SIMETRIA DESCOMPUNERILOR REGULATE ALE SPAŢIULUI GEOMETRIC PONDERAT CU ÎNCĂRCĂTURĂ „FIZICĂ"

Alexandru LUNGU

Catedra Algebră şi Geometrie

In the present paper are studied the mixed transformations of geometric space well-balanced by scalar or orientated "physical" load. Are determined the conditions in which one mixed transformation is or exactly transformation of $P-$symmetry, or exactly transformation of $\overline{P}-$symmetry, or exactly transformation of W_p-symmetry, or exactly transformation of W_q- symmetry.

1. Teoria grupurilor s-a impus de mai mult timp ca un instrument foarte eficient de cercetare a celor mai dificile probleme din fizică şi matematică. Dezvoltarea rapidă a metodelor teoriei grupurilor pe parcursul secolului XX, stimulată de descoperiri noi, a transformat conţinutul teoriei simetriei clasice şi a lansat-o la un nivel calitativ nou. Trecerea de la grupurile cristalografice de simetrie clasică la grupurile cristalografice ale diferitelor simetrii de coloraţie generalizate a deschis posibilităţi şi orizonturi noi atât în domeniile aplicaţiilor lor în diferite ramuri ale ştiinţelor naturale şi artelor, cât şi în însăşi teoria generală a grupurilor.

Scopul cercetării efectuate în această lucrare este: în primul rând, de a determina toate cazurile posibile de structură concretă a transformărilor mixte ale spaţiului geometric ponderat cu încărcătură „fizică" scalară sau cu încărcătură „fizică" orientată; în al doilea rând, de a găsi condiţiile în care o transformare mixtă este nu altceva decât o transformare de simetrie generaliză de un anumit tip.

2. Fie dat un spaţiu geometric S de curbură constantă descris de către grupul discret de simetrie G. Grupul G descompune spaţiul S în domenii fundamentale S_i. Este evident că $S=\bigcup_{i\in I} S_i=\{S_i\}$, unde I este o mulţime de indici de puterea egală cu ordinul grupului G. De asemenea, este dată o mulţime finită $N=\{1,2,...,m\}$, unde „indicii" $r\in N$ sunt nişte calităţi omogene de natură fizică (faze ale aceluiaşi fenomen). Considerăm un grup tranzitiv de substituţii P pe mulţimea dată N. Fie Q un divizor normal al grupului P, care împarte mulţimea N în t submulţimi dizjuncte U_j a câte k „indici" fiecare: $N=U_1\cup U_2\cup...\cup U_t$, unde $kt=m$. Menţionăm că subgrupul Q este tranzitiv pe fiecare din submulţimile U_j.

Vom atribui fiecărui punct interior M_i al domeniului S_i (pentru fiecare $i\in I$ fixat) cel puţin un „indice" r_i din mulţimea considerată N. Dacă tuturor punctelor interioare M_i ale aceluiaşi domeniu fundamental S_i li se atribuie acelaşi ansamblu $U_j=\{r_1,r_2,...,r_k\}$ de „indici" din mulţimea N, atunci repartizarea respectivă vom numi-o ***uniformă***. Astfel, spaţiul geometric S de curbură constantă se transformă într-un spaţiu cu încărcătură, pe care îl vom numi ***spaţiu geometric uniform ponderat „fizic" cu ponderea completă N.*** Mai mult, din descompunerea regulată a spaţiului $S=\{S_i\}$, generată de grupul discret de simetrie clsică G, se obţine o descompunere regulată a spaţiului geometric uniform ponderat „fizic" $S^{(N)}$ [1,2].

Transformările mixte $\tilde{g}$ ale spaţiului ponderat $S^{(N)}$ sunt mai complexe decât transformările de simetrie clasică ale spaţiului iniţial neponderat S. Ele includ în sine atât informaţia despre transformarea propriu-zisă a punctelor, cât şi informaţia despre transformarea (schimbarea) „indicilor" r_i, localizaţi în punctele interioare ale domeniilor fundamentale S_i. Cu alte cuvinte, transformarea $\tilde{g}$ este compusă din două componente: una pur geometrică g de simetrie clasică, care acţionează direct asupra punctelor M, şi alta w ce include în sine legea de schimbare totală sau parţială a „indicilor" [3,4].

Transformările mixte $\tilde{g}$ ale spaţiului uniform ponderat $S^{(N)}$ cu pondere scalară sunt formate din două componente independente: transformarea pur geometrică g care acţionează numai asupra punctelor M şi legea w de schimbare a calităților – indici localizați în M. Sunt posibile două cazuri: 1) domeniul de acțiune a legii de schimbare a „indicilor” este ***global*** (în toate punctele „indexate” ale spațiului ponderat $S^{(N)}$ acționează aceeaşi substituție p a „indicilor”): $\tilde{g} = gp$; 2) domeniul de acțiune a legii de schimbare a „indicilor” este ***local*** (pentru punctele diferitelor domenii fundamentale, în general, există substituții diferite): $\tilde{g} = gw$ [3].

Spre deosebire de cazul ponderii scalare, în cazul ponderii orientate transformările mixte $\tilde{g}$ sunt formate din două componente ce joacă roluri diferite: componenta geometrică g acționează şi asupra punctelor, în care sunt localizați „indicii”-calități, şi asupra acestor „indici” conform unei legi date în prealabil ce nu depinde de puncte, iar componenta a doua descrie o transformare suplimentară-compensatoare a „indicilor”. În general, componentele acestor transformări mixte de simetrie generalizată $\tilde{g}$ nu sunt comutative. Şi în acest caz sunt posibile două subcazuri: 1) domeniul de acțiune a legii de schimbare a „indicilor” este ***global***: $\tilde{g} = pg$; 2) domeniul de acțiune a legii de schimbare a „indicilor” este ***local***: $\tilde{g} = wg$ [4].

3. Vom analiza succint subcazul când schimbarea „indicilor” este determinată de aceeaşi substituție p dinr-un grup tranzitiv de substituții P pe mulțimea finită de „indici” N, adică când domeniul de acțiune a legii de schimbare a „indicilor” este ***global***. Dacă „indicii” r din mulțimea finită $N = \{1,2,...,m\}$ reprezintă nişte calități omogene de natură fizică ce poartă un caracter scalar (temperatură, presiune, densitate etc.), atunci transformarea mixtă $\tilde{g} = pg = gp$ a spațiului $S^{(N)}$, numit *spațiu geometric uniform ponderat „fizic” cu ponderea scalară* N, este nu altceva decât o transformare de P-simetrie Zamorzaev [5]. Menționăm, că transformarea $\tilde{g} = gp$ este transformare de $P-$simetrie (transformare de cvasisimetrie, definită de grupul de substituții P) dacă ea este o transformare izometrică a spațiului „indexat” $S^{(N)}$ care aplică fiecare punct „indexat” (M,i) în punctul „indexat” (M',k_i), astfel încât substituția $p = \begin{pmatrix} 1\,2\,...\,m \\ k_1k_2...k_m \end{pmatrix}$ este un element din grupul P (*a se compara* cu [5]).

Totalitatea componentelor geometrice g ale transformărilor $\tilde{g} = gp$ din grupul $G^{(P)}$ de P-simetrie formează grupul G, numit ***grup generator pentru*** $G^{(P)}$**,** iar totalitatea $P' = \{p \mid gp \in G^{(P)}\}$ este un subgrup al grupului considerat P. Grupul de substituții fixat inițial, cu ajutorul căruia se defineşte transformarea de P-simetrie, se numeşte ***grup de definire pentru*** $G^{(P)}$. Vom menționa, că grupurile de P-simetrie $G^{(P)}$ sunt subgrupuri ce verifică anumite condiții ale produsului direct al grupului generator G cu cel de definire P: $G^{(P)} \leq G \times P$.

Diferite aspecte ale teoriei grupurilor de simetrii generalizate (ce se includ în calitate de cazuri particulare în schema de clasificare a P-simetriilor) şi aplicațiile lor în diferite domenii ale ştiințelor naturale au fost abordate în diferite perioade de timp de numeroşi savanți din Rusia, Iugoslavia, Uniunea Europeană, SUA, India şi alte țări, care au contribuit substanțial la dezvoltarea teoriei unor tipuri de grupuri (*a se vedea* bibliografia din [6-8]).

Teoria generală a grupurilor de P-simetrie (inclusiv clasificarea lor pe tipuri, elaborarea metodelor generale de deducere din grupurile date inițial P şi G, elaborarea diferitelor niveluri de clasificare a înseşi P-simetriilor, deducerea concretă a grupurilor de anumite tipuri diferite pentru unele P-simetrii concrete din unele categorii de grupuri cristalografice G în calitate de grupuri generatoare, de asemenea, aplicarea grupurilor de anumite P-simetrii concrete la descrierea grupurilor multidimensionale de simetrie de anumite categorii) au constituit obiectul de studiu pe parcursul ultimelor patru-cinci decenii pentru unii membri ai şcolii ştiințifice de geometrie discretă şi cristalografie matematică fondate de A.Zamorzaev (*a se vedea* bibliografia din [6-9,10,11]).

Fie că „indicii” $r \in N$ sunt nişte calități omogene de natură fizică ce posedă orientație (de exemplu, vectori cu module egale). În rezultatul „indexării” spațiului geometric considerat S cu pondere orientată vom obține un spațiu geometric uniform ponderat „fizic” cu ponderea orientată completă N. Prin urmare, în cazul ponderii orientate a spațiului $S^{(N)}$ rezultatul acțiunii transformării mixte $\tilde{g} = pg$ asupra punctului „indexat” $< M,i >$ poate fi prezentat sub forma următoare: $\tilde{g}(< M,i >) = pg(< M,i >) =< g(M), p[g](i) >$, unde $[g]$ reprezintă în formă de substituție legea de acțiune a lui g asupra „indicelui" i. Este evident că, în rezultatul acțiunii consecutive asupra punctului „indexat" $<M,i>$ a două transformări mixte $\tilde{g}_1 = p_1 g_1$ şi $\tilde{g}_2 = p_2 g_2$, se va obține punctul „indexat" $<M',i'>= \tilde{g}_2\tilde{g}_1(<M,i>) = p_2 g_2 p_1 g_1(<M,i>) = = p_2 g_2(<g_1(M), p_1[g_1](i)>) = <g_2 g_1(M), p_2[g_2]p_1[g_1](i)>$. Cu alte cuvinte, dacă $\tilde{g}_2 \cdot \tilde{g}_1 = \tilde{g}_3$, atunci $\tilde{g}_3 = p_3 g_3$, $g_3 = g_2 g_1$, iar $p_3[g_3] = p_2[g_2]p_1[g_1]$, adică, $p_3 = p_2[g_2]p_1[g_2^{-1}]$. Deci, legea de compoziție a transformărilor mixte $\tilde{g}_i$, la nivel de componente, are forma $\tilde{g}_2 \cdot \tilde{g}_1 = p_2 g_2 \cdot p_1 g_1 = p_2 p_1^{g_2} g_2 g_1 = p_3 g_3 = \tilde{g}_3$, unde $p_1^{g_2} = g_2 p_1 g_2^{-1}$. Drept consecință, transformarea mixtă $\tilde{g} = pg$ este nu altceva decât o transformare de $\bar{P}$-simetrie [12] pentru cazul când componenta p este un element al grupului de substituții P.

Vom menționa că transformarea $\tilde{g} = pg$ a spațiului cu pondere orientată $S^{(N)}$ este transformare de $\bar{P}-$simetrie, dacă componenta sa geometrică g acționează direct şi asupra punctelor, şi asupra „indicilor", conform unei legi date ce nu depinde de puncte, iar componenta p este o substituție suplimentară-compensatoare a „indicilor" şi $p \in P$. Cu alte cuvinte, dacă $\tilde{g}(\ <M,i>\ ) = \ <M',i'>$, atunci g aplică fiecare punct „indexat" $<M,i>$ în punctul „indexat" $<g(M),[g](i)>$, iar p transformă „indecele" $[g](i) = j$ în „indecele" $p[g](i) = i'$.

Grupurile de $\bar{P}$-simetrie $G^{(\bar{P})}$ sunt subgrupuri ce verifică anumite condiții ale produsului semidirect de dreapta [13] al grupului de definire P cu grupul generator *G,* însoțit de un omomorfism marcat $\varphi : G \to AutP$. Spre deosebire de P-simetria Zamorzaev, în cazul grupurilor de $\bar{P}$-simetrie $G^{(\bar{P})}$ totalitatea $P' = \{p \mid gp \in G^{(\bar{P})}\}$, în general, nu e grup, dar verifică condiția $e \subseteq P' \subseteq P$. Teoria generală a grupurilor de $\bar{P}$-simetrie (inclusiv clasificarea lor pe tipuri, familii şi subfamilii, elaborarea metodelor generale de deducere din grupurile date inițial P şi G şi deducerea concretă a grupurilor de anumite tipuri diferite pentru unele $\bar{P}$-simetrii concrete din unele categorii de grupuri cristalografice G în calitate de grupuri generatoare) a fost elaborată în cadrul şcolii ştiințifice chişinăuene de geometrie discretă şi cristalografie matematică [7,12,14-16].

4. Fie P un grup tranzitiv de substituții pe o mulțime finită *N={1,2,...,m},* G un grup discret de simetrie clasică, iar φ un omomorfism cu nucleul H al grupului G pe subgrupul Φ al grupului tuturor automorfismelor grupului P. Mulțimea $G^* = GP$ a perechilor gp, unde $g \in G$ şi $p \in P$, formează un grup cu operația

$$g_i p_i \cdot g_j p_j = g_k p_k, \tag{1}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $p_k = (g_j^{-1} p_i g_j) p_j = \bar{\varphi}_{g_j}(p_i) p_j$, iar $\bar{\varphi}_{g_j} = \varphi(g_j)$. Grupul obținut $G^* = GP$ se numeşte ***produs semidirect de stânga*** al grupului P cu grupul de operatori G, însoțit de omomorfismul φ cu nucleul H. Analog se defineşte şi ***produsul semidirect de dreapta*** $G' = PG = \{pg \mid p \in P, g \in G\}$ al grupului P cu grupul de operatori G, însoțit de omomorfismul φ cu nucleul H. Vom menționa, că în acest caz operația de grup are forma

$$p_i g_i \cdot p_j g_j = p_k g_k, \tag{2}$$

unde $p_k = p_i(g_i p_j g_i^{-1}) = p_i \bar{\varphi}_{g_i}(p_j)$, $g_k = g_i g_j$, iar $\bar{\varphi}_{g_i} = \varphi(g_i)$ [13].

Construim produsul cartezian *W* al copiilor izomorfe cu *P* şi indexate sus în dreapta cu elemente din *G*, adică $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$). Fie că se dă şi includerea izomorfă φ a grupului *G* în grupul tuturor automorfismelor grupului W conform regulii $\varphi(g) = \bar{g}$, unde automorfismul $\bar{g}$ acționează asupra elementelor $w = <..., p^{g_i}, ...>$ din *W* prin intermediul *g*-deplasărilor la stânga ale componentelor lor, adică $\bar{g}(w) = w^g = <..., p^{gg_i}, ...>$. Se consideră mulțimea $A = GW$ tuturor perechilor *gw,* unde $g \in G$ şi $w \in W$. În mulțimea considerată se introduce legea de compoziție

$$g_i w_i \cdot g_j w_j = g_k w_k, \tag{3}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = \bar{g}_j(w_i)w_j = w_i^{g_j} w_j$ iar $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$. Nemijlocit se verifică că A este un grup cu operația (3). Grupul A se numeşte ***împletire standardă carteziană de stânga*** a grupului P cu grupul de operatori G, însoțită de deplasarea directă la stânga a componentelor (*a se compara* cu [17,18]). Structura algebrică obținută se notează cu simbolul $\bar{G}\ Wr\ P$ sau cu simbolul $\bar{G}\,\bar{\wr}\,P$. Trebuie de menționat că rolul grupurilor G şi P în împletirea standardă carteziană de stânga obținută este diferit. Anume: grupul P joacă un rol pasiv, participând cu copiile sale izomorfe în structura considerată, pe când grupul G joacă un rol activ, implicându-se prin intermediul elementelor sale în operația de grup şi generând anumite automorfisme ale grupului W. Toate automorfismele neidentice ale grupului W, generate de elementele g din grupul G, prin intermediul $g-$deplasărilor la stânga ale componentelor din $w \in W$, sunt externe [19]. Este evident şi faptul că grupul A este un produs semidirect de stânga al grupului W cu grupul de operatori G, însoțit de izomorfismul $\varphi: G \to AutW$, unde $\varphi(g) = \bar{g}$.

În particular, dacă W este un produs direct al copiilor izomorfe cu grupul P şi indexate cu elemente din grupul G, atunci prin analogie se va obține ***împletirea standardă directă de stânga*** a grupurilor P şi G, care se notează cu simbolul $\bar{G}\ wr\ P$ sau cu simbolul $\bar{G} \wr P$.

În mod analog se defineşte şi ***împletirea standardă carteziană de dreapta*** $B = WG = \{wg \mid w \in W, g \in G\}$ a grupului P cu grupul de operatori G, însoțit de izomorfismul $\varphi: G \to AutW$, unde $\varphi(g) = \bar{g}$, $\bar{g}_i(w_j) = w_j^{g_i^{-1}}$ şi $w_j^{g_i^{-1}}(g_k) = w_j(g_k g_i^{-1})$.

Find date grupurile G, P şi $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$), considerăm includerea izomorfă $\varphi: G \to AutW$ conform regulii $\varphi(g) = \bar{g}$, unde automorfismul $\bar{g}$ acționează asupra elementelor w din W prin intermediul g-deplasărilor la stânga ale componentelor lor, de asemenea, omomorfismul $\tau: G \to AutW$ cu nucleul $Ker\tau = H$, unde $\tau(g) = \bar{\tau}_g$ şi $\bar{\tau}_g(w) = gwg^{-1}$. În mulțimea $C=WG$ tuturor perechilor wg, unde $w \in W$ şi $g \in G$, vom defini legea de compoziție

$$w_i g_i \cdot w_j g_j = w_k g_k, \tag{4}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} \bar{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\bar{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$.

Vom argumenta pe scurt că mulțimea C formează un grup cu legea de compoziție (4). Într-adevăr, închiderea mulțimii C față de operația (4) urmează din faptul că W şi G sunt grupuri, iar orice automorfism al grupului W aplică elementul w din W pe elementul w' tot din W. Asociativitatea operației (4) se verifică nemijlocit. Existența în C a elementului neutru $w_0 1$ (unde w_0 – unitatea grupului W, iar 1 – unitatea grupului G) se verifică elementar. Elementul simetric cu $w_i g_i$ are forma $\tilde{w}_i \tilde{g}_i$, unde $\tilde{w}_i = (\bar{\tau}_{g_i^{-1}}(w_i^{-1}))^{g_i^{-1}}$, iar $\tilde{g}_i = g_i^{-1}$. Într-adevăr, din egalitatea $\tilde{w}_i \tilde{g}_i \cdot w_i g_i = \tilde{w}_i^{g_i} \bar{\tau}_{\tilde{g}_i}(w_i) \tilde{g}_i g_i = w_0 1$ urmează că $\tilde{g}_i = g_i^{-1}$, iar $\tilde{w}_i^{g_i} \bar{\tau}_{\tilde{g}_i}(w_i) = w_0$. Drept consecință, $\tilde{w}_i^{g_i} = (\bar{\tau}_{\tilde{g}_i}(w_i))^{-1} = \bar{\tau}_{g_i^{-1}}(w_i^{-1})$, de unde $\tilde{w}_i = (\bar{\tau}_{g_i^{-1}}(w_i^{-1}))^{g_i^{-1}}$.

Vom numi grupul C ***împletire standardă carteziană încrucişată*** a grupului pasiv P cu grupul activ G, însoțită de deplasarea directă la stânga a componentelor şi de omomorfismul τ al conjugării de drepta. Vom nota-o cu simbolul $P\ \bar{W}r_{\tau H(\Phi)} \bar{G}$ sau cu simbolul $P\,\bar{\bar{\wr}}_{\tau H(\Phi)} \bar{G}$, unde $H = Ker\tau$, iar $\Phi = Im\ \tau = \tau(G) < Aut\,W$.

În particular, dacă W este produsul direct al cópiilor izomorfe cu grupul P şi indexate cu elemente din grupul G, atunci prin analogie vom obține ***împletirea standardă directă încrucişată*** a grupurilor P şi G, pe care vom nota-o cu simbolul $P\ \bar{w}r_{\tau H(\Phi)} \bar{G}$ sau cu simbolul $P\,\bar{\wr}_{\tau H(\Phi)} \bar{G}$.

Vom menționa că dacă $Ker\tau = G$, atunci toate automorfismele însoțitoare $\bar{\tau}_g$ ale conjugării de drepta coincid cu automorfismul identic al grupului W şi, ca urmare, operația (4) degenerează în operația (3). Cu alte cuvinte, în cazul când $Ker\tau = G$ împletirea standardă carteziană încrucişată a grupului P cu grupul G degenerează în împletire standardă carteziană de stânga a grupului P cu grupul G, însoțită de deplasarea directă la stânga a componentelor elementelor din $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$.

Prezintă interes şi forma operaţiei (4) pe mulţimea D a tuturor perechlor wg, unde $w \in DiagW$ şi $g \in G$, care este un subgrup din *C*. Elementele din D se înmulţesc conform legii

$$w_i g_i \cdot w_j g_j = w_k g_k, \tag{5}$$

unde $w_k = w_i \bar{\tau}_{g_i}(w_j)$, iar $g_k = g_i g_j$. Operaţia (5) atestă că D este un produs semidirect de dreapta al grupului $DiagW$ cu grupul de operatori *G,* însoţit de omomorfismul $\tau : G \to Aut(DiagW)$. Menţionăm, că grupul $DiagW$ este izomorf cu grupul iniţial *P,* de aceea $Aut(DiagW) \cong AutP$.

5. Considerăm în continuare subcazul când domeniul de acţiune a substituţiilor p din grupul iniţial dat de substituţii P este local. Cu alte cuvinte, în diferite puncte interioare M_i şi M_j ale domeniilor fundamentale G-echivalente „indicii" r_i şi, respectiv, r_j, localizaţi în ele, sunt transformaţi, în general, de către diferite substituţii p_i, şi, respectiv, p_j, din grupul considerat P. Deci, în orice transformare de simetrie generalizată $\tilde{g} = gw$ a spaţiului $S^{(N)}$ uniform ponderat „fizic" cu pondere scalară şi, respectiv, $\tilde{g} = wg$ a spaţiului uniform ponderat cu pondere orientată, pentru fiecare punct M_i (M_i este punct interior al domeniului fundamental S_i) al sistemului de puncte G-echivalente este inclusă substituţia respectivă. Prin urmare, $w = < p^{g_1}, p^{g_2}, ..., p^{g_n}, ... >$, unde $p^{g_i} = p^{g_1}$ dacă în punctele $M = g_1(M)$ şi $M_i = g_i(M) \neq M$ „indicii" sunt supuşi aceleiaşi substituţii $p \in P$, iar $p^{g_i} \neq p^{g_j}$, dacă în punctele diferite $g_i(M)$ şi $g_j(M)$ „indicii" sunt transformaţi de diferite substituţii din grupul iniţial dat P. În rezultat, pentru cazul analizat legea de schimbare a calităţilor-indici $w = < p^{g_1}, p^{g_2}, ..., p^{g_n}, ... >$ este nu altceva decât un element din grupul $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$).

Dacă ponderea spaţiului $S^{(N)}$ este scalară, atunci transformarea mixtă $\tilde{g} = gw$ constituie o transformare de $W_p -$simetrie [20,21]. Menţionăm, că transformarea $\tilde{g} = gw$ a spaţiului cu pondere scalară $S^{(N)}$ este transformare de $W_p -$simetrie, dacă componenta sa geometrică g acţionează direct numai asupra punctelor $M_k = g_k(M_1)$, iar „indicii" localizaţi în punctul M_k sunt transformaţi de către substituţia p^{g_k} (din grupul P^{g_k}, care este o copie izomorfă a lui P) ce reprezintă $g_k -$componentă în elementul w al grupului $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ (a se compara cu [20, 21]).

Grupurile de $W_p -$simetrie $G^{(W_p)}$ sunt subgrupuri ce verifică nişte condiţii speciale ale împletirii carteziene standard de stânga a grupului iniţial de definire P cu grupul de operatori G (G este un grup discret de simetrie al spaţiului geometric considerat S). Bazele teoriei generale şi unele aspecte specifice ale $W_p -$simetriei (inclusiv clasificarea grupurilor de $W_p -$simetrie pe tipuri, cercetarea structurii generale a grupurilor de anumite tipuri, elaborarea metodelor generale de deducere a acestor grupuri de tipuri diferite din grupurile date iniţial P şi G şi deducerea concretă a unor grupuri de anumite tipuri diferite pentru unele grupuri concrete P şi G) au fost studiate într-un şir de lucrari în ultimele două decenii [19-28].

Dacă ponderea spaţiului $S^{(N)}$ este orientată şi domeniul de acţiune a substituţiilor din grupul iniţial P este local, atunci transformarea mixtă $\tilde{g} = wg$ este nu altceva decât o transformare de $W_q -$simetrie [29]. Menţionăm, că transformarea $\tilde{g} = wg$ a spaţiului cu pondere orientată $S^{(N)}$ este transformare de $W_q -$simetrie, dacă componenta sa geometrică g acţionează direct şi asupra punctelor $M_k = g_k(M_1)$, şi asupra „indicilor", conform unei legi date ce nu depinde de puncte, iar „indicii" localizaţi în punctul M_k sunt transformaţi suplimentar de către substituţia p^{g_k} ($g_k -$componentă în elementul w din $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$) (*a se compara* cu [29]).

Grupurile de W_q – simetrie $G^{(W_q)}$ sunt subgrupuri ce satisfac unele condiții speciale ale împletirii carteziene standard încrucişate a grupului inițial de definire P cu grupul de operatori G (G este un grup discret de simetrie a spațiului geometric considerat S). Bazele şi unele aspecte specifice ale teoriei generale a W_q – simetriei (inclusiv clasificarea grupurilor de W_q – simetrie pe tipuri, familii şi subfamilii, cercetarea structurii generale a grupurilor de W_q – simetrie de diferite tipuri, elaborarea metodelor generale de deducere a grupurilor de W_q – simetrie de anumite tipuri din grupurile date inițial P şi G) au fost studiate într-o serie de lucrari din ultimii 15 ani [29-38].

Referințe:

1. Lungu A. Regular decompositions of geometric space well-balanced by scalar „physical" load // Conference „Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE-2008)". Chisinau, October 1-4, 2008, Abstracts, p.18-19.
2. Lungu A. The symmetry of geometric space well-balanced by „physical" orientated load // The 17th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM 2009. Constanța, Romania, September 17-20, 2009, Book of abstracts.
3. Lungu A. Transformations of geometric space well-balanced by scalar "physical" load // The 16th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM 2008. Oradea, October 9-11, 2008, Book of abstracts, p.39-40.
4. Lungu A. Mixed transformations of geometric space well-balanced by „physical" orientated load // Conference „Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE-2009)". Chisinau, October 8-9, 2009, Abstracts.
5. Заморзаев А.М. О группах квазисимметрии (Р-симметрии) // Кристаллография. - 1967. - Т.12.- С.819-825.
6. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, ее обобщения и приложения. - Кишинев: Штиинца, 1978.
7. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. Р-симметрия и ее дальнейшее развитие. - Кишинев: Штиинца, 1986.
8. Slavik V. Jablan Theory of Symmetry and Ornament // Serbian Academy of Science and Arts. 1995. http://www.emis.de/monographs/jablan/
9. Палистрант А.Ф. Линейные точечные группы симметрии классических и n-мерных эвклидовых пространств при $n \geq 4$ // Studia Universitatis. Revistă științifică. Seria „Științe exacte şi economice" (Chişinău: CEP USM). - 2007. - Nr.8. - P.12-21.
10. Палистрант А.Ф. Применение пространственных групп кристаллографических Р-симметрий к исследованию 6-мерных групп симметрии // Кристаллография. - 2009. - Том 54. - №4. - С.588-596.
11. Палистрант А.Ф. 3-мерные линейные ассиморфные кристаллографические группы розеточных Р-симметрий и их применение к завершению полного обзора 5-мерных групп симметрии с инвариантными 3-мерной плоскостью и прямой в ней. // Studia Universitatis. Revistă științifică. Seria „Științe exacte şi economice" (Chişinău: CEP USM). - 2009. - Nr.2(22). - P.17-29.
12. Лунгу А.П. К теории $\overline{P}$ – симметрии // Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 мая 1978 г., №1709-78 Деп., 16 с.
13. Lungu A. Aplicații cvasiomomorfe şi produse semidirecte de grupuri // Conferința științifică jubiliară „50 de ani ai USM". Rezumatele comunicărilor. 2-3 octombrie 1996. - Chişinău: CE USM, 1996, p.22-24.
14. Lungu A.P. Teoria simetriei de colorație generalizată cu aplicarea extensiunilor şi a împletirilor grupurilor: Autoreferatul disertației de doctor habilitat. - Chişinău, 1997.
15. Лунгу А.П., Браниште М. О полумладших и псевдомладших дискретных группах $\overline{P}$-симметрии // Theses of the reports to the 7-th International Conference on Geometry and Topology. - Cherkassy, 2007, p.7-8.
16. Branişte M, Lungu A. Asupra interpretării geometrice a grupurilor minore de $\overline{P}$-simetrie cu figuri „indexate" // Studia Universitatis. Revistă științifică. Seria „Științe exacte şi economice" (Chişinău: CEP USM). - 2008. - Nr.8(13). - P.75-80.
17. Курош А.Г. Теория групп. - Москва: Наука, 1967.
18. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - Москва: Наука, 1977.
19. Лунгу А.П. К теории групп W-симметрии // Buletinul Academiei de Ştiințe a Moldovei. Matematica. - 1992. - N3(9). - P.72-81.
20. Копцик В.А., Коцев И.Н. К теории и классификации групп цветной симметрии. II. W-симметрия // Сообщения ОИЯИ. Р4-8068. - Дубна, 1974.
21. Лунгу А.П. К классификации групп W-симметрии // Исследования по современной алгебре и геометрии.- Кишинёв: Штиинца, 1983, с.79-84.

22. Лунгу А.П. Методика вывода полумладших и псевдомладших групп W-симметрии // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. - 1994. - Nr.2(15). - P.29-39.
23. Лунгу А.П. Методика вывода средних групп W-симметрии // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. - 1996. - Nr.1(20). - P.35-39.
24. Лунгу А.П. Универсальная методика вывода конечных групп W_p-симметрии // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe reale". - Chişinău, 1997, p.16-22.
25. Lungu A. The recent generalizations of colored symmetry // Visual mathematics. Art and Science Electronic Journal of ISIS – Symmetry. - 2000. - Vol.2. - No.2. - 25 p. (versiunea electronică: http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/lungu/index.html).
26. Lungu A. Discrete groups of generalized symmetry // International Congress MASSEE'2003, September 15-21, 2003. Borovets (Bulgaria). Abstracts, p.117-118. (Varianta electronică http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/cakq-36).
27. Lungu A., Geometrical aspects of semi-direct products of groups // ROMAI Journal. - 2005. - Vol.I. - No.1. - P.101-106.
28. Lungu A. On the equivalence of discrete W -symmetry groups // CAIM-2005. 13th Conference on Applied and Industrial Mathematics, October 2005, Pitesti, Romania. Abstracts, p.15-16.
29. Lungu A. Introduction into General Theory of W_q-symmetry // Satellite Conference of ECM' 96 „Symmetry and Antisymmetry in Mathematics. Formal Languages and Computer Science", Brasov, July 1996, p.55-56.
30. Лунгу А.П. Основы общей теории W_q-симметрии // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. - 1996. - Nr.3(22). - P.94-100.
31. Лунгу А.П. К теории групп W_q-симметрии. // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. - 1997. - Nr.2(24). - P.77-86.
32. Lungu A. Grupuri de W_q-simetrie // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe fizico-matematice". - Chişinău, 1998, p.11-17.
33. Lungu A. Grupurile mijlocii finite de W_q-simetrie şi cvasiomomorfismele încrucişate generalizate // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe fizico-matematice". - Chişinău, 1999, p.232-236.
34. Lungu A. Discrete groups of W_q-symmetry // Proceedings of the 2nd International Conference on Symmetry and Antisymmetry in Mathematics, Formal Languages and Computer Science, Satelite Conference of 3ECM, Brasov (Romania), 2000, p.175-184.
35. Lungu A. Zamorzaev's P-symmetry and its further generalizations // International Seminar on Discrete Geometry (dedicated to the 75th birthday of Professor A.M. Zamorzaev). Chisinau, 2002, August, 28-29. Communications, p.45-53.
36. Lungu A. Discrete groups of W-symmetry // 11th Conference on Applied and Industrial Mathematics. May 29-31, 2003. Oradea (Romania). Proceedings, Vol.I, p.156-160. Varianta electronică http://caim2003.rdsor.ro/caim03v1.pdf .
37. Lungu A. Discrete groups of recent generalizations of color symmetry // Scientific Annals Faculty of Mathematics and Informatics. State University of Moldova. - Chişinău, 2003. - Vol.5. - P.34-46.
38. Лунгу А.П. Обобщенная симметрия и расширения групп // The 5-th International Conference on Geometry and Topology in commemoration of A.V. Pogorelov (1919-2002). Theses of the reports. Cherkassy, September, 2003, p.71-72.

***Notă:** Această lucrare a fost parţial susţinută financiar de Grantul 08.820.08.06 FR (AŞM, RFFI).*

Prezentat la 02.09.2009