STUDIA UNIVERSITATIS
Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2010, nr.9(39)

CONSIDERENTE METODICE PRIVIND EXPUNEREA PROCESULUI DE MODELARE

Liubomir CHIRIAC, Lilia MIHĂLACHE
Universitatea de Stat din Tiraspol

The methodical issues of treating the modeling process in the lyceum course of computer science are analysed. Some didactic solutions regarding the examined subjects are proposed.

Expunerea procesului de modelare rămâne a fi o problemă majoră pentru şcoală şi instituțiile superioare de învățământ atât din punct de vedere metodic, cât şi ştiințific. În acest scop, intenționăm să elucidăm unele momente care țin de aspectul metodic al procesului respectiv.

1. Noțiuni generale

În prezent se cunosc mai multe definiții ale informaticii, însă noi vom evidenția definiția care, în opinia noastră, este destul de reprezentativă şi funcțională. În acest sens, informatica se defineşte ca unitate a trei componente: **Informatica = Hardware + Software + Brainware.**

Să analizăm definiția expusă. **Hardware** reprezintă mijloacele tehnice, posibilitățile din punct de vedere tehnic necesare pentru realizarea scopului formulat. **Software** reprezintă softul, programele, mijloacele care permit prelucrarea datelor inițiale şi bazelor de date în dependență de obiectivele propuse. **Brainware** reprezintă componenta intelectuală, dar nu numai algoritmii de prelucrare a bazelor de date, ci şi cunoştințele speciale şi generale care sunt „implantate” atât în mijloacele tehnice, cât şi programele elaborate. Datorită acestei componente, informatica nu se reduce la însuşirea dispozitivelor calculatorului şi programării. Deseori se menționează, în acest sens, că a treia componentă a informaticii este modelarea. Ce se înțelege prin modelare?

Modelul este sistemul care nu se deosebeşte de obiectul real, fenomenul examinat, privind unele proprietăți, considerate esențiale şi se deosebesc după alte proprietăți, considerate neesențiale. În acelaşi timp, lipsa în modelul construit a elementelor neesențiale nu este mai puțin importantă decât prezența elementelor esențiale [6, p.8]. Procesul de elaborare şi aplicare a modelului construit se numeşte **modelare**.

2. Tendințe referitor la predarea modelării în cursurile liceale

În opinia noastră, în procesul de predare a cursurilor liceale, se sesizează cinci direcții legate de procesul de modelare:

√ **Prima direcție** se referă la construcția modelelor după caracteristicile generale ale obiectului de modelare. În acestă categorie putem include:

a) ***modele de comportament***. *Exemple*: graficul unei funcții, program pe calculator, creşterea populației;
b) ***modele de structură***. *Exemple*: structura calculatorului, structura frunzei, structura scheletului uman.

√ **A doua direcție** ține de construcția modelelor după sfera de activitate a subiectului modelării. În categoria respectivă sunt incluse:

a) ***modele aplicate direct în activitatea practică***. *Exemple*: calcularea ariei, volumului diferitelor figuri geometrice;
b) ***modele de instruire***. *Exemple*: harta geografică, programe demonstrative, diverse aparate şi utilaje fizice sau chimice.

√ **A treia direcție** se referă la elaborarea modelelor după rolul pe care îl au în dirijarea obiectului de modelare. Astfel, avem următoarele modele:

a) ***modele de optimizare***. *Exemple*: algoritmul pentru repartizarea optimală a resurselor, optimizarea devizului de cheltuieli;
b) ***modele de simulare***. *Exemple*: simularea fulgerului la lecțiile de fizică, simularea unui proces economic;
c) ***modele de prognozare***. *Exemple:* clasificarea diverselor semne ale naturii privind prognozarea temperaturii, presiunii; semne naturale vizavi de evoluția anotimpurilor;
d) ***modele-etalon***. *Exemple*: etalonul kilogramului, etalonul metrului.

√ **A patra direcție** se axează pe factorul de timp. Din acest punct de vedere deosebim:

a) ***modele statice***. *Exemple*: fotografia unui elev, programul de activitate pentru o săptămână, formula pentru calcularea ariei triunghiului;

b) ***modele dinamice determinate***. *Exemple*: algoritmul lui Euclid, algoritmul de soluționare a ecuației pătrate;

c) ***modele dinamice probabilistice***. *Exemplu*: evoluția unei populații de brotăcei.

√ **A cincea direcție** ține de elaborarea modelelor după componentele principale ale obiectului de modelare. În acest sens deosebim:

a) ***modele informaționale***. *Exemple*: formule matematice, ecuații chimice, programul de televiziune, schema logică a algoritmului;

b) ***modele ideale (abstracte)***. *Exemple*: examinarea gazului ideal în fizică, simbolul infinitului în matematică;

c) ***modele mininaturale (reale)***. *Exemple*: macheta unei clădiri, unui avion, vapor.

Menționăm că diferite modele pot fi ilustrate prin unele şi aceleaşi exemple. Astfel, graficul unei funcții este model: informațional, de comportament, de instruire şi dinamic determinat. Algoritmul lui Euclid este model: informațional, de comportament, de instruire, dinamic determinat şi aplicat direct în activitatea practică.

Unele chestiuni interesante privind clasificarea modelelor sunt expuse în [7].

În toate cazurile menționate, elaborând modelele respective, sunt cultivate abilități şi sunt atinse performanțe care țin de înțelegerea procesului de modelare, formarea erudiției computaționale şi creşterea culturii algoritmice.

În continuare, ne vom referi la modelele informaționale.

Modelele informaționale reprezintă informația despre obiectul cercetat, descrisă într-o anumită formă, ce reflectă proprietățile esențiale ale acestuia.

Vom considera modelele informaționale ale căror obiect examinat este descris cu ajutorul simbolurilor matematice. Acest tip de modele se mai numesc **modele matematice**. Atare modele se întâlnesc la modelarea proceselor studiate la diferite discipline: matematică, fizică, biologie, geografie etc. Modelele de lucru se reduc la construirea prin intermediul aparatului matematic cunoscut a unei asemănări simplificate abstracte a sistemului ori a procesului cercetat. Astfel, se evidențiază câtiva parametri şi, schimbând valoarea lor, în funcție de scopul propus, se studiază comportarea sistemului respectiv. Succint, construcția modelului matematic, presupune realizarea următoarelor etape fundamentale:

1. Se formulează exact întrebările la care modelul trebuie să dea răspuns. Se identifică componentele principale şi se determină relațiile dintre ele. În cazul când nu se stabileşte legătura, dependența funcțională între componentele evidențiate, este imposibilă construirea modelului adecvat.

2. În etapa a doua, utilizând aparatul matematic cunoscut, se descrie procesul studiat. Relațiile dintre componentele fundamentale, stabilite anterior, sunt „expuse" într-o formă matematică exactă. Astfel, modelul construit reprezintă o expresie, o relație matematică strictă a ipotezei formulate anterior.

3. În ultima etapă se verifică modelul construit, confruntându-se rezultatele obținute cu realitatea prin schimbarea valorii unor parametri. La o diferență substanțială a rezultatelor, modelul respectiv se perfecționează sau se respinge. Prin intermediul calculatoarelor se verifică foarte eficient corectitudinea modelului obținut. Schimbând datele inițiale, pot fi controlate, verificate diferite variante care se referă la simplificarea ori complicarea structurii modelului cercetat.

Unele aspecte metodice privind predarea modelării au fost examinate în [1-5].

3. Elaborarea modelelor matematice

Prin **model matematic** vom înțelege sistemul de relații matematice care descriu proprietățile esențiale ale fenomenului ori procesului studiat. Unele idei în acest sens au fost analizate în [3-5]. Pentru construcția modelelor matematice adecvate, care ar reflecta cât mai exact posibil procesele studiate, este necesar a realiza următorii paşi:

1. Colectarea cunoştințelor empirice

În prezent, utilizând calculatoarele moderne, procesul de colectare şi depozitare a informației inițiale se perfecționează continuu. Crearea bazelor de date, prin intermediul softurilor moderne, facilitează enorm construcția modelelor matematice. Informația care reprezintă un bogat material factologic se acumulează în baza observărilor efectuate şi a experiențelor desfăşurate ciclic, într-o perioadă de timp.

2. Identificarea componentelor şi proprietăților esențiale

Identificarea, mai ales în sistemele supraorganismice studiate a componentelor esențiale şi stabilirea legăturilor principale dintre ele, permite determinarea „momentelor-cheie” în elaborarea viitoarelor modele. Relevarea proprietăților esențiale ale fenomenului real studiat este un proces care necesită un efort deosebit din partea experților implicați. Considerăm această etapă foarte importantă în construcția viitorului model.

3. Formularea exactă a problemelor

Formularea cât mai explicită şi exactă a problemelor care trebuie să fie soluționate prin intermediul modelului necesită abilități deosebite. Fără obiective formulate concret şi clar este imposibil a aplica disciplinele matematice. În funcție de scopul propus, se va desfăşura în continuare procesul de matematizare a fenomenului biologic studiat.

4. Descrierea matematică a proceselor

Descrierea matematică a legăturilor principale dintre componentele esențiale depistate anterior necesită implicarea experților matematicieni şi informaticieni. Aplicarea aparatului matematic potrivit, pentru „îmbrăcarea” proceselor biologice, geografice, ecologice etc., într-o formă strictă şi precisă rămâne a fi cea mai dificilă problemă a cercetătorilor contemporani. Multiplicitatea factorilor naturali a diferitelor procese biologice, de exemplu, nu se „subordonează” complet teoriilor matematice moderne. Abstractizarea, în aces sens, rămâne a fi una dintre cele mai importante probleme ce se cere rezolvată în mileniul al III-lea. Modelul matematic al fenomenului natural examinat reprezintă nu altceva decât descrierea lui prin intermediul limbajului matematic, aplicând diverse teorii matematice.

5. Selectarea metodelor de soluționare

După ce modelul matematic a fost elaborat, este necesar să se decidă referitor la metodele de soluționare. De exemplu, dacă modelul matematic reprezintă un sistem de ecuații liniare, atunci poate fi selectată una dintre numeroasele metode existente pentru rezolvarea numerică a acestuia. În cazul când nu se găseşte o metodă potrivită pentru realizarea obiectivelor propuse, este necesar să se modifice una dintre metodele existente sau să se elaboreze o metodă nouă.

6. Elaborarea algoritmilor

Înainte de a utiliza calculatorul, metoda selectată trebuie să fie expusă sub formă de algoritmi: scheme logice, instrucțiuni etc. Acest proces va facilita enorm scrierea programului. Se ştie că diferite limbaje de programare sunt orientate spre soluționarea problemelor de diferite tipuri. În acest caz, se alege cel mai potrivit limbaj de programare pentru scrierea programului respectiv.

7. Lansarea programului pe calculator

Programul alcătuit se introduce în calculator. Lansând programul, se extrage informația inițială din baza de date, creată anterior, pentru a fi prelucrată. În funcție de scopul propus, informația inițială poate fi prelucrată „din diferite puncte de vedere”, obținând astfel răspuns la mai multe întrebări.

8. Analiza rezultatelor obținute

În ultima etapă, în mod obligatoriu, se face analiza rezultatelor obținute, verificându-se astfel modelul elaborat. Dacă rezultatele sunt în concordanță cu realitatea, modelul se acceptă, în caz contrar, se perfecționează sau se respinge. Modelul matematic construit corect ne dă posibilitatea să controlăm experimental diferite ipoteze, să reproducem astfel procesele examinate a căror sesizare directă ar suscita cheltuieli materiale şi timp.

4. Erorile care apar în procesul modelării

În procesul modelării unor fenomene reale, al simulării experimentului se comit anumite erori. Vom scoate în evidență cele mai semnificative erori despre care trebuie atenționați elevii ori studenții şi de care trebuie să se țină cont în procesul realizării experimentului preconizat.

1. Erorile care țin de formularea problemei

Modelarea, conform definiției date mai sus, „neglijează” unele proprietăți neesențiale ale prototipului. Acestea sunt erorile formulării problemei. Erorile de acest tip pot fi evaluate numai în cazul când se va construi un model mai exact şi mai complicat. Dar acest lucru nu este întotdeauna posibil. Din punct de vedere metodic, se recomandă să se examineze în ce moment proprietățile „neesențiale” pot să se manifeste ca proprietăți „esențiale” ale modelului.

2. Erorile datelor inițiale

Informația inițială, care trebuie prelucrată, aproape întotdeauna se cunoaşte cu un anumit grad de exactitate, altfel spus, cu o anumită aproximație. Acestea şi sunt erorile datelor inițiale. Cu cât modelul construit este mai sofisticat, cu atât probabilitatea este mai mare că datele inițiale vor fi mai aproximative, deoarece necesită obținerea unui volum mai mare de informație din diferite surse. În procesul prelucrării, erorile datelor inițiale se extind asupra rezultatelor intermediare şi finale. Extinderea erorilor poate să crească ori să descrească.

3. Erorile metodelor

Se ştie că există diferite metode matematice care pot fi utilizate pentru soluționarea problemelor după ce modelul a fost elaborat. În acest sens, se pot selecta metode mai exacte ori mai puțin exacte. De exemplu, în cazul când trebuie rezolvată o integrală, aplicarea metodei Simpson care se consideră mai exactă decât metoda trapezelor, va da un rezultat mai bun. Gradul de exactitate a metodei alese poate să crească, „din interior", modificând parametrii modelului. Un procedeu clasic în acest sens ține de divizarea parametrilor în jumătate, comparându-se de fiecare dată, după un anumit criteriu, rezultatele obținute, până se va ajunge la exactitatea dorită. Astfel, se măreşte gradul de exactitate a metodei selectate. Evaluarea erorilor se face în dependență de metoda selectată.

4. Erorile instrumentelor

Instrumentele utilizate atât la colectarea datelor, cât şi la prelucrarea lor „imprimă" din start anumite erori. În cazul când se colectează datele empirice, indiferent de tipul instrumentelor folosite, se comit anumite erori care sunt inevitabile şi depind de gradul de exactitate a instrumentelor. În procesul de prelucrare a datelor, de cele mai multe ori, acest lucru se produce la calculator, la efectuarea operațiilor se fac rotunjiri şi erorile respective în principiu pot să se acumuleze. Aceasta este eroarea calculatorului. Din punct de vedere teoretic, evaluarea unor astfel de erori se face destul de anevoios.

5. Puncte slabe în procesul de predare–învățare a subiectelor care țin de modelarea matematică

Vom scoate în evidență unele chestiuni didactice privind procesul de modelare matematică, care în viziunea noastră, în virtutea unor circumstanțe obiective ori subiective, nu sunt tratate destul de profund în procesul de predare–învățare a analizei numerice în clasa XII. Aşadar, menționăm următoarele:

1. Obiectivele centrale în cadrul predării–învățării analizei numerice, presupun însuşirea metodelor numerice şi aplicarea lor la soluționarea unor probleme concrete, descrierea matematică a cărora este foarte clară şi exactă. Chiar dacă această abordare este corectă din punct de vedere al asimilării materiei propuse, acest fapt nu îndeamnă elevii, mai ales cei cu pregătire peste nivelul mediu, la o atitudine creatoare privind elaborarea, obținerea modelului matematic, prin intermediul căruia ar putea fi soluționată problema respectivă.

2. În manualele existente, la compartimentul modelare, nu sunt destule probleme destinate elevilor ce ar conduce la elaborarea modelelor matematice, selectarea metodelor numerice, elaborarea algoritmilor şi testarea rezultatelor obținute la calculator. Parcurgerea etapelor fundamentale, care țin de modelarea matematică, în opinia noastră, le va cultiva elevilor o viziune generală privind integritatea procesului examinat şi le va dezvolta o atitudine creatoare vizavi de abordarea acestui proces.

3. Prin intermediul analizei numerice, în general, şi prin însuşirea subiectelor care se referă la modelare, în particular, se poate realiza eficient conexiunea cu alte discipline studiate de elevi în cursul liceal: fizică, chimie, biologie, geografie etc. Chestiunile care țin de legăturile interdisciplinare pot fi tratate cu succes anume în procesul modelării matematice a diverselor fenomene (chimice, biologice, ecologice etc.) cercetate.

Generalizând cele expuse mai sus, conchidem că în procesul de predare–învățare a analizei numerice trebuie să fie traversate cel puțin următoarele trei etape:

Etapa 1. Predarea metodelor numerice şi cultivarea abilităților în măsura în care ar permite elevilor aplicarea lor directă la soluționarea problemelor a căror modele matematice sunt cunoscute.

Etapa 2. Cultivarea cunoştințelor şi abilităților elevilor, care în urma examinării fenomenului ori procesului dat, ar fi capabili să formuleze corect problema din punct de vedere matematic, să elaboreze modelul matematic, să selecteze metodele numerice, să alcătuiască algoritmi şi să testeze rezultatele obținute.

Etapa 3. Cultivarea competențelor specifice disciplinei respective în măsura în care elevii ar fi capabili să îmbunătățească şi să perfecționeze modelul matematic elaborat astfel, încât să reflecte cât mai exact fenomenul ori procesul cercetat.

Problemele propuse în secțiunea 7, vor conduce la elaborarea modelelor matematice descrise cu ajutorul ecuațiilor neliniare. Înainte de a le examina, în acest sens, vom expune unele metode numerice de rezolvare a ecuațiilor cu o singură necunoscută**.**

6. Metode de rezolvare numerică a ecuațiilor neliniare cu o necunoscută

6.1. Localizarea soluțiilor prin metoda analitică

Vom considera că rădăcina ζ a ecuației *f(x) = 0* este localizată pe intervalul [a,b] dacă pe acest interval nu există alte soluții.

Folosind unele afirmații cunoscute din analiza matematică, se pot localiza analitic soluțiile ecuației *f(x) = 0*. Să reamintim aceste afirmații:

Afirmația 1. Dacă funcția *f(x)* este continuă pe [a,b] şi ia valori de semn opus la capetele acestui interval (adică $f(a)\cdot f(b) < 0$), atunci ecuația *f(x) = 0* are cel puțin o soluție pe [a,b].

Afirmația 2. Dacă funcția *f(x)* este continuă şi strict monotonă pe intervalul [a,b] şi ia valori de semn opus la capetele acestui interval, atunci ecuația *f(x) = 0* are pe intervalul [a,b] o soluție unică.

Afirmația 3. Dacă funcția *f(x)* este continuă pe intervalul [a,b] şi ia valori de semn opus la capetele intervalului, iar derivata *f'(x)* îşi păstrează semnul pe [a,b], atunci pe [a,b] există o soluție a ecuației *f(x) = 0* şi această soluție este unică.

Exemplul 1. Să se calculeze valorile funcției $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ la capetele intervalului [0,5;1]. Avem: *f(0,5) = -0.35127, f(1) = 1.71825*. Evident, $f(0,5)\cdot f(1) < 0$. Continuând acest proces, se poate găsi un şir de intervale $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq [a_3,b_3] \supseteq ... \supseteq [a_n,b_n] \supseteq ...$ ce conțin soluția ζ a ecuației, astfel încât funcția *f(x)* are semne opuse la capetele lor.

Metoda analitică ne dă posibilitate să aplicăm eficient calculatorul la localizarea soluțiilor. De reținut că la localizarea soluțiilor pasul *h* trebuie să fie cât mai mic.

Exemplul 2. Să se alcătuiască un program în Pascal care să localizeze soluțiile ecuației $\sin(x) - \frac{1}{x} = 0$ în condițiile a = 1, b = 10, h = 0,01.

```
Program localizare;
Uses Crt;
Var a,b,c,h,x1,x2:real;
Function fnl(x:real):real;
Begin
        fnl: = sin(x)-1/x;
End;
 Begin
        ClrScr;
        WriteLn('Introdu extremitățile intervalului a si b, pasul h');
        ReadLn(a,b,h);
        x1: = a; x2: = x1+h;
 While x2< = b Do
   Begin
   If fnl(x1)*fnl(x2)<0 Then WriteLn( ’solutia apartine ’,'[ ',x1:12:18,'; ',x2:12:18,' ]');
        x1: = x2;
        x2: = x1+h;
   End;
 ReadKey
End.
```

Ca rezultat al lansării programului se afişează:

1, 10, 0.01
soluția aparține [1.11000000000;1.12000000000]
soluția aparține [2.76999999990;2.77999999990]
soluția aparține [6.43000000020;6.44000000020]
soluția aparține [9.30999999980;9.31999999980]

6.2. Metoda modificată a coardei

Vom expune în această secțiune metoda coardei din alt punct de vedere. Considerăm funcția *f(x)* continuă şi strict monotonă pe intervalul [a,b] şi ia la capetele lui valori de semn opus. Nu e necesar ca funcția *f(x)* să fie de două ori derivabilă.

După cum se ştie, metoda coardei constă în înlocuirea curbei $y = f(x)$ printr-o coardă dusă prin punctele *A(a,f(a))* şi *B(b,f(b))*. În continuare, spre deosebire de expunerea metodei coardei în sens clasic, ne va interesa nu ecuația coardei, ci punctul ei de intersecție cu axa *Ox*, pe care îl vom găsi din asemănarea triunghiurilor *Axa* şi *Bxb* (fig.1).

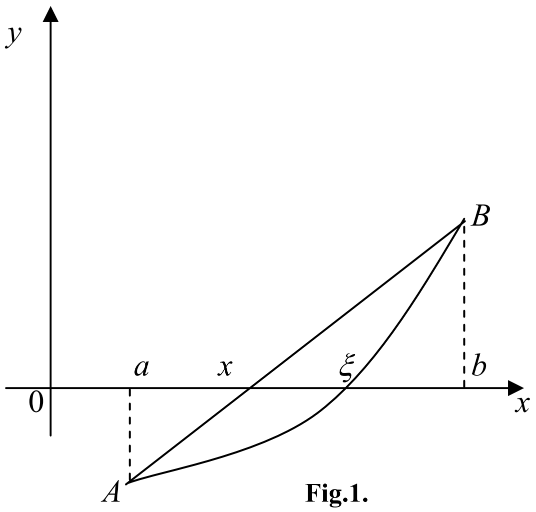
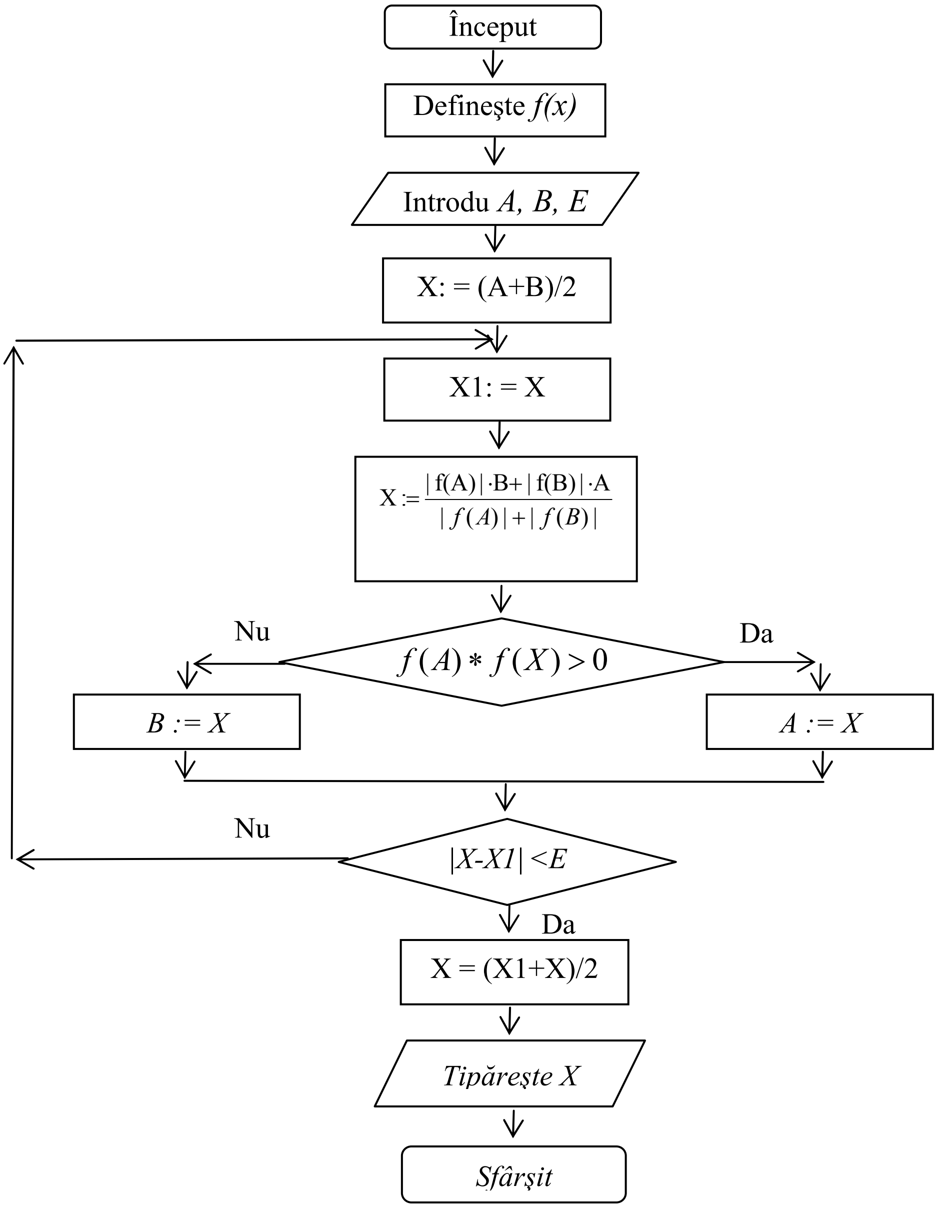


Fig.1.

Avem, deci: $\frac{|f(b)|}{b-x} = \frac{|f(a)|}{x-a}$. De unde găsim că $x = \frac{|f(a)| \cdot b + |f(b)| \cdot a}{|f(a)| + |f(b)|}$. Determinăm *f(x)* şi verificăm dacă se respectă condiția $f(a) \cdot f(x) < 0$. Dacă e aşa, atunci punctul *a* rămâne neschimbat, iar în calitate de *b* considerăm punctul *x*, adică $b = x$. În caz contrar $a = x$ şi *b* rămâne neschimbat. Acum aplicăm acelaşi procedeu față de intervalul nou obținut: construim coarda prin punctele respective şi din asemănarea triunghiurilor obținem noul punct de intersecție *x* cu axa *Ox*.

Procedeul se repetă până când $| x_{i+1} - x_i |$ devine mai mic decât exactitatea dată ε. Drept soluție se consideră numărul $\xi = \frac{(x_{i+1} + x_i)}{2}$.

Schema logică a metodei modificate a coardei



Exemplul 3. Să se alcătuiască un program în Pascal care să găsească soluţia ecuaţiei $x^3+3x^2-3=0$, localizată pe intervalul [0;1], cu exactitatea *E = 0.0001*, utilizând metoda modificată a coardei.

Programul pentru metoda modificată a coardei

```
Program coarda_ modificata;
Uses Crt;
Var a,b,e,x,x1,r:real;
Function fnl(x:real):real;
 Begin
        fnl:= Sqr(x)*x+3*x*x-3;
 End;
Begin
  ClrScr;
  Writeln('Introdu a, b, e');
   Readln(a,b,e);
```

```
 If fnl(a)*fnl(b)>0 Then
Begin
     WriteLn('Ecuatia nu are solutii pe intervalul dat');
     ReadKey;
     Exit
     End;
          x:= (a+b)/2;
 Repeat
          x1:= x;
          x:= (abs(fnl(a))*b+abs(fnl(b))*a)/(abs(fnl(a))+abs(fnl(b)));
          If fnl(a)*fnl(x)<0 Then b:= x Else a:= x;
 Until abs(x1-x)<e;
 r:= (x1+x)/2;
 Write('Solutia este: ', r:6:6);
 ReadKey;
End.
```

Ca rezultat al lansării programului se afişează:

Introdu a, b, e
0
1
0.0001
Soluția este: 0.878855

6.3. Metoda mixtă a coardelor şi tangentelor

Fie ecuația $f(x) = 0$ despre care s-a stabilit printr-un procedeu oarecare că are o singură soluție pe intervalul [a,b] astfel că $f(a)\cdot f(b) < 0$. Presupunem că $f(x)$ este strict monotonă şi continuă pe [a,b], iar derivatele $f'(x)$ şi $f''(x)$ nu se anulează şi păstrează semnul constant pe [a,b].

Aplicăm metoda mixtă a coardei şi tangentei în dependență de graficul funcției.

Cazul 1

Fie $f'(x)\cdot f''(x)>0$. Studiem cazul când $f(a)<0, f(b)>0$ şi $f'(x)>0, f''(x)>0$. Obținem graficele din figura 2.

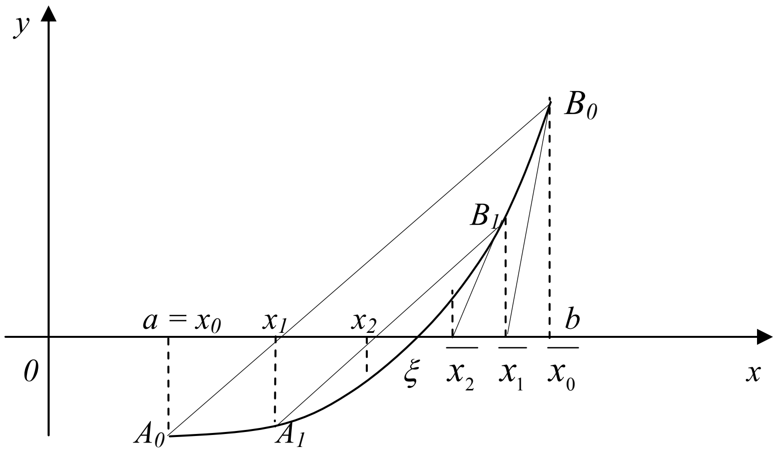


Fig.2.

Ca aproximație inițială pentru metoda coardelor vom considera capătul a, iar pentru metoda tangentelor - capătul b.

Deci:

$$x_1 = a - \frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)};\ \ \bar{x}_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad (1)$$

Soluția ξ se află acum pe intervalul $\left[x_1;\overline{x}_1\right]$. Aplicăm din nou metoda combinată pentru acest interval şi obținem:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(\overline{x}_1)\cdot(\overline{x}_1 - x_1)}{f(\overline{x}_1) - f(x_1)};\ \overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{f(\overline{x}_1)}{f'(\overline{x}_1)}.$$

Aplicând procedeul descris mai sus succesiv, obținem:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\cdot(\overline{x}_i - x_i)}{f(\overline{x}_i) - f(x_i)};\ \overline{x}_{i+1} = \overline{x}_i - \frac{f(\overline{x}_i)}{f'(\overline{x}_i)}\ . \tag{2}$$

În mod analog se tratează şi cazul *f(a)>0, f(b)<0* şi *f'(x)<0, f''(x)<0*.

Menționăm că dacă *f'(x) ·f''(x)>0*, atunci metoda coardelor permite aproximarea prin lipsă, iar metoda tangentei prin adaos.

Cazul 2

Fie *f '(x) ·f''(x)<0*. Pentru exemplificare considerăm *f(a)>0, f(b)<0* şi *f'(x)<0, f''(x)>0* (fig.3).

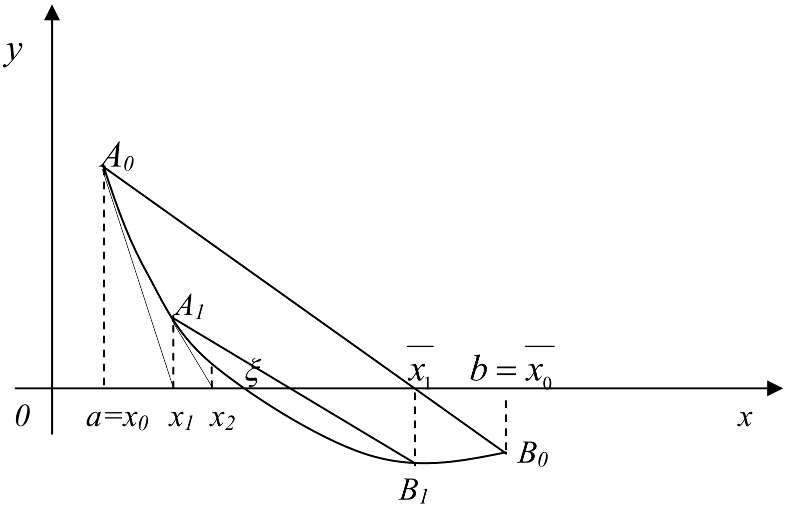


Fig.3.

Drept aproximație inițială pentru metoda coardelor vom considera capătul *b*, iar pentru metoda tangentelor - capătul *a*. Deci:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)};\ \overline{x}_1 = b - \frac{f(b)\cdot(b-a)}{f(b) - f(a)}\ . \tag{3}$$

Aplicând din nou metoda mixtă pentru $\left[x_1;\overline{x}_1\right]$, obținem:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)};\ \overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{f(\overline{x}_1)\cdot(\overline{x}_1 - x_1)}{f(\overline{x}_1) - f(x_1)}.$$

Folosind metoda combinată de mai multe ori, obținem formulele de recurență:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)};\ \overline{x}_{i+1} = \overline{x}_i - \frac{f(\overline{x}_i)\cdot(\overline{x}_i - x_i)}{f(\overline{x}_i) - f(x_i)}\ . \tag{4}$$

În mod analog se tratează şi cazul *f(a)<0, f(b)>0* şi *f'(x)>0, f''(x)<0*.

Regulă. Drept aproximație inițială se alege acel capăt al intervalului [a,b] în care semnul funcției *f(x)* coincide cu semnul derivatei de ordinul doi *f''(x)*.

Deci, dacă *f'(x) ·f''(x)<0*, atunci metoda tangentelor permite aproximarea prin lipsă, iar metoda coardelor - prin adaos.

Evident, $x_i < \xi < \overline{x}_i$ şi, desigur, $0 < \xi - x_i < \overline{x}_i - x_i$.

Procedeul se opreşte atunci când $\left|\overline{x}_i - x_i\right| < \varepsilon$, unde ε este exactitatea dorită.

Ca valoare a soluțiii ξ se va lua media aritmetică a ultimelor valori obținute:

$\xi = \frac{1}{2}(x_i + \bar{x}_i)$, unde x_i și $\bar{x}_i$ sunt aproximarea soluției prin lipsă și, respectiv, adaos.

Comentarii metodice

Din punct de vedere practic, la identificarea aproximației inițiale, atât pentru metoda Newton-Rafson, care se studiază în cursul liceal, cât și pentru metoda mixtă a coardelor și tangentelor pot să apară anumite dificultăți, care țin de determinarea derivatelor. Necesitatea de a găsi derivata de ordinul întâi și derivata de ordinul doi a funcției *f(x)* nu se determină întotdeauna ușor. Dacă mai luăm în considerație faptul că funcția *f(x)* poate fi destul de complicată, atunci diferențierea analitică se efectuează destul de dificil în sens tehnic. Este și mai complicat a găsi derivatele atunci când expresia analitică a funcției nu se cunoaște. În asemenea cazuri propunem o altă abordare.

Menționăm că formula Newton-Rafson $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (formula respectivă, dar ceva mai târziu decât Newton a fost obținută, în anul 1690, și de către Rafson) este substituită în programul de mai jos printr-o formulă aproximativă. Și anume, luând în considerație formula aproximativă pentru calcularea derivatei de ordinul unu:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x}. \tag{5}$$

Formula recurentă, după înlocuirea expresiei pentru $f'(x_n)$, are forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 \cdot \Delta x \cdot f(x_n)}{f(x_n + \Delta x) - f(x_n - \Delta x)}.$$

Formula aproximativă pentru calcularea derivatei de ordinul doi ușor se obține din (5):

$$f''(x_n) \approx \frac{(f(x_n + \Delta x + \Delta x) - (2 \cdot f(x_n + \Delta x)) + f(x_n))}{\Delta x \cdot \Delta x}.$$

În relațiile de mai sus vom considera Δx= E, unde E reprezintă exactitatea necesară pentru calcularea soluțiilor. În felul acesta nu va fi necesar să se calculeze manual derivata de ordinul 1 și derivata de ordinul 2. Aceste operații nu întotdeauna se desfășoară rapid și eficient de către elevi. Calculele respective vor fi efectuate de calculator. Astfel nu va fi necesar să se determine aproximația inițială în mod manual și să se calculeze derivatele de către utilizator.

Exemplul 4. Să se alcătuiască un program Pascal care să determine, prin metoda mixtă a coardelor și tangentelor, soluțiile ecuației $(x - \frac{1}{2})(3 - x) - \sin(x^2) + e^{3x-1} = 0$ pe [0,1] cu exactitatea $E = 10^{-3}$.

Programul realizat în limbajul ***Pascal***

```
    Program mixta_a_coardelor_si_tangetelor;
    Uses crt;
Const e = 0.001;
Var v,y,x,a,b,c,t,k,fn1,fn2:real;
Function fn(x:real):real;
Begin
        fn:=(x-1/2)(3-x)-sin(x*x)+exp(3*x-1);
End;
Begin
        Clrscr;
        Textcolor(2);
        Write('Introdu primul capat al intervalului, a = ');
        Readln(a);
        Textcolor(3);
```

```
        Write('Introdu al doilea capăt al intervalului, b = ');
        Readln(b);
        x:= a;
        y:= b;
        fn1:= (fn(x+e)-fn(x-e))/2*e;
        fn2:= (fn(x+e+e)-(2*fn(x+e))+fn(x))/sqr(e);
Repeat
        If fn1*fn2>0 Then
Begin
        k:= ((fn(x)*(b-x))/(fn(b)-fn(x)));
        x:= x-k;
        v:= x;
        t:= (2*e*fn(x))/(fn(x+e)-fn(x-e));
        x:= x-t;
End
Else Begin
        k:= ((fn(y)*(y-a))/(fn(y)-fn(a)));
        y:= y-k;
        v:= y;
        t:= (2*e*fn(x))/(fn(x+e)-fn(x-e));
        x:= x-t;
End;
Until Abs(v-x)<= e;
c:= (x+v)/2;
If (c<a) or (c>b) then begin
        Textcolor(4);
        Writeln('Ecuatia nu are radacini pe acest interval');
End Else Begin
        Textcolor(5);
        Writeln('Soluția = ',c:5:8);
        Writeln(' Soluția dupa metoda tangentei = ',x:5:8);
        Writeln(' Soluția dupa metoda coardei = ',v:5:8);
End;
Readkey;
End.
```

Ca rezultat al lansării programului se afişează:

Introdu primul capăt al intervalului, a = 0.
Introdu al doilea capat al intervalului, b = 1.
Soluția = 0,24397514.
Soluția după metoda tangentei = 0,24402678.
Soluția după metoda coardei = 0,24392351.

Remarcă. În programul expus mai sus se poate utiliza o formulă cu un grad mai mare de exactitate, aşa-numita „formula lui Salzer”:

$$f'(x_n) \approx \frac{4f(x_n+\Delta x)-3\cdot f(x_n)-f(x_n+\Delta x+\Delta x)}{2\cdot \Delta x}. \qquad (6)$$

Propunem cititorului să deducă din relația (6) o nouă formula aproximativă pentru calcularea derivatei de ordinul doi şi o altă relație de recurență.

Menționăm că programele pentru metoda coardei, modificată, precum şi pentru metoda mixtă a coardelor şi tangentelor pot fi unificate cu programul pentru metoda localizării. Astfel, concomitent, soluțiile ecuației examinate vor fi localizate şi vor fi precizate prin una din metodele expuse mai sus.

7. Modelarea matematică în cazul unor probleme practice

Problema 1. O piscină cu baza de formă pătrată are volumul de 30 m^3. Care este adâncimea piscinei, dacă se ştie că latura pătratului este mai mică decât înălțimea piscinei cu 2 m? Să se calculeze rezultatul cu exactitatea eps=0,001 m.

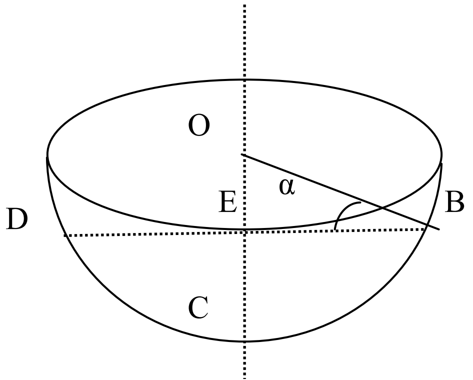
Rezolvare:

Notăm prin *x* adâncimea piscinei. Conform formulei pentru calculul volumului unui paralilepiped *(V=abc)* cu baza de formă pătrată, avem: $x(x-2)^2=30$.

Aducând relația respectivă la forma *f(x)=0,* obținem modelul matematic a problemei reprezentat prin ecuația: $x^3-4x^2+4x-30=0$.

Rezolvăm această ecuație, aplicând programul unificat pentru localizare şi metoda coardei, modificată. Obținem soluții pozitive doar pe intervalul [4; 5]. Luând în considerație exactitatea eps=0.001 şi pasul h=0.001, obținem soluția 4,563762, care şi reprezintă adâncimea, în metri, a piscinei.

Problema 2. Un vas de formă semisferică este plin cu apă. Sub ce unghi α trebuie înclinat vasul astfel, încât să rămână în el exact o treime din apă? Rezultatul să se obțină cu exactitatea eps=0,001.



Rezolvare:

Volumul apei din semisferă se calculează conform formulei

$V=\dfrac{2\pi r^3}{3}$, iar, din condiția problemei,

$$\frac{1}{3}V=\frac{2\pi r^3}{9} \tag{7}$$

Presupunem că o treime din volumul apei se va afla în intervalul semisferic DBC exprimat prin raza r. Astfel obținem:

$$V_{DBC}=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right),$$

unde h = OC-OE = r – r sin α = r(1-sin α).

Deci,

$$V_{DBC}=\pi r^2(1-\sin\alpha)^2\left(r-\frac{r(1-\sin\alpha)}{3}\right)=\pi r^2(1-\sin\alpha)^2\cdot\frac{3r-r+r\sin\alpha}{3}=\frac{\pi r^3}{3}(1-\sin\alpha)^2(2+\sin\alpha)=$$

$$=\frac{\pi r^3}{3}(1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha)(2+\sin\alpha)=\frac{\pi r^3}{3}(2-3\sin\alpha+\sin^3\alpha)=\frac{\pi r^3}{3}(\sin^3\alpha-3\sin\alpha+2).$$

Am obținut:

$$V=\frac{\pi r^3}{3}(\sin^3\alpha-3\sin\alpha+2). \tag{8}$$

Cum membrii din stânga ai ecuațiilor (7) şi (8) sunt egali, rezultă că şi membrii din dreapta sunt egali:

$$\frac{2\pi r^3}{9}=\frac{\pi r^3}{3}(\sin^3\alpha-3\sin\alpha+2). \tag{9}$$

Aducem relația (9) la forma *f(x)=0*:

$$\sin^3\alpha-3\sin\alpha+\frac{4}{3}=0.$$

Efectuând substituția x = sin α, obținem ecuația:

$$x^3-3x+\frac{4}{3}=0.$$

Rezolvăm această ecuație, aplicând programul unificat pentru localizare şi metoda coardei, modificată. Obținem soluții pozitive doar pe intervalul [0; 1]. Luând în considerație exactitatea eps=0,001, obținem soluția 0,482403. Aşadar, sin α=0,482403 şi unghiul sub care trebuie înclinat vasul, astfel încât să rămână exact o treime din apă, este $\alpha=28^0 48'$.

Problema 3. Se dă produsul a 5 factori. La fiecare din primii trei factori din produsul respectiv se adaugă factorul însuşi înmulțit la unul şi acelaşi număr x. Din fiecare următorii doi factori se scade factorul însuşi înmulțit cu unul şi acelaşi număr x. Determinați numărul x, dacă se ştie că produsul factorilor respectivi, după modificare, rămâne neschimbat.

Rezolvare:

Fie că *a, b, c, d, e* sunt factorii produsului, *x* numărul cu care se înmulțeşte fiecare factor.

Conform condiției problemei, alcătuim relația:

$(a+ax)(b+bx)(c+cx)(d-dx)(e-ex)=a\,b\,c\,d\,e \Leftrightarrow a(1+x)b(1+x)c(1+x)d(1-x)e(1-x)= a\,b\,c\,d\,e \Leftrightarrow$
$a\,b\,c\,d\,e\,(1+x)^3(1-x)^2= a\,b\,c\,d\,e \Leftrightarrow (1+x)^3(1-x)^2=1 \Leftrightarrow (1+3x+3x^2+x^3)(1-2x+x^2)=1 \Leftrightarrow$
$x^5+x^4-2x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow x\,(x^4+x^3-2x^2-2x+1)=0.$

Modelul matematic reprezintă următoarea relație: $x^4+x^3-2x^2-2x+1=0.$

Vom determina rezultatul, aplicând programul unificat pentru localizare şi metoda mixtă a coardelor şi tangentelor. Obținem două intervale cu soluții pozitive *[0, 1]* şi *[1, 3]*.

Pentru intervalul *[0,1]* avem:

Soluția aparține intervalului [0.38900000002;0.39000000002].

Obținem: soluția 0,38939074;
soluția după metoda tangentei 0,38939068;
soluția după metoda coardei = 0,38939080.

Pentru intervalul *[1, 3]* avem:

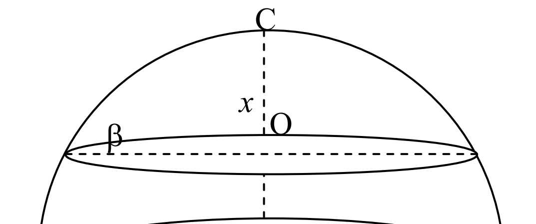
Soluția aparține intervalului [1.28800000010;1.8900000010].

Obținem: soluția 1,28895796;
soluția după metoda tangentei = 1,28879519;
soluția după metoda coardei = 1,28912073.

Problema 4. Un obiect de lemn are forma unei semisfere cu raza 3. Să se taie obiectul în două părți echivalente, astfel încât secțiunea tăieturii să fie paralelă cu baza. Să se calculeze cu exactitatea $\varepsilon = 0{,}001$.

Rezolvare:

Fie α este planul bazei. Planul β va reprezenta secțiunea tăieturii. Deoarece β||α, atunci în secțiune se obține o calotă sferică şi o zonă sferică. Din condiția problemei părțile sunt echivalente.



$V_{calota}=V_{zonă}=\dfrac{1}{2}V_{semisferă}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\pi R^3=\dfrac{1}{3}\pi R^3,$

$R=OA=OB=OC.$

Fie $CO'=x$, atunci $OO'=R-x$.

Aşadar, $V_{calotă}=\pi x^2\left(R-\dfrac{x}{3}\right)$.

Luând în considerație relația de mai sus, obținem:

$$V_{calotei}=\frac{1}{3}\pi R^3 .$$

Astfel, obținem ecuația $\pi x^2\left(R-\dfrac{x}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow 3x^2R - x^3 = R^3 \Leftrightarrow x^3-3x^2R+R^3=0.$

Deoarece $R=3$, obținem $x^3-9x^2+27=0.$

Rezolvăm această ecuație, aplicând programul unificat pentru localizare şi metoda mixtă a coardelor şi tangentelor. Determinăm că soluțiile pozitive sunt pe intervalul *[0, 1] şi [8, 9]*. Luând în considerație condiția problemei şi exactitatea *eps=0.001*, obținem *soluția* 1.95811096.

Soluția după metoda tangentei 1.95811093.

Soluția după metoda coardei 1.95811083.

Aşadar, trebuie efectuată o tăietură la distanța $OO'= R-x = 3-1.95811096 = 1{,}04188904.$

Prin rezolvarea unor atare probleme, elevii vor dobândi deprinderi de a construi modele matematice, de a găsi metode numerice adecvate şi de a analiza rezultatele obținute.

Referinţe:

1. Cabac V. Elemente de modelare matematică. - Chişinău: Lumina, 1995.
2. Chiriac E., Chiriac L. Elaborarea modelelor matematice în ecologie. Facultatea de Geografie la 60 ani. Lucrările simpozionului „Dezvoltarea geografiei în Republica Moldova". - Chişinău, 1998, p.129-131.
3. Chiriac L., Mihălache L. Abordări metodice privind expunerea procesului de modelare. Modernizarea învăţământului preuniversitar şi universitar în contextul integrării europene. Materialele conferinţei ştiinţifice. - Chişinău, noiembrie 2009, p.303-305.
4. Chiriac L., Mihălache L. Probleme care ţin de procesul de predare–învăţare a modelării matematice. Modernizarea învăţământului preuniversitar şi universitar în contextul integrării europene. Materialele conferinţei ştiinţifice. - Chişinău, noiembrie 2009, p.306.
5. Mihălache L. Utilizarea tehnologiilor computaţionale în procesul de predare–învăţare–evaluare a metodelor numerice la obiectul informatica în cursul liceal. Modernizarea învăţământului preuniversitar şi universitar în contextul integrării europene. Materialele conferinţei ştiinţifice. - Chişinău, noiembrie 2009, p.310-313.
6. Бирюков Б., Гутчин Н. Творчество и машины. - Москва: Радио и связь, 1982.
7. Информатика в школе. - 2005. - №1.

Prezentat la 14.05.2010