ROLUL MODELELOR ÎN ORGANIZAREA ACTIVITĂȚII INDIVIDUALE A STUDENȚILOR

Mitrofan CIOBAN, Antonina CIOBAN-PILEȚCAIA*, Larisa SALI,

Universitatea de Stat din Tiraspol
**Universitatea Nistreană*

În articol sunt examinate unele aspecte privind rolul modelelor în procesul de organizare a activității individuale a studenților de la specialitățile matematice şi psihopedagogice. Sunt formulate unele probleme de extrem şi unele probleme generale. În particular, este examinată problema isoperimetrică.

Cuvinte-cheie: predare-învățare-evaluare, activitate individuală a studenților, modele, funcții, probleme matematice, problemă isoperimetrică, poliedru convex.

THE ROLE OF MODELS IN THE ORGANIZATION OF STUDENTS' INDIVIDUAL WORK

In the present article we study some aspects of the role of models in the process of organization of individual work of students from mathematical and psycho-pedagogical specialties. Some extremes problems and some general problems are formulated. In particular, the isoperimetric problem is examined.

Keywords: teaching-learning-evaluation, students' individual activity, models, functions, mathematical problems, the isoperimetric problem, convex polyhedron.

„Matematica actualmente s-a transformat
în analiza intelectuală a tipurilor de modele".
(Alfred Whitehead)

Introducere

Scopul principal al educației este dezvoltarea personalității. Istoria demonstrează că țările industrial dezvoltate au obținut un nivel social-economic înalt datorită organizării eficiente a sistemului educațional şi a cercetărilor ştiințifice fundamentale şi aplicative.

Educația ca fenomen social a apărut cu naşterea primelor comunități şi civilizații umane în scopul transmiterii experienței de viață şi a cunoştințelor acumulate. Cu dezvoltarea civilizațiilor s-au extins şi scopurile educației, au fost create diverse instituții specializate. Până în secolul XV procesul educațional în general s-a bazat pe exerciții de memorare. Personalități marcante din secolul XV, adepți ai umanismului, precum Erasmus din Rotterdam, Laurentius Valla, Pier Paolo Vergerio, Bernardino da Siena, Thomas Morus, Francois Rabelais şi mulți alții, criticau sistemul tradițional de educație. Ei propuneau o educație care să fie bazată pe stimularea curiozității celui care doreşte să învețe şi pe încrederea în capacitatea acestuia de a rezolva diferite probleme. Pedagogia Renaşterii era centrată pe acumularea cunoştințelor enciclopedice şi pe formarea spiritului umanist. Odată cu dezvoltarea industriei şi agriculturii la nivel de ramuri principale ale economiei, educația devine o verigă importantă socială, culturală şi economică. Expansiunea educației în secolele XIX-XX a fost legată de necesitățile dezvoltării economiei industriale, capitaliste. Aceasta reclama o forță de muncă profesionalizată, care să posede competențe şi abilitați speciale, potrivite specificului proceselor industriale. Începând cu mijlocul secolului al XVIII-lea predarea ştiințelor reale este asociată cu asigurarea bazei pentru realizarea obiectivelor economice şi social-profesionale, însă fără a fi orientată spre perspectivele dezvoltării industriei moderne. Anii '60 ai secolului XX se caracterizează prin activitatea instituțiilor educaționale în condiții nonstandard, mereu schimbătoare, datorate tehnologiilor pe care orice persoană socialmente activă trebuie să le cunoască cel puțin la nivel de utilizator. Aceste schimbări permanente impun modificări esențiale curriculare şi ale tuturor componentelor procesului educațional: ale metodelor de predare-învățare-evaluare, conținuturilor, finalităților, rolulului actorilor implicați în acest proces etc. Nu întâmplător la sfârşitul anilor '60 ai secolului trecut savantul american Philip Coombs în lucrarea *Criza mondială a educației* [17] determină existența unor decalaje funcționale între educație şi alte sisteme sociale, care se exprimă prin:

– decalajul dintre oferta (prea mică) şi cererea (prea mare) de educație de calitate;
– decalajul dintre calitatea resurselor umane oferite de educație şi necesitățile sociale;
– inadaptarea programelor de învățământ şi a metodelor la cerințele societății;

– inerţia structurilor organizatorice ale sistemelor de învăţământ în raport cu dinamica societăţii contemporane.

Cercetările ulterioare au scos în evidenţă şi alte deficienţe majore ale educaţiei. Dezvoltarea accelerată a ştiinţei şi tehnicii şi creşterea exponenţială a informaţiei exclude centrarea educaţiei contemporane pe formarea spiritului enciclopedic.

Prin definiţie şi misiune, educaţia este orientată spre elev şi student. Conform principiilor educaţionale ale secolului al XXI-lea, educaţia contemporană este centrată pe elev. Evoluţia actuală şi viitoare a educaţiei şi învăţământului va fi din ce în ce mai marcată de dezvoltarea accelerată şi extinderea noilor tehnologii informaţionale care afectează natura muncii şi determină efectuarea anumitor tipuri de muncă umană de către automate. Prin urmare, în educaţia contemporană:

– rolul ştiinţelor naturii ar trebui asociat cu cultura ştiinţifică, ca parte a culturii generale, indispensabilă oricărui om şi oricărei profesii;

– scopul urmărit, ca obiectiv general al învăţământului secundar, ar trebui asociat cu formarea nu doar a unui savant desăvârşit, ci şi a unei raţiuni complete;

– gândirea liberă a elevului, formarea spiritului umanist şi înţelegerea bogăţiei infinite a realităţii să fie obiective majore ale învăţământului;

– centrarea pe subiectul care învaţă, dezvoltarea la elevi şi studenţi a imaginaţiei, a capacităţii de previziune, a spiritului creativ non-standard şi axarea pe valori concrete să penetreze procesul şi conţinuturile educaţionale;

– modificările curriculare să fie racordate la specificul proceselor muncii industriale şi la tendinţele dezvoltării tehnologiilor moderne.

Din aceste puncte de vedere, este importantă poziţia şi implicarea profesorului la toate etapele procesului instructiv-educativ. În alegerea conţinuturilor de învăţare criteriul de bază va fi însemnătatea temei pentru formarea culturii şi a bazelor pregătirii profesionale la studenţi. Abordarea concentrică plasează spre centru conţinuturile standard şi la periferii temele şi compartimentele mai puţin importante. Standardele la diverse discipline nu vor fi tratate la fel din punct de vedere conceptual. Însă, la fiecare disciplină se va examina un standard al rezultatelor învăţării şi un standard al predării.

Pedagogul ceh Jan Amos Comenius (1592-1670), prin opera sa *Didactica Magna* (1657), este considerat „întemeietorul didacticii şi al capitolelor aferente” [5, p. 130]. Definind didactica drept artă de a învăţa pe alţii bine, Comenius a arătat că a învăţa pe altul înseamnă a şti ceva şi a face şi pe altul să înveţe să ştie repede, plăcut, temeinic. Mijloacele pe care le propunea erau exemplele, regulile, aplicaţiile generale sau speciale, care ţin cont de natura obiectelor şi a temelor de învăţat, precum şi de scopuri. Precursorul educaţiei moderne menţiona: „Didactica noastră are drept proră şi pupă: să cerceteze şi să găsească un mod prin care învăţătorii, cu mai puţină osteneală, să înveţe mai mult pe elevi…” [7, p.13].

Diverse metode de învăţământ sunt descrise în sursele bibliografice [1,6,11,12,19]. Temele abordate în secţiunile 1 şi 2 ale acestui articol sunt aplicabile în activitatea cu studenţii, iar ideile abordate în secţiunile 3-6 pot fi propuse elevilor de liceu şi studenţilor primilor ani de studiu în calitate de proiecte de investigaţie. În secţiunea a 7-a sunt propuse materiale pentru organizarea activităţii independente la geometria analitică. Similar pot fi structurate sisteme de probleme şi la alte compartimente ale matematicii.

1. Rolul metodelor bazate pe experienţa de simulare

Pentru nivelurile preşcolar şi al claselor primare cea mai dificilă problemă a didacticii matematicii este formarea conceptelor matematice de bază. Lucrările practice şi de laborator sunt forme importante de organizare a procesului de pregătire a viitorilor educatori şi învăţători pentru formarea reprezentărilor matematice la preşcolari şi la elevii claselor primare. Ele sunt orientate spre confirmarea experimentală a tezelor teoretice şi spre formarea abilităţilor practice de lucru cu copiii. În majoritatea cazurilor, lucrările de laborator conţin sarcini cu caracter investigaţional destinate activităţii experimentale de cercetare şi studierii literaturii ştiinţifice suplimentare. Înainte de executarea lucrării practice sau de laborator studentul ia cunoştinţă de scopul şi sarcinile formulate pentru a selecta corect materialul teoretic necesar. Forma desfăşurării lucrărilor de laborator depinde de numărul de studenţi în grupă, de conţinuturile abordate, de volumul lor etc. Una dintre formele eficiente de organizare a lucrărilor practice şi de laborator este repartizarea în grupuri de cercetare. Grupa academică poate fi divizată în 2-4 grupe mai mici, care se pregătesc separat şi în cadrul lucrării de laborator se lansează în dezbateri, discuţii, analizând ulterior care sunt cele mai bune concluzii şi experienţe valorificabile.

Expunem în continuare un exemplu de organizare a lucrării de laborator la tema ***Particularităţile de formare la copii a reprezentărilor despre relaţii binare şi proprietăţile lor.***

Executarea lucrării de laborator trebuie să succeadă unei activităţi de verificare a cunoştinţelor teoretice la temă pe următoarele subiecte:

1. Rolul comparaţiei în studierea relaţiilor şi a proprietăţilor lor. Particularităţile de formare la copii a priceperilor de a compara obiecte.
2. Importanţa ordonării în serie a obiectelor la studierea relaţiilor şi a proprietăţilor lor. Particularităţile de formare la copii a priceperilor şi deprinderilor necesare pentru a ordona mulţimi de obiecte.
3. Clasificarea ca mod de studiere a relaţiilor şi a proprietăţilor lor. Particularităţile de formare la copii a priceperilor şi deprinderilor necesare pentru a clasifica obiectele unei mulţimi.

Pentru lucrarea de laborator fiecare grupă pregăteşte seturi de figuri geometrice diferite: triunghiuri, pătrate, dreptunghiuri, cercuri de diferită mărime, culoare (câte 5 de fiecare tip). Aceste figuri vor fi utilizate în cadrul activităţii de laborator pentru a soluţiona un şir de probleme.

4. Fiecare grup va elabora 3-4 exerciţii-jocuri pentru copiii preşcolari de diferită vârstă şi va trebui să argumenteze cum au fost aleşi destinatarii. Grupul se va pregăti pentru demonstrarea practică a acestor jocuri tuturor colegilor.
5. Fiecare grup va elabora câte 2 exerciţii care demonstrează cum se realizează clasificarea după proprietăţi compatibile şi proprietăţi incompatibile.
6. Se solicită ca studenţii să ordoneze următoarele exemple de clasificare a figurilor din punctul de vedere al creşterii gradului de dificultate:

- Separaţi figurile astfel încât împreună ele să fie asemenea.
- În cutia mare puneţi figurile mari, iar în cea mică figurile mici.
- Distribuiţi fundiţe păpuşilor, astfel încât culorile fundiţelor să corespundă culorilor rochiţelor păpuşilor.

7. Să elaboreze scenarii ale unor jocuri didactice pentru aplicarea clasificării după două criterii compatibile: denumirea jocului; scopul; materialele necesare; algoritmul de executare a etapelor jocului. Să pregătească materialele necesare şi să fie gata să demonstreze întregii grupe cum se desfăşoară jocul.

Unul dintre mijloacele de bază de formare a competenţelor matematice este rezolvarea de probleme. Problemele au roluri multiple în procesul educaţional încă din clasele primare, dar vom menţiona importanţa lor în asimilarea de către elevi a cunoştinţelor teoretice şi familiarizarea lor cu tipurile de activităţi aferente rezolvării unor tipuri de probleme. Realizarea acestui scop este posibilă, dacă profesorul (învăţătorul) va propune spre examinare şi rezolvare sisteme de probleme care acoperă tot spectrul de caracteristici ale algoritmilor şi regulilor de operare, ale noţiunilor, definiţiilor, axiomelor, teoremelor studiate. Cerinţe faţă de sistemele de probleme pentru fiecare dintre aceste activităţi le putem găsi în [18, p.69-70]. Un sistem de probleme bine structurat utilizat în procesul de predare va reflecta în mare parte conţinutul probei de evaluare formativă la tema studiată. Vom accentua necesitatea antrenării studenţilor de la specialităţile respective în procesul de compunere a acestor sisteme de probleme în cadrul lucrărilor practice şi de laborator. Expunem în continuare un exemplu de lucrare practică la tema *Problemele matematice.* ***Clasificarea problemelor matematice. Metode de rezolvare a problemelor aritmetice în clasele primare.***

Executării lucrării de laborator îi vor precede activităţi de pregătire:

1. Vor fi evaluate cunoştinţele studenţilor cu privire la:

- Criteriile de clasificare a problemelor matematice; procedeele de explorare în procesul de rezolvare a problemelor; algoritmii de rezolvare a problemelor standard şi non-standard.
- Metodologia de rezolvare a problemelor de aritmetică studiate în clasele primare şi specificul activităţii de însuşire de către elevi a metodelor de rezolvare: metoda grafică (figurativă); metoda comparaţiei; metoda falsei ipoteze; metoda mersului invers; metoda înlocuirii; metoda reducerii la unitate; metoda rapoartelor şi proporţiilor; metoda regulii de trei simplă; metoda regulilor amestecurilor.
- Alcătuirea schemelor conţinutului diverselor tipuri de probleme; cerinţe faţă de rezolvarea problemelor prin diferite metode.

2. Studenţii vor fi repartizaţi în grupuri mai mici şi fiecare grup va primi sarcini de a selecta probleme şi a le ordona în sisteme structurate în aşa mod, încât să asigure formarea unei noţiuni, însuşirea de către elevi a definiţiei noţiunii, conştientizarea proprietăţilor noţiunii studiate.
3. Studenţii vor examina independent posibilitatea de a compune probleme care se rezolvă prin metodele enumerate mai sus aferente noţiunii studiate şi se vor pregăti pentru a prezenta setul de probleme alcătuit

împreună cu argumentările de rigoare privind imposibilitatea de a compune probleme respective pentru utilizarea celorlalte metode.

2. Rolul modelării problemelor compuse

Modelul este sau o materializare a unei activităţi mintale, sau o idealizare a unei activităţi, a unui fenomen natural sau social. O problemă concretă reprezintă un model al unor situaţii concrete sau posibile. Orice problemă conţine datele iniţiale, care se consideră cunoscute, şi scopul final. Rezolvarea problemei constă în stabilirea unui lanţ bine ordonat de relaţii concrete dintre datele iniţiale şi elementele finale necunoscute. Acest lanţ de relaţii formează metoda sau algoritmul de rezolvare a problemei. Problema poate fi rezolvată prin mai multe metode. A rezolva problema înseamnă a crea o metodă de rezolvare a ei. Producerea unui lanţ de relaţii dintre anumite elemente este o materializare a activităţilor mintale. Capacitatea de a explora datele iniţiale şi de a valorifica oportunităţile pentru rezolvarea problemei este un produs al procesului educaţional, al deprinderilor şi cunoştinţelor acumulate. Momente şi diverse situaţii în procesul rezolvării problemelor matematice au fost descrise de G.Polya în [13-15].

Papirusul Rhind, scris cu aproximativ 5 mii de ani în urmă, papirusul din Moscova, papirusurile egiptene şi tabelele babilonene străvechi demonstrează convingător că matematica mereu propunea metode efective de rezolvare a problemelor cotidiene ale timpurilor respective. Lipsa limbajului matematic nu permitea descrierea metodelor de rezolvare la forma generală: fiecare problemă concretă descria un caz particular, dar se subînţelegea că cuprinde toate cazurile posibile de acest tip. Însă, analogia a fost şi este un procedeu eficient şi frecvent prezent în ştiinţă, tehnică, artă etc. Analogia şi cunoştinţele acumulate dezvoltă intuiţia care, împreună cu inspiraţia, dau naştere iluminării – moment culminator al apariţiei soluţiei.

Limbajul matematic, dezvoltat în secolele XV-XVII, a permis formularea şi fundamentarea legităţilor matematice la cele mai generale forme. Orice problemă concretă conţine în sine modelul unor situaţii generale. Din această cauză, problemele concrete rezolvate trebuie să conţină ideile şi etapele cazului general.

Activitatea de rezolvare a problemelor compuse şi la care datele iniţiale pot fi schimbate urmăreşte să trezească motivaţia învăţării, să dezvolte raţionamentul logic şi modalităţi de abordare a problemelor, să creeze noi căi de rezolvare, să fie conştientizate mai profund relaţiile matematice şi să fie depăşite unele blocaje în găsirea soluţiilor.

Acest principiu este în corelaţie directă cu metoda problematizării, metoda descoperirii şi cu metoda învăţării prin acţiune. Complexitatea problemelor este în corelaţie cu dezvoltarea gândirii, imaginaţiei, cu atractivitatea pentru aplicaţii. În particular, problemele compuse şi problemele generale:

– contribuie la formarea structurilor intelectuale logice;
– formează capacitatea de a investiga valoarea de adevăr a enunţurilor matematice;

îl motivează pe elev (student):

– să construiască modele plecând de la probleme şi reciproc;
– să manifeste perseverenţă şi gândire creativă;
– să cunoască aplicaţiile teoriei în practică.

Modelarea este o formă puternică de învăţare umană. Pentru ca modelarea să aibă succes, profesorii trebuie:

– să formeze capacităţi de a rezolva diferite probleme;
– să dezvolte la elevi (studenţi) imaginaţia, forţa de gândire în viitor şi capacitatea de a vedea în particular tendinţa generală.

Metoda modelării stimulează curiozitatea şi dezvoltă motivaţia învăţării. În acest aspect sunt binevenite problemele cu conţinut de optimizare.

3. Funcţii şi modele

Problema de programare matematică este o problemă de maximizare (sau minimizare) a unor funcţii de mai multe variabile, numite **funcţii obiectiv** (sau **funcţii scop**, sau **funcţii de eficienţă),** ale căror variabile satisfac un sistem de restricţii exprimat prin egalităţi şi inegalităţi. Modelul unei probleme de programare matematică constă în determinarea valorilor maximale ale funcţiilor

$$y_i = f_i(x_1,x_2,...,x_n),\ i \in\{1,2,…,k\},$$

în condiţiile $g_j(x_1,x_2,...,x_n)\ \omega_j\ 0,\ \omega_j \in \{\leq, \geq, =\},\ j \in\{1,2,…,m\}$.

Notă. Simbolul ω_j pentru fiecare j este o relaţie de ordine bine determinată. Prin urmare, expresia $g_j(x_1,x_2,...,x_n)\ \omega_j\ 0$ are una dintre formele: $g_j(x_1,x_2,...,x_n)\leq 0$, $g_j(x_1,x_2,...,x_n) \geq 0$, $g_j(x_1,x_2,...,x_n)=0$.

Prezentăm câteva exemple concrete.

1. Pentru funcţia $y = ax^2+bx+c$ în cazul $a < 0$ (respectiv, $a > 0$) valoarea maximă (respectiv, valoarea minimă) se determină pentru $x = -b/2a$. Acest fapt se exploatează cu succes la rezolvarea multor probleme de extrem.

2. Prezentul depinde de trecut. Prin urmare, trecutul influenţează viitorul. Starea atmosferică (timpul) T depinde de valorile $X_1, X_2,\ldots,X_n$ ale anumitor parametri. Prin urmare, $T = F(X_1, X_2, \ldots , X_n)$. Funcţia T este foarte complicată şi se studiază prin diverse metode numerice. Din această cauză, prognoza meteo exactă este dificilă. Diverse modele cauzale sunt descrise în [7].

3. Teoria funcţiilor continue găseşte aplicaţii profunde şi diverse în geometrie.

4. Ariile sunt determinate pentru figuri plane cvadribile, în particular – pentru figuri poligonale (care se descompun în sume de triunghiuri).

Fie l o dreaptă şi F o figură situate în planul dat. Dreapta l descompune acest plan în două semiplane. Intersecţiile acestor semiplane cu figura F se vor nota cu $F+(l)$ şi $F-(l)$. Vom spune că dreapta l descompune figura F în părţi egale, dacă sunt egale ariile figurilor $F+(l)$ şi $F-(l)$. Tot în aşa mod două drepte concurente l, h vor descompune figura F în patru părţi.

Teorema 3.1. Fie h o dreaptă şi F o figură cvadribilă mărginită. Atunci există o dreaptă l paralelă la dreapta dată h care descompune figura F în părţi egale.

Demonstraţie. Fixăm în plan un sistem de coordonate cartezian, pentru care axa ordonatelor Oy coincide cu dreapta dată h, iar figura F este situată în pătratul $ABCD$, pentru care $A = O(0,0)$ şi $C(a,a)$ sunt vârfuri opuse. Fie $l(x)$ dreapta ce trece prin punctul $M(x,0)$ paralel la axa ordonatelor. Notăm cu $F^+(x)$ partea din dreapta a figurii F faţă de dreapta $l(x)$. Fie $f(x)$ aria figurii $F^+(x)$ şi q aria figurii F. Funcţia $f(x)$ satisface următoarele proprietăţi:

- funcţia $f(x)$ este monoton nedescrescătoare: $f(u) \le f(v)$ pentru $u < v$;
- $f(x) = 0$ pentru $x \le 0$;
- $f(x) = q$ pentru $x \ge a$;
- funcţia $f(x)$ este continuă.

Conform teoremei Bolzano-Cauchy despre valori intermediare, există o valoare $x = c$ pentru care $f(c) = q/2$. *Teorema este demonstrată.*

Cu ajutorul funcţiilor de două variabile în mod similar figura poligonală F poate fi divizată cu două drepte reciproc perpendiculare în patru părţi cu arii egale.

Notă: Dacă figura este un poligon, atunci dreapta l din Teorema 3.1. este unică. Pentru suma a două poligoane care nu se intersectează această dreaptă poate să nu fie unică. Dacă aceasta dreaptă nu este unică, atunci există o infinitate de asemenea drepte. Diverse variante de poziţionare a dreptei şi figurii sunt prezentate în figurile1-3.

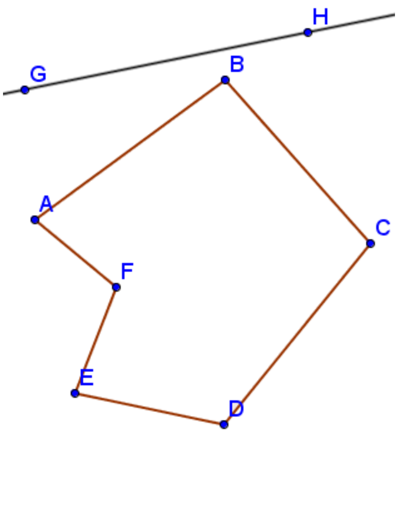

Fig.1.

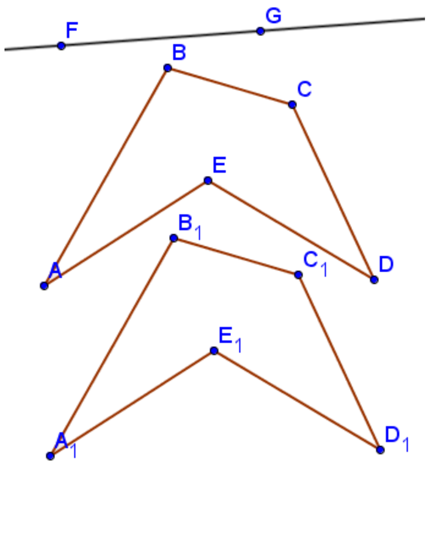

Fig.2.

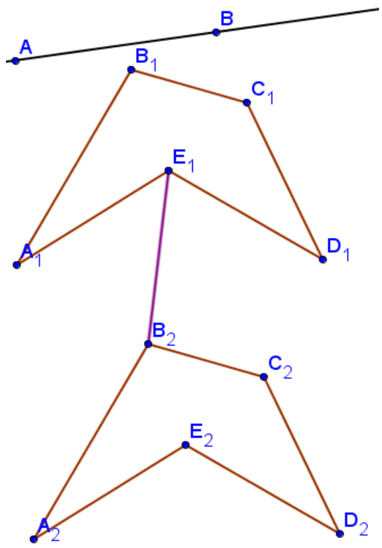

Fig.3.

4. Problema isoperimetrică

Examinăm numai figuri plane. Pentru linii frânte se determină lungimea. Curbele plane pot fi „aproximate” cu linii frânte. Supremul lungimilor liniilor frânte înscrise în curba dată ξ se numeşte lungimea curbei şi se va nota cu $l(\xi)$. Calculul limitelor poate fi efectuat cu ajutorul metodei epuizării (în latină – *methodus exaustionibus*).

Figura mărginită de o linie frântă închisă simplă se numeşte *poligon simplu* sau *poligon*. Poligonul compus este mărginit de un număr finit de linii frânte închise fără puncte comune. Mai general, se pot considera suprafețe poligonale definite ca reuniuni finite de poligonale simple.

Figura F se numeşte convexă, dacă ea conține segmentele cu extremități ce aparțin figurii F. Orice poligon convex este un poligon simplu. Suprafața poligonală se descompune într-un număr finit de triunghiuri care, luate câte două, au părți interioare disjuncte. În particular, printr-o inducție finită după numărul laturilor n se demonstrează că un poligon convex cu n laturi se descompune în $n-2$ triunghiuri. În consecință, dacă poligonul cu n laturi este descompus în o sumă din k triunghiuri, atunci $k \geq n$-2.

Există diverse lucrări în care la nivel elementar se prezintă lungimea curbelor şi aria figurilor. Multe din acestea sunt accesibile şi elevilor [3,4,9,10].

Fixăm un segment e ca unitate de măsură a lungimilor segmentelor. Vom spune că e este unitatea de măsură liniară. Numim unitate de măsură a ariilor un pătrat P_0 de latură e. Se spune că este dată o măsură a ariilor poligoanelor cu unitatea de măsură liniară e, dacă pentru orice poligon P este definit un număr pozitiv $S(P)$ cu proprietățile:

1) Dacă poligoanele P şi Q sunt congruente, atunci $S(P) = S(Q)$.

2) Dacă poligonul P este suma poligoanelor $P_1, P_2, \ldots, P_n$, cu interioare disjuncte, atunci $S(P) = S(P_1) + S(P_2) + \ldots + S(P_n)$.

3) $S(P_0) = 1$.

Funcția $S(P)$ se numeşte *funcție arie*. Dacă unitatea de măsură P_0 este fixată, atunci există o singură funcție arie [4]. Metoda epuizării permite să definim aria pentru figuri cvadribile [3]. Figura F poate fi numită figură cvadribilă, dacă pentru orice $\delta > 0$ există două poligoane P şi Q astfel încât $P \subseteq F \subseteq Q$ şi $S(Q) - S(P) < \delta$.

Dacă segmentul e este unitatea liniară dată, atunci acest segment va fi şi unitate de măsură şi a lungimilor, şi a ariilor, şi a volumelor. Cu alte cuvinte, lungimea, aria şi volumul se vor măsura cu una şi aceeaşi unitate de măsură liniară.

Problema 4.1. Fie a, b, c, d lungimile laturilor unui patrulater. Arătați că dintre toate patrulaterele cu laturile de aceste lungimi cel care are aria maximă este patrulaterul inscriptibil.

Fie K o clasă de figuri geometrice. Admitem că orice figură F din K este determinată de parametrii $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Admitem că $f(F)$ este o funcție. O problemă de maximizare sau minimizare a funcției f cu anumite condiții asupra variabilelor $q_1, q_2, \ldots, q_m$ se numeşte *problemă extremală geometrică*.

Sunt cunoscute diverse probleme extremale geometrice.

Problema 4.2. Fie K_p clasa tuturor figurilor geometrice plane mărginite de curbe de lungimea $2p$. Cu K_{np} notăm totalitatea figurilor din K_p care formează poligoane cu n laturi. Determinați în aceste clase figuri cu aria maximală.

Această problemâ se numeşte *problemă isoperimetrică* şi a apărut în anticitate. În poemul lui Publius Vergilius Maro este descrisă legenda problemei isoperimetrice a reginei Didona [5].

Soluție pentru clasa K_p este cercul, iar pentru clasa K_{np} este un poligon regulat. Una dintre primele demonstrații a fost propusă încă în antichitate de Zenodorus [5]. Rezolvarea ei pentru clasa K_{np} este elementară şi se reduce la examinarea unor relații în triunghi.

Problema 4.3. Fie T_{ap} clasa triunghiurilor cu baza a şi perimetrul $2p$. Demonstrați că triunghiul isoscel din T_{ap} este figura cu aria maximală în această clasă.

Rezolvare. Admitem că baza $a = 2m = BC$ a triunghiului ABC este situată pe axa Ox, originea O este mijlocul bazei şi vârful A are coordonatele (x,h), $h > 0$. Notăm $q=b+c=2p-a$. Fixăm mărimea $h > 0$ a înălțimii triunghiului ABC. Admitem că $x \geq 0$, $B(-m,0)$ şi $C(m,0)$. Atunci $b=\sqrt{h^2+(m-x)^2}$ şi $c=\sqrt{h^2+(m+x)^2}$. Pentru $x=0$ obținem $b=c=\sqrt{h^2+m^2}$. Examinăm funcția $f(x)=\sqrt{h^2+(m+x)^2}+\sqrt{h^2+(m-x)^2}$. Funcția $f(x)$ este nenegativă şi atinge valoarea minimă pentru $x=0$. Pentru $x = 0$ triunghiul este isoscel. Acest fapt rezolvă problema 4.3.

Problema 4.4. Fie T_p clasa triunghiurilor cu perimetrul $2p$, adică $2p = a+b+c$. Demonstraţi că triunghiul echilateral din clasa T_p este figura cu aria maximală în această clasă.

Rezolvare. Afirmaţia din problemă este o consecinţă a problemei precedente. Să prezentăm o soluţie elementară, folosind inegalităţile de tip Cauchy.

1. Fie x,y,u,v mărimi nenegative. Atunci $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ şi $x+y+u+v\geq 4\sqrt[4]{xyuv}$. Deci, $\frac{x+y+z}{3} = \frac{x+y+z+\frac{x+y+z}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{xyz\frac{x+y+z}{3}}$ şi, prin urmare, $\frac{x+y+z}{3} =\geq \sqrt[3]{xyz}$. Acestea sunt inegalităţile Cauchy.

2. Conform formulei lui Heron, aria triunghiului $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Din inegalitatea lui Cauchy obţinem $p=(p-a)+(p-b)+(a+b-p)\geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(a+b-p)}$. Deci, $p^3\geq 27(p-a)(p-b)(a+b-p)$. Prin urmare, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = =\sqrt{p(p-a)(p-b)(a+b-p)} \leq \sqrt{p\frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{9}\sqrt{3}$. Pentru $a=b=c$ vom avea egalitatea $S=\frac{p^2}{9}\cdot\sqrt{3}$. Prin urmare, orice triunghi echilateral este soluţie a problemei.

Problema 4.5. Fie D_p clasa paralelogramelor cu semiperimetrul p, adică $p = a+b$. În clasa D_p determinaţi figurile cu aria maximală.

Rezolvare. Se ştie că $S = ab\cdot\sin\alpha$, unde α este unghiul dintre laturile megieşe ale paralelogramului. Dacă paralelogramul va fi o soluţie a problemei, atunci unghiul α va fi drept şi $S = ab = a(p-a) = -a^2+ap$. Valoarea maximală se obţine pentru $a = b$. Prin urmare, pătratul este soluţie a problemei.

Rezolvarea Problemei 4.2 pentru clasa K_{np}. Fie F o figură din clasa K_{np}. Notăm cu $A_1, A_2,..., A_n$ vârfurile poligonului F.

În primul rând, observăm că orice unghi interior este ascuţit. În caz contrar, uşor se construieşte un poligon P din K_{np} de o arie mai mare.

Din Problema 4.3 obţinem că laturile poligonului F sunt egale, dacă F este o soluţie.

Dacă F este o soluţie, atunci prin orice vârf trece o unică axă de simetrie. Prin urmare, toate unghiurile interioare sunt egale şi F este un poligon regulat.

Din soluţia Problemei 4.2 pentru clasa K_{np} grecii antici au conchis că cercul este soluţie a Problemei 4.2 pentru clasa K_p. Cu acest scop Zenodorus demonstrează:

Teorema 4.1. Cercul are o arie mai mare decât orice poligon cu acelaşi perimetru.

Menţionăm următoarea teoremă.

Teorema 4.2. Fie a, b, c, d lungimile laturilor patrulaterului $ABCD$ şi $2p=a+b+c+d$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. Aria $S(ABCD)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.
2. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

Teorema 4.2 a fost demonstrată de Brahmagupta, matematician şi astronom indian al secolului al VII-lea. Principala lucrare a lui Brahmagupta, *Brahmasphuta-siddhanta* (Deschiderea Universului), scrisă în anul 628, conţine câteva idei remarcabile, incluzând rolul matematic al lui zero, reguli de folosire a numerelor negative şi pozitive, o metodă pentru calcularea rădăcinilor pătratice, metode de rezolvare a ecuaţiilor liniare şi a unor pătratice, reguli de calcul pentru sumele seriilor. Dacă considerăm $A = D$ şi $d = 0$, atunci din formula lui Brahmagupta obţinem formula lui Heron despre aria triunghiului.

5. Relaţii în triunghi

Prezintă interes următoarele probleme.

Problema 5.1. Fie R raza cercului circumscris şi r raza cercului înscris în triunghiul cu aria S.

5.1.1. Dacă mărimea R este fixată, determinaţi condiţia pentru care mărimea r este maximală. (Răspuns: $r_{max} = R/2$, triunghiul este echilateral).

5.1.2. Dacă mărimea r este fixată, determinaţi condiţia pentru care mărimea R este minimală. (Răspuns: $R_{min} = 2r$, triunghiul este echilateral).

5.1.3. Dacă mărimea R este fixată, determinaţi condiţia pentru care mărimea S este maximală. (Răspuns: $4S_{max} = 3\sqrt{3}\,R^2$, triunghiul este echilateral).

Indicaţie. De aplicat formula lui Euler $d^2 = R(R-r)$, unde d este distanţa dintre centrele cercurilor înscrise şi circumscrise la triunghiul dat.

Problema 5.2. În ce condiţii există un triunghi ABC în care înălţimile se raportă ca $m:n:q$?

Rezolvare. Vom avea $h_a:h_b:h_c = S/a:S/b:S/c = 1/a:1/b:1/c$. Un aşa triunghi există dacă şi numai dacă există un triunghi cu laturile $1/m,\ 1/n,\ 1/q$.

6. Relaţii în poliedre convexe

Fie P un poliedru convex. Notăm cu f numărul feţelor, cu m numărul muchiilor, cu v numărul vârfurilor, cu $f_3, f_4, f_5, \ldots$ numărul feţelor cu 3, 4, 5,… muchii respectiv, cu $v_3, v_4, v_5, \ldots$ numărul vârfurilor din care pleacă 3, 4, 5,… muchii respectiv.

Poliedrul P se numeşte topologic regulat, dacă este convex, toate feţele au acelaşi număr de muchii şi din fiecare vârf pleacă acelaşi număr de muchii (feţe).

Poliedrul P se numeşte regulat, dacă P este topologic regulat şi toate feţele sunt poligoane regulate.

În poliedrul regulat P toate unghiurile diedre sunt congruente şi toate unghiurile poliedre de la vârfuri sunt congruente. Poliedrele regulate se numesc *figurile lui Platon,* care a stabilit că există numai cinci poliedre regulate: tetraedrul cu 4 feţe, hexaedrul cu 6 feţe, octaedrul cu 8 feţe, dodecaedrul cu 12 feţe şi icosaedrul cu 20 feţe.

Problema 6.1. Demonstraţi că au loc inegalităţile:

6.1.1. $2m = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots$.

6.1.2. $2m = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \ldots$.

6.1.3. $m + 6 \le 3f \le 2m$.

6.1.4. $m + 6 \le 3v \le 2m$.

6.1.5. În poliedrul regulat cu f feţe cu p muchii şi q muchii ce pleacă dintr-un vârf vom avea $pf = 2m$ şi $qv = 2m$.

6.1.6. $f + v - m = 2$ (Teorema lui Euler).

Rezolvare. Pentru a demonstra afirmaţiile 6.1.1-6.1.5, este suficient să observăm că:

A. Fiecare muchie aparţine numai la două feţe.

B. Fiecare muchie conţine două vârfuri.

C. Orice poliedru regulat este convex.

Pentru a demonstra afirmaţia 6.1.6, vom cerceta descompuneri speciale ale poligoanelor.

Fie Π un poligon convex. Se numeşte *hartă* pe poligonul Π o totalitate T de poligoane $C_1, C_2, \ldots, C_n$ cu proprietăţile:

– Π este sumă a poligoanelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

– două poligoane diferite C_i, C_j sau nu se intersectează, sau au numai un vârf comun, sau au un număr finit de laturi comune.

Pentru orice hartă T a poligonului Π numărul $e(T) = s + v - l$, unde s este numărul de poligoane, v este numărul de vârfuri şi l este numărul de laturi ale poligoanelor din T, se numeşte *numărul lui Euler al hărţii*.

Să examinăm două modificări ale hărţilor.

Modificarea 1. Fixăm o latură b a hărţii T. În interiorul laturii b fixăm un punct B.

Punctul B împarte latura b în două segmente b_1, b_2. Dacă la vârfurile din T adăugăm şi B ca un vârf nou, iar latura b se înlocuieşte cu b_1 şi b_2, atunci obţinem o hartă nouă T'. Vom avea $e(T') = e(T)$.

Modificarea 2. Fixăm două vârfuri diferite V, W ale unui poligon C al hărţii T.

Poligonul C se descompune în două poligoane şi frânta δ este partea comună a lor. În rezultat obţinem o hartă nouă T'. Vom avea $e(T') = e(T)$.

D. $e(T) = 1$ pentru orice hartă T a poligonului Π.

Cea mai simplă hartă T_0 a poligonului Π este formată din unicul poligon Π. Pentru această hartă afirmaţia D este adevărată. Fie T_1, T_2 două hărţi ale poligonului Π. Punctele de intersecţie ale laturilor din T_1 cu laturile din T_2 se adaugă ca vârfuri comune la ambele hărţi. Cu ajutorul acestor laturi efectuăm modificări de tipul 2 la ambele hărţi. În rezultat obţinem o nouă hartă T, în care orice poligon este intersecţia unui poligon din T_1 şi a unui poligon din T_2. Deoarece T se obţine în rezultatul modificării multiple a hărţii T_1, vom avea $e(T) = e(T_1)$. De asemenea, $e(T) = e(T_2)$.

Prin urmare, $e(T_1) = e(T_2) = e(T_0) = 1$. Afirmaţia D este demonstrată.

Demonstraţia afirmaţiei 6.1.1. Fie P un poligon convex. Fixăm o faţă. Cu ajutorul proiecţiei centrale toate celelalte feţe ale poligonului P se proiectează într-o hartă T a poligonului F. Conform construcţiei, $e(T) = (f-1) + v - m$. Deci, din afirmaţia D obţinem $(f-1) + v - m = 1$. Aşadar, $f + v - m = 2$.

Hărţile pot fi construite şi pe suprafeţe. Cu acest scop pot fi introduse poligoane curbilinii. Fiecare poligon se descompune în triunghiuri. Deci, putem examina hărţi triunghiulare curbilinii. Fie T o hartă din triunghiuri curbilinii a unei suprafeţe S. Notăm cu $V_1, V_2, \ldots, V_m$ vârfurile din T. Există în spaţiu aşa puncte $W_1, W_2, \ldots, W_m$, încât:

– orice trei puncte diferite din $W_1, W_2, \ldots, W_m$ nu sunt coliniare;
– orice patru puncte diferite din $W_1, W_2, \ldots, W_m$ nu sunt coplanare.

Vom spune că punctele $W_1, W_2, \ldots, W_m$ sunt în poziţie generală. Trei puncte W_i, W_j, W_k sunt marcate, dacă punctele cu indici respectivi V_i, V_j, V_k sunt vârfuri ale unui triunghi curbilinii din T. Triplele marcate formează triunghiuri. Aceste triunghiuri formează o nouă hartă rT , care se va numi realizarea liniară a hărţii T. Realizarea rT formează o nouă suprafaţă rS, care se va numi realizarea liniară a suprafeţei S. Vom avea că $e(T) = e(rT)$. Aceasta permite să calculăm numărul lui Euler al suprafeţelor. Deci, în aşa mod pot fi organizate investigaţiile pe diverse teme de cercetare [2,3,9,10, 14-16].

Bibliografie:

1. CERGHIT, I. *Metode de învăţământ*. Iaşi: Polirom, 2006.
2. CIOBANU, M., SALI, L. Consideraţii asupra cvadraturii şi descompunerii poligoanelor. În: *Materialele Conferinţei internaţionale „Învăţământul universitar din Republica Moldova la 80 de ani"*. Vol.II *„Probleme actuale ale Didacticii Matematicii, Informaticii şi Fizicii"*, Chişinău, 28-29 septembrie. Chişinău, 2010.
3. CIOBANU, M., SALI, L. Consideraţii asupra măsurării mărimilor geometrice. În: *Materialele Conferinţei internaţionale „Învăţământul universitar din Republica Moldova la 80 de ani"*. Vol.II *„Probleme actuale ale Didacticii Matematicii, Informaticii şi Fizicii"*, Chişinău, 28-29 septembrie. Chişinău, 2010.
4. COURANT, R., ROBBINS, H. *What is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1996.
5. CUCOŞ, C. *Istoria pedagogiei*. Iaşi: Polirom, 2001.
6. GOLU, M. *Dinamica personalităţii*. Bucureşti: Geneza, 1993.
7. IONESCU, M., RADU, I. (coord.). *Didactica modernă*, Ediţia a II-a, revizuită. Cluj-Napoca: Dacia, 2001.
8. KING, R.F. *Strategia cercetării*. Iaşi: Polirom, 2005.
9. MIRON, R., BRÂNZEI, D. *Fundamentele aritmeticii şi geometriei*. Bucureşti: Editura Academiei Române, 1983.
10. MIRON, R. *Geometrie elementară*. Bucureşti: EDP, 1968.
11. PIAGET, J. *Psihologia copilului*. Bucureşti: EDP, 1970.
12. PIAGET, J. *Psihologia inteligenţei*. Bucureşti: Editura Ştiinţifică, 1965.
13. POLYA, G. *Cum rezolvăm o problemă*. Bucureşti: EDP, 1965.
14. POLYA, G. *Descoperirea în matematică*. Bucureşti: EDP, 1971.
15. POLYA, G. *Matematica şi raţionamentele plauzibile*. Vol.I şi II. Bucureşti: Editura Ştiinţifică, 1962.
16. SALI, L. *Bazele metodologice ale organizării şi desfăşurării activităţii extracurriculare la matematică.* Chişinău: UST, 2012.
17. VLĂSCEANU, L. (coord), *Şcoala la răscruce – Schimbare şi continuitate în curriculumul învăţământului obligatoriu. Studiu de impact*. Iaşi: Polirom, 2002.
18. *Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики:* Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Лященко Е.И. Москва: Просвещение, 1988.
19. ЛУПУ, И., ЧОБАН-ПИЛЕЦКАЯ, А. *Мотивация обучения математике.* Кишинэу, 2008.

Prezentat la 08.06.2013