea sunt considerate culmi ale performanței cognitive. Învățarea prin rezolvarea de probleme (problem-solving) sau, altfel spus, prin explorarea alternativelor, este o variantă a euristicii, o altă modalitate, mai complexă, de aplicare a teoriei învățării prin descoperire. Deci, prima şi cea mai importantă sarcină a profesorilor de matematică este de a acorda atenția cuvenită „metodologiei rezolvării problemelor".

O strategie de rezolvare a unei probleme reprezintă un ansamblu de reguli extrase din volumul de cunoştințe însuşite anterior.

În problemele de demonstrație există situații în care regulile concrete ale rezolvării nu sunt cunoscute de elev, nefiind încă descoperite. În aceste cazuri este necesar a găsi un mod concret de a rezolva problema, adică, un plan euristic bazat pe metode şi procedee euristice. Un bun cunoscător al problemelor matematice se apropie de soluția unei probleme pe cale euristică şi abia apoi o prezintă algoritmic.

O strategie reuşită reduce la minimum numărul de încercări necesare în rezolvarea unei probleme, căutându-se metoda mai simplă, mai directă, apoi se trece la alegerea altor procedee.

De altfel, acestea sunt şi funcțiile euristicii – disciplină ce reuneşte procedeele menite să conducă la descoperire şi invenție. Metodele euristice sunt mijloacele cu ajutorul cărora se elaborează planuri de rezolvare.

În general, în rezolvarea oricărei probleme, strategiile euristice se împletesc cu cele algoritmice, prin care primele sunt probate, ajungându-se treptat la o strategie tot mai clar conturată.

Exemple:

1. Să demonstrăm că pentru orice n, n $\in$N*, $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

Demonstrație:
Metoda I:
Este evident că:

$$1^2 = 4\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 1\ ,$$
$$3^2 = 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 1\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(2n-1)^2 = 4\cdot n^2 - 4\cdot n + 1\ .$$

Adunând membru cu membru aceste n egalități, obținem:

$$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = 4\cdot(1^2+2^2+\ldots+n^2) - 4\cdot(1+2+\ldots+n)+n\ .$$

Cum $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ şi $1+2+\ldots.+n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$, obținem:

$$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} + n = \frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}\ .$$

Metoda II:

Deoarece $1^2+2^2+...+(2n-1)^2+(2n)^2=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{3}$ şi $2^2+4^2+...+(2n)^2=4\cdot(1^2+2^2+....+n^2)=$ $=\frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+1)}{3}$, rezultă că: $1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{3}-\frac{2n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3}=\frac{n\cdot(2n+1)}{3}\cdot$ $\cdot(4n+1-2n-2)=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(2n-1)}{3}=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$.

2. Să demonstrăm că $8\cdot(a^4+b^4)\geq(a+b)^4$.

Demonstrație

Metoda I:

Deoarece $(a+b)^4=a^4+b^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3$, atunci $8\ (a^4+b^4)\geq\ a^4+b^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7a^4+7b^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3\geq\ 0\Leftrightarrow 3\cdot(a^2-b^2)^2+4\cdot(a^4+b^4-a^3b-ab^3)\geq$

$\geq 0\Leftrightarrow 3\cdot(a^2-b^2)^2+4\cdot(a-b)\cdot(a^3-b^3)\geq 0.$ (1)

Deoarece diferențele $(a-b)$ şi (a^3-b^3) au acelaşi semn, rezultă că $(a-b)\cdot(a^3-b^3)\geq 0$.

Prin urmare, membrul stâng al inegalității (1) este nenegativ, deci, inegalitatea (1) este adevărată, fiind adevărată şi inegalitatea inițială.

Egalitatea se obține numai dacă $a=b$.

Metoda II:

$$a^4+b^4=\frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2)^2+\frac{1}{2}\cdot(a^2-b^2)^2\geq\frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2)^2=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(a+b)^2+\frac{1}{2}\cdot(a-b)^2\right]^2\geq\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(a+b)^2\right]^2=\frac{(a+b)^4}{8},$$

de unde $8\cdot(a^4+b^4)\geq(a+b)^4$.

Metoda III:

Avem $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$, (2)

deoarece $a^2+b^2\geq 2ab.$

În mod analog $8\cdot(a^4+b^4)\geq\left[2(a^2+b^2)\right]^2$. (3)

Din (2) şi (3) rezultă că $8\cdot(a^4+b^4)\geq(a+b)^4$.

În ambele exemple s-a utilizat o strategie euristico-algoritmizată.

Când analizăm strategiile de rezolvare a problemelor ele nu sunt nici pur standardizate, nici pur euristice, doar uneori pot fi, cu precădere, euristice sau algoritmice, în funcție de natura situației problematice; sau „între limitele extreme ale algoritmicului şi euristicului se interpune o gamă largă de forme intermediare, mixte".

Strategiile de tip algoritmic au importanța lor în rezolvare: cunoscând anumite relații între necunoscută şi date în rezolvarea unei probleme, acest fapt ne scuteşte de descoperiri repetate.

În general, o strategie algoritmică reprezintă o înlănțuire secvențială finită de etape desfăşurate sistematic într-o ordine prestabilită, standard, care conduce în mod cert la rezolvarea unei probleme. Strategia algoritmică are o deosebită importanță la rezolvarea problemelor geometrice de optimizare care constă în următoarele:

1. Evidențierea mărimii de optimizare (adică mărimea pentru care urmează să calculăm cea mai mare sau cea mai mică valoare) pe care o notăm printr-o literă y (sau S, p, r, R etc., în dependență de enunțul problemei).

2. Una dintre mărimile necunoscute (latură, unghi etc.) o numim variabilă independentă şi o notăm prin x; stabilim limitele reale de variație ale lui x.

3. Pornind de la condițiile concrete ale problemei date, exprimăm y prin x şi prin datele cunoscute ale ei (etapa de rezolvare geometrică a problemei).

4. Pentru funcția obținută în etapa precedentă $y=f(x)$ găsim cea mai mică sau cea mai mare valoare (în dependență de condițiile problemei) pe domeniul de variație a lui x.

5. Interpretăm rezultatul din punctul 4 pentru problema geometrică dată. În primele trei etape compunem modelul matematic, adică modelul analitic al problemei geometrice date, care stă la baza algoritmului de rezolvare a problemei concrete.

Deseori succesul rezolvării depinde de alegerea chibzuită a variabilei independente. La etapa a patra modelul matematic compus, de cele mai multe ori, se cercetează cu ajutorul calculului diferențial, iar uneori prin metode elementare.

În procesul cercetării însăși problema geometrică, care a servit drept punct inițial pentru modelul matematic, nu ne interesează. Și numai când terminăm de rezolvat problema în cadrul modelului matematic alcătuit, rezultatul obținut îl interpretăm pentru problema geometrică inițială.

Exemple:

1. Să demonstrăm că din toate triunghiurile isoscele, înscrise într-un cerc dat, triunghiul echilateral are: a) cea mai mare arie; b) cel mai mare perimetru.

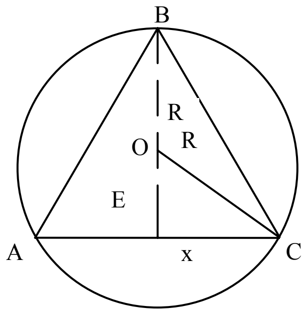

Fig.1

a) Mărimea de optimizare este aria S a triunghiului isoscel. Notăm $EC = x(\textit{figura } 1)$. Este evident că $O \le x \le R$. Exprimăm aria S a triunghiului ABC prin x și R. Avem: $OB = OC = R, EC = x, AB = BC, BE \perp AC.$ Din triunghiul dreptunghic OEC avem $OE^2 = R^2 - x^2 sau \quad OE = \sqrt{R^2 - x^2}.$ Obținem $BE = R + OE = R + \sqrt{R^2 - x^2}$; $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \left(\sqrt{R^2 - x^2} + R\right) = x\left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right).$

Calculăm: $S^I = \frac{R \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Punctele critice ale funcției S le vom găsi, rezolvând ecuația $S^I = 0$ sau ecuația $R\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2 =$ $= 0, R\sqrt{R^2 - x^2} - = 2x^2 - R^2.$ În domeniul $\frac{R}{\sqrt{2}} \le x \le R$ această ecuație este echivalentă cu ecuația $R^2\left(R^2 - x^2\right) = 4x^4 - 4R^2x^{21} + R^4, 4x^4 - 3R^2x^2 = 0, x^2\left(4x^2 - 3R^2\right) = 0,$ de unde $x_1 = 0, x_2 = -\frac{R\sqrt{3}}{2},$ $x_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$ Din aceste puncte critice numai $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ aparține $\left[\frac{R}{\sqrt{2}}, R\right].$

Calculăm valorile funcției S în punctele $\frac{R}{\sqrt{2}}, \ \frac{R\sqrt{3}}{2}, \ R$. Obținem: $S\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{R^2}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right);$ $S = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) =$ $= \frac{3\sqrt{3}R^2}{4};$ $S(R) = R^2$. Deoarece $\frac{3\sqrt{3}}{4} \rangle \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$, rezultă că cea mai mare valoare a funcției S este egală cu $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ pentru $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$

Prin urmare, $AC = 2x = R\sqrt{3}$. Din ΔBEC rezultă:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 = \left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 + x^2 = \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}}\right)^2 + \frac{3R^2}{4} = \left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \frac{3R^2}{4} = 3R^2.$$

Deci, $BC = R\sqrt{3};$ deoarece $AB = BC = R\sqrt{3}$, rezultă că acest triunghi este echilateral.

b) Mărimea de optimizare este perimetrul P al triunghiului ABC. Utilizăm aceleași notații ca și în punctul a). Obținem: $AC = 2x;$ $AB = BC = \sqrt{\left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 + x^2}.$ Deci, $P = 2x + 2\sqrt{\left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 + x^2} = 2x + 2\sqrt{2R^2 + 2R\sqrt{R^2 - x^2}}.$

Calculăm: $P^I = \frac{\sqrt{\left(R^2 - x^2\right) \ \left(2R^2 + 2R\sqrt{R^2 - x^2}\right)} - Rx}{\sqrt{\left(R^2 - x^2\right) \ \left(2R^2 + 2R\sqrt{R^2 - x^2}\right)}}.$

Punctele critice le vom afla, rezolvând ecuația $P^I = 0$ sau ecuația $\sqrt{\left(R^2 - x^2\right)\left(2R^2 + 2R\sqrt{R^2 - x^2}\right)} - Rx = 0$,

de unde obținem: $\left(R^2 - x^2\right)\left(2R^2 + 2R\sqrt{R^2 - x^2}\right) = R^2x^2$ sau $2\left(R^2 - x^2\right)\sqrt{R^2 - x^2} = 3Rx^2 - 2R^3$.

În domeniul $R\sqrt{\frac{2}{3}} \le x \le R,$ notăm $x^2 = t$ şi obținem ecuația $4\left(R^2 - t\right)^3 = 9R^2t^2 - 12R^4t + 4R^6$ sau $4t^3 = 3R^2t^2$, de unde $t = 0,\ t = \frac{3R^2}{4}$. Aşadar, avem $x = 0$ şi $x = \pm\frac{R\sqrt{3}}{2}$; din aceste puncte critice numai $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ aparține $\left[R\sqrt{\frac{2}{3}}; R\right]$. Calculăm valorile funcției P în punctele $R\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{R\sqrt{3}}{2}$ şi R. Obținem $P\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2R}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)$; $P\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = 3R\sqrt{3}; P(R) = 2R\left(\sqrt{2}+1\right)$. Dintre aceste numere cel mai mare este $3R\sqrt{3}$, care se obține pentru $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Astfel, $AC = 2x = R\sqrt{3}$; prin urmare $AC = 2x = R\sqrt{3};\ AB = BC = R\sqrt{3}$. Rezultă că triunghiul dat este echilateral.

2. Să calculăm înălțimea şi raza bazei unui cilindru circular drept cu cel mai mare volum înscris într-o sferă cu raza R.

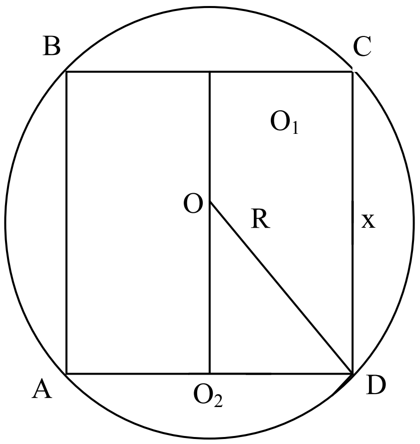

Fig.2

Mărimea de optimizare este volumul cilindrului V. Notăm $DC = x,$ $O \le x \le 2R.$ Exprimăm volumul V prin x şi R. Fie dată o sferă de raza R, iar centrul în punctul O şi în această sferă înscriem un cilindru înălțimea căruia este x. Atunci $V = \pi \cdot x \cdot \left(O_2D\right)^2$. Notăm prin O_1 şi O_2 respectiv centrele bazelor cilindrului. O_1O_2 este perpendicular pe planul bazei şi trece prin centrul sferei. Prin dreapta O_1O_2 ducem un plan care taie din sferă un cerc cu raza R cu centrul în punctul O, iar din cilindru un dreptunghi ABCD (figura 2). Obținem $DC = AB = x,\ OO_2 = \frac{x}{2};\ OD = R.$ Din ΔOO_2D avem $\left(O_2D\right)^2 = R^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}\left(4R^2 - x^2\right)$. Deci, $V = \pi \cdot x \cdot \frac{1}{4}\left(4R^2 - x^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(4R^2x - x^3\right)$.

Problema se reduce la aflarea valorilor lui x pentru care funcția $V = \frac{\pi}{4}\left(4R^2x - x^3\right)$ obține cea mai mare valoare pe $[0;\ 2R]$. Calculăm derivata $V^1 = \frac{\pi}{4}\left(4R^2 - 3x^2\right)$. Punctele critice sunt $x = -\frac{2R}{\sqrt{3}}$ şi $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, dintre care numai $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ aparține $(O;\ 2R)$. Calculăm valorile funcției V în punctele $O,\ \frac{2R}{\sqrt{3}},\ 2R$. Obținem $V(0) = 0;\ V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^2}{3\sqrt{3}}, V(2R) = 0.$

Deci, funcția ia cea mai mare valoare în punctul $x=\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Astfel, cel mai mare volum are cilindrul cu înălțimea $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ şi raza bazei $O_2D=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8R^2}{3}} = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Kepler Johann (27.XII.1571–15.XI.1630), astronom şi matematician german, a demonstrat că raportul dintre înălțimea acestui cilindru şi diametrul bazei lui este egal cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$, iar problema rezolvată îi poartă numele.

La rezolvarea problemelor 1 şi 2 căutarea soluției a început după modelul algoritmic, continuându-se după modelul euristic şi terminând printr-o strategie de tip algoritmic.

Prin metoda euristică înțelegem o cale specifică de rezolvare a problemelor nonstandard. Metodele şi procedeele pe care le utilizează elevii la rezolvarea problemelor cu caracter nonstandard, menite să conducă la invenție şi descoperire, se numesc euristice.

Procedeele euristice sunt mecanisme ale gândirii creatoare care sugerează idei eficiente în procesul rezolvării problemelor.

Exemplul 3

Să rezolvăm ecuația:

$x^2-2|x-a|+2|x-2|=0$.

Ecuația aceasta reprezintă o problemă nonstandardă, pe care elevii nu o pot rezolva prin utilizarea algoritmilor deja cunoscuți.

Să examinăm câteva cazuri:

1) $x<a<2$. În acest caz ecuația ia forma:

$$x^2-2a+4=0, \tag{4}$$

deoarece $|x-a|=a-x, |x-a|=2-x$, care nu are rădăcini, fiindcă $x^2=2(a-2)<0$ $(a<2)$.

2) $a\le x<2$. Ecuația ia forma:

$$x^2-4x+2(a+2)=0, \tag{5}$$

care are rădăcinile $x_{1,2}=2\pm\sqrt{-2a}$.

Este evident că x_1 şi x_2 vor fi numere reale numai atunci când $a\le 0$.

Expresia $2+\sqrt{-2a}\ge 2$, ceea ce contrazice condiția $x<2$. Astfel, dacă ecuația (5) are rădăcina reală, atunci aceasta este $2-\sqrt{-2a}$.

Pentru că $x=2-\sqrt{-2a}$ este necesar ca $2-\sqrt{-2a}\ge a$ sau $4-2a+a^2\ge 0$, $(a-2)^2\ge 0$ – inegalitate adevărată pentru orice a.

Deci, dacă $a\le 0$, $x=2-\sqrt{-2a}$.

3) $a<2\le x$. Ecuația ia forma:

$$x^2+2a-4=0, \tag{6}$$

de unde $x_{3,4}=\pm\sqrt{4-2a}$.

Deoarece $4-2a>0$, pentru $a<2$, atunci x_3 si x_4 sunt reale.

Însă $x\ge 2$, deci, ecuația (6) are rădăcina $x=\sqrt{4-2a}$, care trebuie să verifice relația $\sqrt{4-2a}\ge 2$, sau $4-2a\ge 4$, de unde $a\le 0$.

Prin urmare, ecuația (6) are rădăcina reală $x=\sqrt{4-2a}$ numai pentru $a\le 0$.

Rădăcina $x=-\sqrt{4-2a}$ este inadmisibilă, deoarece $x=-\sqrt{4-2a}<0$ şi nu verifică restricția $x\ge 2$.

4) $x<2<a$. Ecuația dată ia forma

$$x^2-2a+4=0, \tag{7}$$

de unde $x_{5,6}=\pm\sqrt{-4-2a}$, ambele reale, deoarece $a\ge 2$. Însă $x<2$ şi, pentru ca rădăcina pozitivă să verifice ecuația (7), este necesar ca $\sqrt{2a-4}<2$, sau $a<4$.

Deci, în acest caz $x=\pm\sqrt{2a-4}$, pentru $2\le a<4$ şi $x=-\sqrt{2a-4}$, pentru $a\ge 4$.

5) $2\le x<a$. Ecuația ia forma:

$$x^2+4x-2a-4=0, \tag{8}$$

de unde $x_{7,8}=-2\pm\sqrt{8+2a}$ ambele reale, deoarece $x>2$.

Însă $x=-2-\sqrt{8+2a}<0$ nu verifică restricția $x\ge 2$, deci, nu este rădăcina ecuației (8), iar $x=-2+\sqrt{8+2a}$ aparține intervalului $2\le x<a$, pentru $a\ge 4$.

6) $2\le a\le x$. Ecuația ia forma:

$$x^2=4-2a, \tag{9}$$

care are rădăcini reale numai pentru $a=2$, $x=0$ neacceptabilă, deoarece $x\ge 2$.

Deci, în acest caz ecuația (9) nu are rădăcini reale.

Răspuns: pentru $a\le 0$, $x=2-\sqrt{-2a}$, $x=\sqrt{4-2a}$;
pentru $0<a<2$, Ø;
pentru $2\le a<4$, $x=\pm\sqrt{2a-4}$;
pentru $a\ge 4$, $x=-\sqrt{2a-4}$, $x=-2+\sqrt{8+2a}$.

Exemplul 4

Să rezolvăm ecuația $\cos^4x+2\sin^4x=a$.

Din condițiile inițiale rezultă că pentru a≤0, ecuația dată nu are soluții. Ulterior vom considera a>0.

Deoarece $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, ecuația dată o scriem astfel:

$2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=a$, sau $3\cos^2 2x-2\cos 2x+3-4a=0$. (10)

Discriminantul trinomului din stânga ecuației (10) (în raport cu cos2x) D=48a-32. Dacă 48a-32<0, adică $a<\frac{2}{3}$. Ecuația (10) nu are soluții reale.

Fie $a\geq\frac{2}{3}$, atunci ecuația (10) are 2 rădăcini: $\cos 2x=\frac{1}{3}(1\pm 2\sqrt{3a-2})$, (11)

Ecuația (11) va avea soluții atunci şi numai atunci când $-1\leq\frac{1\pm 2\sqrt{3a-2}}{3}\leq 1$.

Inecuația $-1\leq\frac{1+2\sqrt{3a-2}}{3}\leq 1$ este verificată de $\frac{2}{3}\leq a\leq 1$, iar inecuația $-1\leq\frac{1-2\sqrt{3a-2}}{3}\leq 1$ de $\frac{2}{3}\leq a\leq 2$.

Prin urmare, pentru $\frac{2}{3}\leq a\leq 1$, ecuația (11) are rădăcinile $x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm 2\sqrt{3a-2}}{3}$, $k\in Z$, iar pentru $1<a\leq 2$, $x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-2\sqrt{3a-2}}{3}$, $k\in Z$.

Prezintă interes trei cazuri particulare:

1) Dacă $a=\frac{2}{3}$, atunci $\cos 2x=\frac{1}{3}$, de unde $x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}$, $k\in Z$.

2) Pentru a=1, cos2x=1; $\cos 2x=-\frac{1}{3}$, de unde x= kπ, k∈Z; $x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{3})$, k∈Z.

3) Pentru a=2, cos2x=-1; de unde $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, k∈Z.

Răspuns: pentru $\frac{2}{3}\leq a\leq 1$, $x=k\pi\pm\frac{1}{2}$ arc cos $\frac{1\pm 2\sqrt{3a-2}}{3}$;

pentru $1<a\leq 2$, $x=k\pi\pm\frac{1}{2}$ arc cos, $\frac{1-2\sqrt{3a-2}}{3}$, $k\in Z$;

pentru a $\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty),\varnothing$.

Conversația euristică ca metodă determină elevii să utilizeze prin efort personal informațiile existente deja în mintea lor, punând în acțiune procesele psihicele afectiv-motivațional-volitive ale elevului.

Exemplul 5. Să demonstrăm că în ΔABC cu laturile a, b, c, $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

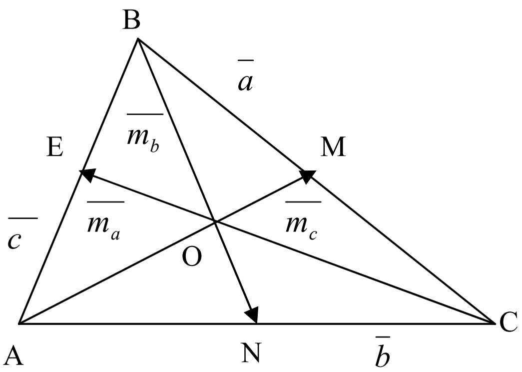

Fig.3

Profesorul: experimentați vectorii $\overline{m_a}$, $\overline{m_b}$ şi $\overline{m_c}$ prin vectorii $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ (figura 3).

Elevul: din $\Delta ABM:\overline{m_a}=\overline{c}+\frac{1}{2}\overline{a}$; din $\Delta BCN:\overline{m_b}=\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}$; din $\Delta CAE:\overline{m_c}=\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}$.

Profesorul: calculați pătratele scalare ale vectorilor $\overline{m_a},\overline{m_b}$ şi $\overline{m_c}$.

Elevul:

$\overline{m_a^2}=\overline{c^2}+\frac{1}{4}\overline{a^2}+\overline{c}\cdot\overline{a};\overline{m_b^2}=\overline{a^2}+\frac{1}{4}\cdot\overline{b^2}+\overline{a}\cdot\overline{b};\overline{m_c^2}=\overline{b^2}+\frac{1}{4}\overline{c^2}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.

Profesorul: calculați $\overline{m_a^2}+\overline{m_b^2}+\overline{m_c^2}$.

Elevul: $\overline{m_a^2}+\overline{m_b^2}+\overline{m_c^2}=\left(\overline{a^2}+\overline{b^2}+\overline{c^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\overline{a^2}+\overline{b^2}+\overline{c^2}\right)+\left(\overline{c}\cdot\overline{a}+\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{c}\right)$.

Profesorul: din figura 3 determinați relația dintre vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$.

Elevul: $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$.

Profesorul: calculați pătratul scalar $\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)^2$.

Elevul: $\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)^2=\overline{a^2}+\overline{b^2}+\overline{c^2}+2\left(\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}\right)$.

Profesorul: cu ce este egal $\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)^2$?

Elevul: $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})^2=0$. Deci, $\left(\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2\right)+2\left(\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}\right)=0$.

De aici $\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}=-\frac{1}{2}\left(\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2\right)$.

Elevul: astfel $\overline{m_a^2}+\overline{m_b^2}+\overline{m_c^2}=\frac{5}{4}\left(\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2\right)=\frac{3}{4}\left(\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2\right)$.

Profesorul: ce proprietate posedă pătratul scalar al unui vector?

Elevul: $\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2$.

Profesorul: treceți egalitatea $\overline{m_a^2}+\overline{m_b^2}+\overline{m_c^2}=\frac{3}{4}\left(\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2\right)$ din limbajul vectorial în limbajul geometric.

Elevul: $\left|\overline{m_a}\right|^2+\left|\overline{m_b}\right|^2+\left|\overline{m_c}\right|^2=\frac{3}{4}\left(\left|\overline{a}\right|^2+\left|\overline{b}\right|^2+\left|\overline{c}\right|^2\right)$.

Astfel am obținut:

$$AM^2+BN^2+CE^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Aşadar, rezolvarea problemelor este un proces superior de învățare a matematicii.

Bibliografie:

1. Cîrjan Florin. Didactica matematicii. - Bucureşti: Corint, 2008.
2. Brînzei D., Brînzei R. Metodica predării matematicii. - Piteşti: Educația paralelă 45, 2000.
3. Cerghit Ioan. Metode de învățământ. - Iaşi: Polirom, 2006.
4. Lupu Ilie. Metodica predării matematicii. Editura Lyceum, 1996.
5. Lupu Ilie. Probleme de optimizare. Editura Lyceum, 1993.
6. Lupu Ilie. Metodologia rezolvării problemelor de demonstrație la matematică. Ed. Prut Internațional, 2007.

Prezentat la 23.11.2009