STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2009, nr.9(29)

FORMAREA APTITUDINILOR MATEMATICE LA ELEVII SUPRADOTAȚI

Marcel TELEUCĂ

Universitatea de Stat din Tiraspol

The primary aim of this article is to mark out the factors which form the children's mathematical abilities, to accentuate and to explain the physical capabilities of the students, which in the same conditions of load and educative opportunities, give different results in the mathematical activities.

Ca în toate domeniile de activitate umană şi în matematică abilitățile matematice la început cresc cu vârsta, apoi se atinge un maxim, după care urmează o lungă descreştere a acestor abilități, care tind oarecum asimptotic la zero.

Sarcina primordială constă în faptul de a reliefa factorii care structurează aptitudinea matematică la elevi, a evidenția şi a explica însuşirile psihice ale elevilor care, în condiții egale de efort şi oportunități educative, conduc la rezultate diferite în activitățile cu conținut matematic. Pornim de la ideea că aptitudinea matematică reprezintă o dimensiune specifică a personalității, o substructură relativ independentă, formată din componente cognitive, afectiv-motivaționale şi atitudinale, elaborată în ontogeneză prin adaptări succesive ale copilului la modelele matematice oferite de societate şi care pe măsura constituirii facilitează obținerea unor performanțe superioare de către elevii de aceeaşi vârstă şi nivel de pregătire şcolară.

Primele încercări de abordare asociază aptitudinea matematică cu abilități ale intelectului (E.L. Thorndike, A.Binet, A.P. Lazurski), cu calități ale gândirii (R.Gullasch, G.Pippig, N.A. Mencinskaia, M.I. Moro) sau cu factori primari, mai mult sau mai puțin specifici (L.L. Thurstone, J.P. Guilford, M.Bejat şi A.Perju).

H.Poincaré pune creația matematică pe seama activității subconştiente, a sentimentului estetic. Pentru reprezentanții teoriei interiorizării operațiilor mintale, structura aptitudinilor matematice va depinde de natura şi calitatea acțiunilor cu obiecte materiale sau materializate, de metodele şi procedeele folosite în învățarea matematicii (P.I. Galperin, V.V. Davâdov, K.Lowell, Z.P. Dienes, B.Zörgő ş.a.).

V.A. Krutețki, abordând problema din perspectiva teoriei sistemelor, reliefează câțiva factori cu rol esențial în configurarea aptitudinilor matematice la elevi. Primul dintre aceştia este capacitatea de percepere formalizată, de înțelegere imediată a condițiilor, structurii de ansamblu şi relațiilor esențiale dintre datele problemei. Urmează apoi seria de factori implicați în prelucrarea informației matematice: capacitatea de generalizare rapidă şi largă a datelor, capacitatea de contragere sau prescurtare a raționamentelor, flexibilitatea proceselor gândirii, străduința spre claritate, simplitate şi economicitate. Ultimul factor important se manifestă în procesul de păstrare a informației matematice şi constă în reținerea esențialului (scheme, structuri, principii etc.) şi „uitarea" datelor concrete, a informațiilor de prisos din problema dată [2].

Factorul numit *experiență logico-matematică* este acumulat treptat în diverse activități anterioare (joc, comunicare, învățare şcolară şi extraşcolară), acest tip de experiență jucând un rol important în formularea şi rezolvarea de probleme cu conținut matematic.

Datele obținute confirmă pe deplin relația dintre nivelul dezvoltării aptitudinale şi experiența logico-matematică. Elevii cu aptitudini matematice dezvoltate prezintă, comparativ cu ceilalți, o superioritate evidentă nu numai la probele de cunoştințe matematice, ci şi la cele cu conținut mixt (matematic şi nematematic). Diferențele dintre grupele comparate se amplifică după fiecare fază de ajutor extern, ceea ce semnifică existența unor raporturi de susținere între aptitudinea matematică şi experiența logico-matematică a subiecților noştri.

La solicitarea de a indica 2-3 discipline de studiu preferate, majoritatea elevilor cu aptitudini matematice superior dezvoltate notează „matematica", „matematica şi fizica" sau „matematica şi informatica" şi foarte puțini dintre ei menționează alte discipline. În cazul elevilor cu aptitudini matematice slab dezvoltate, situația apare ca fiind mult mai diversificată. Dintre aceştia din urmă, puțini menționează matematica şi încă mai puțini – fizica.

În concluzie putem afirma:

a) Aptitudinile matematice sunt rezultate ale dezvoltării şi ale interacţiunilor complexe dintre individ, privit ca deținător şi valorificator al unor potențialități ereditare, pe de o parte, şi condițiile sale de mediu sociocultural şi educaţional, pe de altă parte.
b) Ca substructură relativ stabilă şi, totodată, dinamică a personalității, aptitudinea matematică se bazează pe toate procesele şi însuşirile psihice (cognitive, afectiv-motivaţionale şi atitudinale) solicitate de activitățile cu conținut matematic.
c) Aptitudinile matematice nu pot fi cu adevărat cunoscute şi eficient valorificate fără a reliefa caracteristicile pe care acestea le prezintă în evoluția lor la copil. „Sarcina psihologiei nu constă în a descoperi eternul infantil, ci istoricul infantil sau, folosind expresia poetică a lui Goethe, am putea spune efemerul infantil" [5].
d) Din nou reamintim că metodele de cunoaştere a aptitudinilor matematice, respectiv, de identificare a copiilor superior dotați în acest domeniu, sunt testele de aptitudini şi cunoştinţe (aplicate colectiv), probele de diagnostic formativ (aplicate individual) şi analiza notelor şcolare şi fişele de observaţie.

Performanța joacă un rol important în dinamica motivațională. Ea este şi o consecinţă a motivației, deoarece cu cât un elev este mai motivat, cu atât performanța sa va fi mai bună. Un elev motivat va persevera mai mult, va utiliza strategii de învățare adecvate, care îi vor influența performanța.

Relația dintre motivație şi performanţă nu trebuie privită unilateral, căci şi performanța poate influența motivația. Performanța, ca rezultat concret al activității de învățare, devine pentru elev o sursă de informaţie care influențează percepțiile acestuia asupra propriei competențe.

Performanța nu reprezintă doar o simplă demonstrație a ceea ce a învățat elevul, ci este şi un eveniment prin care el se judecă, se evaluează, se valorizează ca persoană [6].

Performanțele, expertiza, excelența în oricare domeniu al cunoaşterii şi practicii sociale nu pot fi abordate şi gestionate fără a face ample şi repetate incursiuni în sfera motivației şi afectivității. Facem referire la procesul de structurare a aptitudinii matematice şi notăm că aceasta depinde în primul rând de nivelul de dezvoltare a funcțiilor mentale (de analiză şi sinteză, generalizare şi abstractizare, de memorare etc.) ale copilului, dar şi de felul contactului cu matematica, de metodele de învățare şi „de factori motivaţionali ca interesul, aspirațiile, perseverenţa subiectului, precum şi de satisfacțiile pe care acesta le găseşte în preocupările matematice" [4].

Sintagma *atracție pentru problematic* desemnează componentele motivelor care ne-au determinat să facem o alegere precum: a) în sfera noțiunii de *atracție* intră, în mai mare măsură decât în cazul celor de *preferință*, *tendință*, *interes* sau *pasiune,* acele elemente care au devenit cu adevărat mobiluri interne ale conduitei, care se formează şi se dezvoltă pe baza curiozității epistemice fireşti a copilului; b) aici nu se includ motivele conjuncturale, temporale ale învățării matematice, aşa cum ar fi lauda, pedeapsa, recompensa, interesul de circumstanță sau chiar respectul pentru calitățile pedagogului, adică acele elemente motivaţionale care nu țin de însăşi natura ştiinţei matematice; c) expresia îmbină în sine atât valenţele motivaţionale, cât şi afective; d) ca orice sentiment pozitiv complex prezintă atât o valoare cognitivă, cât şi una conativă; e) termenul *atracție* exprimă cât se poate de profund sensul obiectual şi operaţional al activității matematice. Expresia dată a mai fost folosită şi de alți autori, care consideră atracţia pentru problematic drept calitate evidentă în activitatea matematică, îndeosebi în rezolvarea problemelor cu multe şi interesante implicaţii ascunse.

Calea cea mai potrivită de stimulare şi susţinere a atracţiei pentru problematic o reprezintă *solicitările cu caracter ludic şi situațiile generatoare de disonanță cognitivă*. Cercetările efectuate de Z.P. Dienes (1973), Aubrey (1993), Rus (1996) ş.a. demonstrează în mod ferm efectul pozitiv al jocurilor cu conținut matematic. În funcție de nivelul pregătirii anterioare, de interesele şi preferinţele elevilor, de contextul în care se desfăşoară activitatea, profesorul poate recurge la jocuri de genul: *ordonarea* unui set de date (numere, figuri) după cât mai multe criterii; *găsirea regulilor de organizare* a unor serii de numere sau figuri; *formularea de probleme* cât mai diferite, utilizând unul şi acelaşi set de date; *transformări ale figurilor* (din bidimensionale în tridimensionale şi invers); „*ghicirea*" numerelor sau figurilor ascunse; diverse *jocuri matematice şi logice* existente în dotarea cabinetului de matematică al şcolii; găsirea de *metode alternative de rezolvare* pentru una şi aceeaşi problemă; elaborarea şi utilizarea de *modele matematice* etc.

Un exemplu elocvent al celor menționate anterior serveşte un set de probleme.

Problema 1

Avem 12 monede. Una este falsă şi în acelaşi timp mai uşoară decât cele adevărate. Cu ajutorul unei balanțe prin trei cântăriri trebuie găsită moneda falsă.

Pentru elevii cu aptitudini matematice deosebite această problemă este destul de uşoară, de aceea apare interesul de a găsi mai multe soluții şi de a vedea că trei cântăriri este numărul minim de cântăriri sau pot fi şi mai puține.

În continuare vom propune toate soluțiile elevilor.

Soluția 1

Împărțim aceste 12 monede în două părți a câte şase monede pe câte un talger. Evident că pe un talger va fi moneda falsă şi respectiv talgerul dat va fi mai uşor. Luăm aceste şase monede care se află pe talgerul mai uşor şi le împărțim iarăşi în două şi le plasăm din nou pe talgere, astfel aceasta va fi a doua cântărire. Asemănător primei cântăriri, pe unul din talgere va fi moneda falsă. Din cele trei monede rămase pe talgerul mai uşor, luăm oricare două şi le punem pe talgere. Care talger va fi mai uşor, înseamnă că acolo se află moneda falsă, iar dacă observăm egalitate, atunci moneda falsă este cea de a treia, rămasă.

Soluția 2

Împărțim aceste 12 monede în trei părți a câte patru monede. Pe două talgere ale balanței plasăm câte patru monede, în cazul în care nu se observă egalitate, atunci evident că moneda falsă este una dintre cele 4 monede de pe talgerul mai uşor, de aceea le împărțim în câte două părți egale şi le plasăm pe talger, aceasta fiind cântărirea a doua. Acum facem următorul pas: cele două monede rămase pe talgerul mai uşor le plasăm iarăşi pe talgere diferite şi efectuăm a treia cântărire, pe talgerul mai uşor, va fi moneda falsă.

Revenim la cazul când la prima cântărire avem greutăți egale, atunci moneda falsă va fi printre cele patru monede neîntrebuințate. Le împărțim câte două şi le plasăm pe talgere, astfel efectuăm cântărirea a doua. Evident, egalitate în cazul dat nu poate exista. Unul dintre cele două talgere va fi mai uşor decât celălalt. Atunci luăm monedele de pe talgerul mai uşor şi le plasăm câte una pe talger, aceasta va fi cântărirea a treia, ce va indica care este moneda falsă mai uşoară.

Soluția 3

Împărțim cele 12 monede în patru părți a câte trei monede fiecare. La prima cântărire luăm câte trei monede din prima parte şi din a doua şi le plasăm pe talgere. Dacă nu observăm egalitate, atunci moneda falsă se află printre cele 3 monede de pe talgerul mai uşor. Aşadar, luăm două monede de pe talgerul mai uşor, le punem pe talgere diferite şi ca urmare vom observa că dacă nu este egalitate, atunci pe talgerul cu moneda mai uşoară va fi cea falsă. Iar în cazul în care se dovedeşte a fi egalitate, atunci a treia monedă pe care nu am luat-o de pe talgerul mai uşor de la cântărirea a doua va fi moneda falsă.

Dacă la prima cântărire s-a observat egalitate, atunci a doua cântărire se va considera când vom plasa trei monede din grupa a treia pe un talger şi din grupa a patra pe un alt talger. Egalitate aici nu mai poate exista!

De pe talgerul mai uşor luăm două monede şi le plasăm pe talgere diferite şi aceasta va fi cântărirea a treia. Dacă nu observăm egalitate, atunci pe talgerul mai uşor este moneda falsă. Iar în cazul egalității, moneda a treia de pe talgerul mai uşor de la cântărirea a doua este moneda falsă.

Aşadar, am prezentat soluțiile propuse de către elevi.

Aceşti elevi au încercat să facă şi o generalizare a problemei, propunând o problemă de cercetare, şi anume:

Dacă noi avem n monede şi una este falsă şi mai uşoară, care este numărul minim de cântăriri cu ajutorul balanței pentru a găsi moneda falsă.

Elevii au observat din soluțiile propuse că nu pentru 12 monede numărul cel mai mic posibil de cântăriri este trei.

Acuma vom modifica problema nr.1 rezolvată mai sus.

Problema 2

Avem 12 monede. Una este falsă şi se deosebeşte după greutate de cea adevărată, dar nu se ştie este mai uşoară sau mai grea. Cu ajutorul unei balanțe prin trei cântăriri trebuie găsită moneda falsă.

La început elevii au impresia că problema dată nu diferă cu nimic de problema precedentă, nr.1, dar efectuând prima cântărire ca şi în soluțiile 1 şi 3, se observă că aceste probe nu conduc la nici o soluție. Atunci ei înțeleg că această problemă este cu mult mai dificilă, dar ideile soluției au fost deja menționate în soluțiile de mai sus. Împreună cu elevii încercăm să găsim soluția corectă.

Soluție:

Împărțim aceste 12 monede ca în soluția nr.2 a problemei precedente, şi anume, în trei grupe a câte patru monede fiecare. La prima cântărire plasăm 4 monede pe un talger şi 4 pe altul. Dacă are loc egalitatea, atunci toate aceste opt monede folosite sunt adevărate, iar moneda falsă este printre cele patru monede rămase. Luăm trei monede din cele rămase şi le plasăm pe un talger. Iar pe un alt talger plasăm trei monede din cele adevărate, aceasta va fi cântărirea a doua. Dacă se observă egalitate, atunci moneda falsă este a patra, cea rămasă din cele patru şi din ultima cântărire putem afla dacă ea este mai uşoară sau mai grea. Daca nu are loc egalitate la cântărirea a doua, atunci moneda falsă este printre cele trei monede din grupa a treia. Noi vom observa din cântărirea a doua dacă moneda falsă este mai uşoară sau mai grea, în dependență de ce arată talgerele, atunci la a treia cântărire aflăm moneda falsă.

Dacă la prima cântărire nu are loc egalitatea, atunci împărțim monedele de pe talgerul mai uşor în trei categorii şi le vom numi monede „false uşoare", iar de pe talgerul mai greu le vom numi monede „false grele", cele rămase vor fi monede adevărate. La cântărirea a doua, pe un talger vom plasa două monede „false grele" şi două monede „false uşoare", iar pe talgerul al doilea vom plasa o monedă „falsă grea" şi trei monede adevărate.

Dacă are loc egalitatea, atunci moneda falsă va fi sau printre cele două „false uşoare rămase" sau cea „falsă grea" rămasă. Atunci ultima cântărire o vom efectua astfel: plasăm pe un talger o monedă „falsă uşoară" şi pe celălalt la fel o monedă „falsă uşoară". Dacă are loc egalitatea, atunci moneda falsă va fi cea „falsă grea", iar dacă nu are loc egalitatea, atunci moneda falsă va fi mai uşoară şi se află pe talgerul mai uşor.

Dacă nu are loc egalitate la cântărirea a doua, atunci sunt posibile două cazuri.

Cazul 1: dacă talgerul cu două monede „false grele" şi două monede „false uşoare" este mai greu, atunci moneda falsă se află printre cele două monede „false grele" şi este mai grea. La cântărirea a treia plasăm câte o monedă „falsă grea" pe câte un talger; pe talgerul mai greu se află moneda falsă.

Cazul 2: dacă talgerul cu o monedă „falsă grea" şi trei monede adevărate este mai greu, atunci la cântărirea a treia luăm cele două monede „false uşoare" de pe talgerul mai uşor. Dacă are loc egalitatea, atunci moneda falsă este moneda falsă grea de pe talgerul mai greu. Dacă nu are loc egalitatea, atunci moneda de pe talgerul mai greu este cea falsă, fiind mai grea decât cea adevărată.

Soluția este dificilă pentru elevi, dar şi interesantă.

Dar şi mai intrigantă este problema propusă elevilor la una dintre olimpiadele din Moscova.

<u>Problema 3</u>

Avem 13 monede. Una este falsă şi se deosebeşte după greutate de cea adevărată, dar nu se ştie este mai uşoară sau mai grea. Cu ajutorul unei balanțe prin trei cântăriri trebuie de găsit moneda falsă.

La elevi a apărut interesul de a vedea deosebirea dintre soluția problemei date şi problema nr.2. Ei au observat că soluția la problema nr.3 este aceeaşi, unica deosebire constând în faptul că noi putem găsi moneda falsă, dar nu întotodeauna putem spune dacă această monedă falsă este mai grea sau mai uşoară.

În final am pus în discuție o problemă de cercetare.

Avem *n* monede. Una este falsă şi se deosebeşte după greutate de cea adevărată, dar nu se ştie, este mai uşoară sau mai grea. Care este numărul minimal de cântăriri cu ajutorul balanței pentru a găsi moneda falsă?

Soluțiile propuse pentru tratarea copiilor superior dotați şi talentați variază de la o țară la alta sau chiar de la o localitate la alta. Dintre acestea menționăm: şcoli şi clase speciale, grupe de dotați în cadrul claselor obişnuite, activități şcolare complementare, programe suplimentare etc.

Proiectele şi programele pentru supradotați variază în funcție de scopul şi obiectivele urmărite, dar şi de concepția şi experiența autorilor lor. Mai frecvent întâlnite şi mai bine cunoscute sunt cele denumite „de accelerare a pregătirii", „de îmbogățire a cunoştințelor", „de dezvoltare a creativității" ş.a.

Programele de îmbogățire oferă elevilor superior dotați şi talentați posibilitatea de a aprofunda, a obține informații suplimentare şi de a-şi forma deprinderi şi priceperi temeinice în domenii şi direcții de acțiune preferate. În funcție de gradul şi tipul de dotare, precum şi în raport cu interesele personale, elevii sunt sprijiniți material şi moral în vederea frecventării cercurilor şi cluburilor ştiințifice, participării la excursii documentare, campusuri de vacanță, concursuri locale sau naționale etc. Totodată, ei sunt îndrumați să studieze individual, să efectueze activități de cercetare–investigare, documentare, cursuri facultative, schimb de experiență etc.

Problema care se pune în cazul folosirii programelor de îmbogățire se referă la asigurarea echilibrului normal între solicitări şi posibilități, la prevenirea supraîncărcării şi surmenajului. Evident, soluțiile adoptate dobândesc de fiecare dată un caracter individual. Elevul trebuie ajutat să înțeleagă semnificația legii optimumului motivațional, să „intuiască” de fiecare dată punctul sau zona până la care efortul şi performanțele sale se susțin reciproc. Cu alte cuvinte, asistența psihopedagogică a copiilor superior dotați şi talentați va însemna îndemn, sprijin şi încurajare, dar şi reținere, limitare şi ponderare în activitățile de învățare şcolară şi extraşcolară.

Programul MEPS (Model de îmbogățire psihopedagogică şi socială), de exemplu, propus şi aplicat de Alonso şi Benito, cuprinde două elemente de bază: unul organizatoric, care presupune planificarea, consilierea fiecărui elev, dezvoltarea intereselor şi precizarea metodologiei şi a modalităților de evaluare a programelor, şi altul, implementațional, care vizează dezvoltarea abilităților sociale şi relaționale, domeniul afectiv, dezvoltarea creativității şi abilității de studiu independent, analiza modului de procesare a informației ş.a. În cadrul MEPS se realizează diverse subprograme, unele pentru profesori, iar altele pentru elevi. Din ultima categorie menționam: programe individuale şi de grup aplicate în afara programului şcolar, programe pe timpul verii, programe pentru părinți şi programe privind schimburi de experiență şi întâlnirile internaționale multilaterale.

K. Lowell, pe baza ideilor exprimate de J. Piaget cu privire la formarea operațiilor mintale, preconizează un sistem didactico-metodic în care formele de activitate urmează o linie progresivă, de la concret la abstract, de la evidență la implicație. Conform acestui sistem, numerele şi numerația devin accesibile prin acțiuni cu obiecte concrete supuse unor operații de grupare, ordonare, schimbare a poziției, comparare, simbolizare etc. Operațiile şi judecățile matematice pot fi învățate chiar şi la vârsta de 5-7 ani, pe baza acțiunilor de clasificare după criterii multiple, de intersecție a seturilor de obiecte, de adunare şi separare a lor, de formare a unor grupuri mari din mai multe seturi mici egale etc. Esențial este ca matematica să devină pentru copil un instrument cu care explorează lumea şi nu un joc de reguli abstract [3].

Îmbogățirea şi aprofundarea cunoştințelor conduc la dezvoltarea şi transformarea calitativă a schemelor de cunoaştere şi acțiune, iar acestea la rândul lor, reglează cantitatea şi calitatea achizițiilor elevilor. Efectul învățării devine maxim atunci când între cei doi termeni ai relației se stabileşte un echilibru optim, ceea ce se poate realiza prin modul de organizare a activității de învățare şi prin folosirea unor programe complementare, care să conducă la stimularea motivației sau chiar a atracției pentru problematic, la dezvoltarea gândirii, imaginației şi creativității, la autorealizare personală şi profesională. Din perspectiva unui asemenea obiectiv, multe dintre temele prevăzute în actualele programe şcolare pot fi abordate cu ajutorul unor probleme neuzuale sau al unor situații-test, centrate pe una sau alta dintre componentele aptitudinilor matematice [1].

Ideile şi datele expuse vor reprezenta în viitorul apropiat un punct de sprijin pentru persoanele interesate în elaborarea şi implementarea de programe speciale, menite să conducă la îmbogățirea cunoştințelor şi, implicit, la dezvoltarea aptitudinilor matematice ale copiilor şi tinerilor supradotați, şi nu ultimul rând în condițiile unui învățământ centrat pe nevoi şi posibilități specifice ale fiecărui participant.

Referințe:

1. Berar I. Aptitudinea matematică la şcolari. - Bucureşti: Editura Academiei Române, 1991.
2. Krutețki V.A. Psihologhiia matematiceskih sposobnostei şkolnikov. - Moskva: Izd. Prosveşcenie, 1968.
3. Lowell K. The Growth of Understanding in Mathematics. - London: Early Childhood Education Series, 1971.
4. Roşca Al., Zörgö B. Aptitudinile. - Bucureşti: Editura Ştiințifică, 1972.
5. Vâgotski L.S. Opere psihologice alese. Vol. I-II. - Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 1971.
6. Sălăvăstru D. Psihologia educației. - Iaşi: Polirom, 2004.

Prezentat la 27.11.2009