STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2009, nr.7(27)

БИРОЗЕТОЧНЫЕ *P*-СИММЕТРИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

Au fost introduse *P*-simetriile birozete şi prezentată lista lor completă, fiind indicate aplicațiile acestor grupuri de P-simetrie pentru cercetarea grupurilor multidimensionale de simetrie. Pentru comoditatea aplicării P-simetriilor cercetate, aceste P-simetrii au fost repartizate în clase de izomorfism. Pentru prima dată a fost obținută lista completă a grupurilor de tabletă a *P*-simetriilor de rozetă. Cu aceste grupuri pot fi interpretate cu exactitate până la structura grupului respectiv toate grupurile de simetrie ale spațiului euclidian 5-dimensional, ce păstrează în el un plan 3-dimensional, o dreaptă din acest plan şi un punct pe această dreaptă.

The birosette *P*-symmetries are introduced, theirs complete catalogue is presented and it is point out the applications of this groups of *P*-symmetries for the investigation of multidimensional groups of symmetry. For convenience of using of considered *P*-symmetry, their distribution on isomorphism classes is carried out. For the first time the catalogue of all possible tablet groups of *P*-symmetries, by which all various groups of symmetry of five-dimensional Euclidean space, keeping a 3-dimensi-onal plane with a straight line and point on it, are interpreted to within a structure, is presented.

1. *P*-симметрия А.М.Заморзаева [1] является глубоким обобщением классического учения о симметрии [2] и охватывает все расширения антисимметрии А.В.Шубникова [3] и цветной симметрии Н.В. Белова [4], в которых закон изменения качеств, приписанных точкам фигуры, комбинируется непосредственно с изометрическим преобразованием, действующим только на точки рассматриваемой фигуры, и не связан с выбором ее частей. Подробное развитие этих идей с применением к обобщению различных категорий классических кристаллографических групп симметрии [5-7] и с использованием полученных групп в физической кристаллографии [8], а также в науке и искусстве, содержится в [9], а с геометрическими приложениями к симметрии подобия, конформной и многомерной симметрии – в [6,7].

Необходимость изучения в эвклидовом пространстве n-мерных федоровских групп G_n (n-пространственных) и их всевозможных подгрупп G_{nm} (где $n > m$) с инвариантной m-мерной плоскостью (m-плоских) и $G_{nm\ldots k}$(где $n > m > \ldots > k$) с инвариантными m-мерной, … и k-мерной плоскостями, последовательно включающими друг друга, считая при этом прямую одномерной плоскостью, а точку – нульмерной, диктуется не только задачами многомерной геометрии [6,7], но и потребностями современной физики [10]. Важную роль в продвижении принципиального решения задачи n-мерной геометрической кристаллографии имеет развитый геометрами Молдавского университета в [6,7] метод применения одно-, двух- и трёхмерных кристаллографических групп простой и l-кратной антисимметрии для подсчёта и моделирования субпериодических многомерных групп симметрии. Характерной особенностью этого метода является то, что каждая категория классических кристаллографических групп симметрии и выводимые из них группы *P*-симметрии целиком интерпретируют с точностью до строения определенную категорию многомерных групп симметрии. Этим методом, собранными в [5] r-мерными группами l-кратной антисимметрии $G^{l}_{r\ldots}$ (где r = 1,2,3, а $l \geq 1$), как показано в [6, 7], полностью определены числа всех различных групп симметрии категории $G_{(r+l)(r+l-1)\ldots(r+1)r\ldots}$, сохраняющих в $(r + l)$–мерном эвклидовом пространстве последовательно включающие друг друга плоскости размерностей $r + l – 1$, $r + l – 2$, …, $r + 1$, $r\ldots$.

Для многомерных приложений *P*-симметрии особенно плодотворным оказался предложенный в [11, 7, §1.2] геометрический принцип классификации *P*-симметрий, способствовавший применению впервые трехмерных кристаллографических точечных групп G^{P}_{30} этих 32 кристаллографических *P*-симметрий для подсчета и интерпретации шестимерных точечных групп симметрии G_{630} с инвариантной трехмерной плоскостью и точкой в ней [12], а с помощью розеточных, таблеточных, бордюрных и ленточных групп $G^{P}_{20}, G^{P}_{320}, G^{P}_{21}$ и G^{P}_{321} отмеченных 32 *P*-симметрий – категории пятимерных и шестимерных плоскоточечных и плосколинейных групп симметрии категории G_{520}, G_{6320}, G_{521} и G_{6321} [7,гл.2,3]. В дальнейшем геометрический принцип классификации P-симметрий был распространён на гиперкристаллографические P-симметрии [13], а также на розеточные и таблеточные P-симметрии [14].

Расширение 32 кристаллографических P-симметрий с антисимметрией [5] привело к 122 гиперкристаллографическим P-симметриям 1-го порядка, соответствующим случаю, когда группа P подстановок качеств, приписанных точкам преобразуемой фигуры, последовательно изоморфна четырёхмерным точечным группам симметрии G_{430} с инвариантной трехмерной плоскостью и точкой в ней, а трёхмерными точечными группами этих 122 P-симметрий G_{30}^{P} при их полной классификации с точки зрения общей теории P-симметрии полностью исследованы все различные 7-мерные точечные группы симметрии категории G_{7630} [15].

Аналогичным образом, с помощью трехмерных точечных групп G_{30}^{P} 624 гиперкристаллографических P-симметрий второго порядка, полученных обобщением 32 кристаллографических P-симметрий с двукратной антисимметрией [5], выявлено количество различных 8-мерных точечных групп симметрии категории G_{87630}, а нульмерными группами G_{0}^{P} отмеченных 624 P-симметрий моделируются с точностью до строения все различные 624 пятимерные точечные группы симметрии категории G_{5430} [16].

Поиски исследований новых категорий многомерных групп симметрии, отличных от приведенных выше, привели в [14] к розеточным P-симметриям, обстоятельно проанализированным в [17]. Использованный упомянутый выше геометрический способ классификации P-симметрий, когда группа P, характеризующая данную P-симметрию, последовательно изоморфна двумерным кристаллографическим точечным группам G_{20}, выявил ровно 10 розеточных P-симметрий, а точечными группами конечных бордюров G_{210}^{P} этих розеточных P-симметрий определено количество различных четырехмерных групп симметрии категории G_{4210} [14].

Обобщение розеточных P-симметрий с антисимметрией [5] привело в [14] к 31 таблеточной P-симметрии, соответствующей случаю, когда группа P, задающая данные P-симметрии, последовательно изоморфна кристаллографическим точечным группам симметрии таблеток G_{320}, а бордюрными группами G_{21}^{P} этих таблеточных P-симметрий полностью исследованы все 2597 групп симметрии 5-мерного пространства категории G_{5421}, сохраняющих в нем гиперплоскость и вложенную в неё двумерную плоскость с инвариантной прямой [18].

Далее, обобщение выявленных в [14] таблеточных P-симметрий с антисимметрией [5] привело в [17] к 125 гипертаблеточным P-симметриям первого порядка, соответствующим группам подстановок P, изоморфных последовательно группам симметрии категории G_{4320}, а бордюрными группами G_{21}^{P} этих 125 гипертаблеточных P-симметрий 1-го порядка полностью исследованы в [19] все 25677 групп симметрии 6-мерного эвклидова пространства, сохраняющие в нём гиперплоскость с вложенной в неё 4-мерной плоскостью и лежащей в ней двумерной плоскостью с инвариантной прямой , т.е. группы симметрии категории G_{65421}.

Обобщение, наконец, 31 таблеточной P-симметрии с двукратной антисимметрией привело в [17] к 671 гипертаблеточной P-симметрии второго порядка, соответствующей случаю, когда группа P, задающая данную P-симметрию, последовательно изоморфна группам симметрии категории G_{54320}, а бордюрными группами G_{21}^{P} установленной 671 P-симметрии полностью исследованы в [19] все 352729 групп симметрии категории G_{765421}.

Однако отмеченных разнообразных типов изученных P-симметрий недостаточно для исследования многих категорий многомерных кристаллографических групп симметрии. Действительно, просматривая полное перечисление всех категорий пяти- и шестимерных групп симметрии, представленных в [7, §3.1], легко заметить, что кристаллографическими группами $G_{r\ldots}^{P}$ (r = 1,2,3) упомянутых P-симметрий невозможно описать, например, 5-мерные группы симметрии категории G_{5310}. Такие пятимерные точечные группы с инвариантными трехмерной плоскостью, прямой в ней и точкой на ней описываются, как будет показано ниже, с помощью одномерных точечных групп G_{10}^{P}, когда группа P подстановок качеств, приписанных точкам отрезка, характеризующая рассматриваемую P-симметрию, последовательно изоморфна четырёхмерным группам симметрии с инвариантными двумя абсолютно перпендикулярными двумерными плоскостями и точкой их пересечения, т.е. четырёхмерными точечными группами симметрии категории G_{420}. Таких P-симметрий имеется ровно 263, так как количество групп симметрии категории G_{420} определено в [6, с.153] с помощью двумерных точечных групп симметрии G_{20}, антисимметрии G_{20}^{1}, p-симметрии G_{20}^{P} и (p/)- симметрии $G_{20}^{p/}$ при p = 2, 3, 4, 6.

Выявлению символики для записи интересующих нас новых 263 P-симметрий при $P \simeq G_{420}$, нульмерными группами которых моделируются четырёхмерные группы симметрии категории G_{420}, а также их свойств и применению одномерных точечных групп G_{10}^{P} этих P-симметрий к исследованию 5-мерных групп симметрии категории G_{5310} и посвящена настоящая статья.

2. Как отмечено в [6, с.153], все различные группы симметрии категории G_{420} описываются с помощью двумерных точечных групп симметрии G_{20}, антисимметрии G_{20}^{1}, p- и (p/) - симметрии G_{20}^{P} и $G_{20}^{P/}$ при p = 2, 3, 4,6 (где рассматриваются только группы полных P-симметрий) через сложное толкование знаков "+" или "-", индексов 1,…, p или индексов 1+,…, p+ со знаком "+" (причем знак "+" при записи индексов 1, …, p опускается) и индексов $\overline{1},\ldots \overline{p}$ со знаком “-”, которые полностью в количестве 263 выписаны в [20]. Эти же 263 четырёхмерные группы симметрии категории G_{420} интерпретируются нульмерными группами G_{0}^{P} розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$ [17] и группами, полученными из нульмерных групп G_{0}^{P} розеточных P-симметрий путём их обобщения вновь с этими же розеточными P-симметриями. Таким образом, 263 четырехмерные точечные группы симметрии категории G_{420} выступают как 263 двукратные розеточные P-симметрии при $P \simeq G_{420}$, которые предложено в [21] назвать бирозеточными, в отличие от гиперкристаллографических P-симметрий 1-го и 2-го порядков, использованных в [15, 16] для описания 7- и 8-мерных групп симметрии категории G_{7630} и G_{87630} с помощью трёхмерных точечных групп G_{30}^{P} отмеченных гиперкристаллографических P-симметрий 1-го и 2-го порядков соответственно.

Отсюда следует, что при обобщении, например, r-мерных групп симметрии G_r с 263 бирозеточными P-симметриями получим новые группы G_{r}^{P} которыми моделируются группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+2)r}$. Действительно, при обобщении групп G_r с 10 розеточными P-симметриями получим группы G_{r}^{P}, которыми изображаются, согласно [17], группы симметрии категории $G_{(r+2)r}$, а при обобщении этих групп вновь с 10 розеточными P-симметриями получим группы $G_{(r+2)r}^{P}$, которыми моделируются группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+2)r}$. Следовательно, интересующие нас 5-мерные группы симметрии категории G_{5310} описываются одномерными точечными группами G_{10}^{P} 263 бирозеточных P-симметрий, когда P-симметрия изоморфна последовательно группам симметрии категории G_{420}.

Для записи бирозеточных P-симметрий, нульмерными группами которых описываются 263 различные четырёхмерные точечные группы симметрии категории G_{420}, используем упоминавшиеся выписанные нами в [20] двумерные точечные группы G_{20}^{P} розеточных P-симметрий, которыми также интерпретируются интересующие нас четырёхмерные точечные группы симметрии категории G_{420}. Для этого нужно каждую из 263 двумерных точечных групп G_{20}^{P} розеточных P-симметрий представить в виде нульмерной группы определенной P-симметрии, что возможно. Действительно, сами двумерные точечные группы G_{20} выступают, как отмечено в [14, п.3], как нульмерные группы G_{0}^{P} p- и (p/)- симметрии при p = 1, 2, 3, 4, 6, а двумерные точечные группы антисимметрии G_{20}^{1}, а также p- и (p/)- симметрии G_{20}^{P} и $G_{20}^{P/}$ при p = 2, 3, 4, 6 также можно представить в виде нульмерных групп определенных бирозеточных P-симметрий. Сопоставление в порядке записи каждой извлечённой из [20] двумерной точечной группы G_{20}^{P} розеточной P-симметрии и полученной из неё нульмерной группы G_{0}^{P} определенной бирозеточной P-симметрии при $P \simeq G_{420}$ приведено в таблице.

Таблица

Сравнение двумерных точечных групп G_{20}^{P} розеточных *P*-симметрий с группами подстановок, характеризующих бирозеточные *P*-симметрии

Извлеченные из [20] двумерные точечные группы G_{20}^{P} розеточных *P*-симметрий	Символика бирозеточных *P*-симметрий при P≃G_{420} (нульмерные группы G_{0}^{P} 263 бирозеточных *P*-симметрий).
1	2
Десять порождающих двумерных точечных групп G_{20}: 1, 2, 3, 4, 6, m, 2·m, 3·m, 4·m, 6 · m.	Десять полных бирозеточных *P*-симметрий: (1,1)-, (1,2)-, (1,3)-, (1,4)-, (1,6)-, (1,1/)-, (1,2/)-, (1,3/)-, (1,4/)-, (1,6/)-.
Одиннадцать младших двумерных точечных групп антисимметрии: $2'$, $4'$, $6'$, m', $2' \cdot m$, $2 \cdot m'$, $3 \cdot m'$, $4' \cdot m$, $4 \cdot m'$, $6' \cdot m$, $6 \cdot m'$.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий: $2'$-, $4'$-, $6'$-, $(1/')$-, $(2'/)$-, $(2/')$, $(3/')$, $(4'/)$-,$(4/')$)-, $(6'/)$, $(6/')$-.
Десять старших двумерных точечных групп антисимметрии: $1\times1'$, $2\times1'$, $3\times1'$, $4\times1'$, $6\times1'$, $m\times1'$,$(2\cdot m)\times 1'$, $(3\cdot m) \times1'$, $(4 \cdot m) \times 1'$, $(6\cdot m) \times 1'$.	Десять полных , бирозеточных *P*-симметрий: (1/,1)-, (1/,2)-, (1/,3)-, (1/,4)-, (1/,6)-, (1/,1/)-, (1/,2/)-, (1/,3/)-, (1/,4/), (1/,6/).
Одиннадцать младших двумерных точечных групп 2-симметрии: $2^{(2)}$, $4^{(2)}$, $6^{(2)}$, $m^{(2)}$, $2^{(2)} \cdot m$, $2 \cdot m^{(2)}$, $3\cdot m^{(2)}$, $4^{(2)} \cdot m$, $4 \cdot m^{(2)}$, $6^{(2)} \cdot m$, $6 \cdot m^{(2)}$.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий: 2^{2} -, 4^{2}-, 6^{2}-, $(1/^{2})$-, $(2^{2}/)$-, $(2/^{2})$-, $(3/^{2})$-, $(4^{2}/)$-, $(4/^{2})$-, $(6^{2}/)$-, $(6/^{2})$-.
Десять старших двумерных точечных групп 2-симметрии: $1\times 1^{(2)}$, $2 \times 1^{(2)}$, $3 \times1^{(2)}$,$4\times1^{(2)}$, $6\times1^{(2)}$, $m \times1^{(2)}$, $2\cdot m \times 1^{(2)}$, $3\cdot m \times 1^{(2)}$, $4\cdot m \times 1^{(2)}$, $6\cdot m \times 1^{(2)}$.	Десять полных бирозеточных *P*-симметрий: (2,1)-, (2,2)-, (2,3)-, (2,4)-, (2,6)-, (2,1/)-, (2,2/)-, (2,3/)-, (2,4/)-, (2,6/).
Четыре младших двумерных точечных группы 3-симметрии: $3^{(3)}$, $3^{(-3)}$, $6^{(3)}$, $6^{(-3)}$.	Четыре неполных бирозеточных *P*-симметрии: 3^{3}-, 3^{-3}-, 6^{3}-, 6^{-3}-.
Десять старших двумерных точечных групп 3-симметрии:$1\times1^{(3)}$, $2\times1^{(3)}$, $3\times1^{(3)}$, $4\times1^{(3)}$, $6\times1^{(3)}$, $m\times1^{(3)}$, $(2\cdot m)\times1^{(3)}$, $(3\cdot m)\times1^{(3)}$, $(4\cdot m)\times1^{(3)}$, $(6\cdot m)\times1^{(3)}$.	Десять полных бирозеточных *P*-симмерий: (3,1)-, (3,2)-, (3,3)-, (3,4)-, (3,6)-, (3,1/)-, (3,2/), (3,3/)-, (3,4/)-, (3,6/)-.
Две младших двумерных точечных группы 4-симметрии: $4^{(4)}$, $4^{(-4)}$.	Две неполных бирозеточных *P*-симметрии: 4^{4}-, 4^{-4}-.
Десять старших двумерных точечных групп 4-симметрии: $1\times1^{(4)}$, $2\times1^{(4)}$, $3\times1^{(4)}$, $4\times1^{(4)}$, $6\times1^{(4)}$, $m\times1^{(4)}$,$(2\cdot m)\times1^{(4)}$,$(3\cdot m)\times1^{(4)}$,$(4\cdot m)\times1^{(4)}$,$(6\cdot m)\times1^{(4)}$.	Десять полных бирозеточных *P*-симметрий: (4,1)-, (4,2)-, (4,3)-, (4,4)-, (4,6)-, (4,1/)-, (4,2/)-, (4,3/)-, (4,4/)-, (4,6/)-.
Одиннадцать двумерных точечных 2-средних групп 4-симметрии: $2^{(4)}$, $4^{(4)}\times1^{(2)}$, $6^{(4)}$, $m^{(4)}$, $2^{(4)}\cdot m$, $2\cdot m^{(4)}$, $3\cdot m^{(4)}$, $4^{(4)}\cdot m$, $4\cdot m^{(4)}$, $6^{(4)}\cdot m$, $6\cdot m^{(4)}$.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий: 2^{4}-,$(4^{4},2)$-, 6^{4}-, $(1/^{4})$- ,$(2^{4}/)$-, $(2/^{4})$, $(3/^{4})$-, $(4^{4}/)$-,$(4/^{4})$-, $(6^{4}/)$-, $(6/^{4})$-.
Две младших двумерных точечных группы 6-симметрии: $6^{(6)}$, $6^{(-6)}$.	Две неполных бирозеточных *P*-симметрии: 6^{6}-, 6^{-6}-.
Десять старших двумерных точечных групп 6-симметрии:$1\times1^{(6)}$, $2\times1^{(6)}$, $3\times1^{(6)}$, $4\times1^{(6)}$, $6\times1^{(6)}$, $m\times1^{(6)}$, $(2\cdot m)\times1^{(6)}$, $(3\cdot m)\times1^{(6)}$, $(4\cdot m)\times1^{(6)}$, $(6\cdot m)\times1^{(6)}$.	Десять полных бирозеточных *P*-симметрий: (6,1)-, (6,2)-, (6,3)-, (6,4)-,(6,6)-, (6,1/)-,(6,2/)-, (6,3/)-, (6,4/)-, (6,6/)-.
Одиннадцать 3-средних двумерных точечных групп 6-симметрии:$2^{(2)}\times1^{(3)}$, $4^{(2)}\times1^{(3)}$, $6^{(2)}\times1^{(3)}$, $m^{(2)}\times1^{(3)}$, $(2^{(2)}\cdot m)\times1^{(3)}$, $(2\cdot m^{(2)})\times1^{(3)}$, $(3\cdot m^{(2)})\times1^{(3)}$, $(4^{(2)}\cdot m)\times1^{(3)}$,$(4\cdot m^{(2)})\times1^{(3)}$,$(6^{(2)}\cdot m)\times1^{(3)}$,$(6\cdot m^{(2)})\times1^{(3)}$	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий:$(2^{2}, 3)$-, $(4^{2},3)$-, $(6^{2}, 3)$-, $(1/^{2},3)$-, $(2^{2}/,3)$-, $(2/^{2},3)$-, $(3/^{2},3)$-, $(4^{2}/,3)$-, $(4/^{2},3)$-, $(6^{2}/,3)$- $(6/^{2},3)$-.
Четыре 2-средних двумерных точечных групп 6-симметрии:$3^{(3)}\times1^{(2)}$, $3^{(-3)}\times1^{(2)}$, $6^{(3)}\times1^{(2)}$, $6^{(-3)}\times1^{(2)}$.	Четыре неполных бирозеточных *P*-симметрии: $(3^{3}, 2)$-, $(3^{-3}, 2)$-, $(6^{3}, 2)$-, $(6^{-3}, 2)$-.
Шесть младших двумерных точечных групп (2/)-симметрии:$2^{(2} \cdot m^{/)}$, $2^{/)} \cdot m^{(2}$, $4^{(2} \cdot m^{/)}$, $4^{/)} \cdot m^{(2}$, $6^{(2} \cdot m^{/)}$, $6^{/)}\cdot m^{(2}$.	Шесть неполных бирозеточных *P*-симметрий: $(2^{2/'})$-, $(2^{'/2})$-, $(4^{2/'})$-, $(4^{'/2})$-, $(6^{2/'})$-, $(6^{'/2})$-.

Продолжение таблицы

1	2
Десять старших двумерных точечных групп (2/)-симметрии: $1\times(1^{(2}\cdot 1^{/)})$, $2\times(1^{(2}\cdot 1^{/)})$, $3\times(1^{(2}\cdot 1^{/)})$, $4\times(1^{(2}\cdot 1^{/)})$, $6\times(1^{(2}\cdot 1^{/})$, $m\times(1^{(2}\cdot 1^{/})$, $(2\cdot m)\times(1^{(2}\cdot 1^{/})$, $(3\cdot m)\times(1^{(2}\cdot 1^{/)})$, $(4\cdot m)\times(1^{(2}\cdot 1^{/)})$, $(6\cdot m)\times(1^{(2}\cdot 1^{/)})$.	Десять полных бирозеточных *P*-симметрий: (2/, 1)-, (2/,2)-, (2/, 3)-, (2/, 4)-, (2/,6)-, (2/,1/)-, (2/, 2/), (2/, 3/)-, (2/, 4/)-, (2/, 6/)-.
Одиннадцать (1/)-средних двумерных точечных групп (2/)- симметрии: $2^{(2}\cdot 1^{/)}$, $4^{(2}\cdot 1^{/)}$, $6^{(2}\cdot 1^{/)}$, $m^{(2}\cdot 1^{/)}$, $(2^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(2\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(3\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(4^{(2}\cdot m)\times 1^{/)}$, $(4\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(6^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(6\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$-.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий : $(2^2, 1/)$-, $(4^2,1/)$-, $(6^2, 1/)$-, $(1/^2, 1/)$-, $(2^2/,1/)$-, $(2/^2,1/)$-, $(3/^2, 1/)$-, $(4^2/, 1/)$-, $(4/^2 1/)$-, $(6^2/, 1/)$-, $(6/^2,1/)$- .
Одиннадцать 2-средних двумерных точечных групп (2/)-симметрии: $2^{/)}\times 1^{(2}$, $4^{/)}\times 1^{(2}$, $6^{/)}\times 1^{(2}$, $m^{/)}\cdot 1^{(2}$, $(2^{/)}\cdot m)\cdot 1^{(2}$,$(2\cdot m^{/)})\cdot 1^{(2}$, $(3\cdot m^{/)})\cdot 1^{(2}$, $(4^{/)}\cdot m)\times 1^{(2}$, $4\cdot m^{/)})\cdot 1^{(2}$, $(6^{/)}\cdot m)\cdot 1^{(2}$, $(6\cdot m^{/)})\cdot 1^{(2}$.	Одиннадцать неполных бирозеточных групп *P*-симметрии: $(2^{/},2)$-, $(4^{/}, 2)$-, $(6^{/}, 2)$-, $(1/^{/},2)$-, $(2^{/}/,2)$-, $(2/^{/}, 2)$-, $(3/^{/},2)$-, $(4^{/}/,2)$-, $(4/^{/},2)$-, $(6^{/}/,2)$-, $(6/^{/},2)$-.
Четыре младших двумерных точечных группы (3/)-симметрии: $3^{(3}\cdot m^{/)}$, $3^{(-3}\cdot m^{/)}$, $6^{(3}\cdot m^{/)}$, $6^{(-3}\cdot m^{/)}$	Четыре неполных бирозеточных *P*-симметрии: $(3^{3}/^{/})$-, $(3^{-3}/^{/})$-, $(6^{3}/^{/})$-, $(6^{-3}/^{/})$-
Десять старших двумерных точечных групп (3/)-симметрии: $1\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$,$2\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $3\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $4\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $6\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $m\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(2\cdot m)\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(3\cdot m)\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(4\cdot m)\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(6\cdot m)\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$.	Десять полных бирозеточных *P*-симметрий: (3/, 1)-, (3/, 2), (3/,3)-, (3/,4)- , (3/,6)-, (3/,1/)-, (3/,2/)-, (3/,3/)-, (3/,4/)-, (3/,6/)-.
Одиннадцать 3-средних двумерных точечных групп (3/)- симметрии: $2^{/)}\cdot 1^{(3}$, $4^{/)}\cdot 1^{(3}$, $6^{/)}\cdot 1^{(3}$, $m^{/)}\cdot 1^{(3}$, $(2^{/}\cdot m)\cdot 1^{(3}$, $(2\cdot m^{/)})\cdot 1^{(3}$, $(3\cdot m^{/)})\cdot 1^{(3}$, $(4^{/}\cdot m)\cdot 1^{(3}$, $(4\cdot m^{/)})\times 1^{(3}$, $(6^{/)}\cdot m)\times 1^{(3}$, $(6\cdot m^{/)})\cdot 1^{(3}$.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий: $(3, 2^{/})$-, $(3,4^{/})$-, $(3,6^{/})$-, $(3,1/^{/})$-, $(3,2^{/}/)$-, $(3,2/^{/})$-, $(3,3/^{/})$-, $(3,4^{/}/)$-, $(3,4/^{/})$-, $(3,6^{/}/)$-,$(3,6/^{/})$-.
Две младших двумерных точечных группы (4/)-симметрии: $4^{(4}\cdot m^{/)}$, $4^{(-4}\cdot m^{/)}$.	Две неполных бирозеточных *P*-симметрии: $(4^{4}/^{/})$-, $(4^{-4}/^{/})$.
Десять старших двумерных точечных групп (4/)-симметрии: $1\times(1^{(4}\cdot 1^{/)})$, $2\times(1^{(4}\cdot 1^{/)})$, $3\times(1^{(4}\cdot 1^{/)})$, $4\times(1^{(4}\cdot 1^{/)})$, $6\times(1^{(4}\cdot 1^{/)})$, $m\times(1^{(4}\cdot 1^{1)})$, $(2\cdot m)\times(1^{(4}\cdot 1^{1)})$, $(3\cdot m)\times(1^{(4}\cdot 1^{/)})$, $(4\cdot m)\times(1^{(4}\cdot 1^{/)})$, $(6\cdot m)\times(1^{(4}\cdot 1^{/)})$.	Десять полных бирозеточных *P*-симметрий: (4/,1)-, (4/,2)-, (4/,3)-, (4/,4)-, (6,4/), (4/,1/)-, (4/,2/), (4/,3/)-, (4/,4/)-, (4/,6/)- .
Одиннадцать (2/)-средних двумерных точечных групп (4/)-симметрии: $2^{(4}\cdot 1^{/)}$, $4^{(4}\cdot 1^{(2}\cdot 1^{/)}$, $6^{(4}\cdot 1^{/)}$, $m^{(4}\cdot 1^{/)}$, $2^{(4}\cdot m\cdot 1^{/)}$, $2\cdot m^{(4}\cdot 1^{/)}$, $3\cdot m^{(4}\cdot 1^{/)}$, $4^{(4}\cdot m\cdot 1^{/)}$, $4\cdot m^{(4}\cdot 1^{/)}$, $6^{(4}\cdot m\cdot 1^{/)}$, $6\cdot m^{(4}\cdot 1^{/)}$.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий : $(2^4,1/)$-, $(4^4, 2/)$-, $(6^4,1/)$-, $(1/^4,1/)$-, $(2^4/,1/)$-, $(2/^4,1/)$-, $(3/^4,1/)$-, $(4^4/, 1/)$, $(4/^4,1/)$-, $(6^4/,1/)$-, $(6/^4, 1/)$-.
Одиннадцать 4-средних двумерных точечных групп (4/)-симметрии: $2^{/)}\cdot 1^{(4}$, $4^{/)}\cdot 1^{(4}$, $6^{/)}\cdot 1^{(4}$, $m^{/)}\cdot 1^{(4}$, $(2^{/)}\cdot m)\cdot 1^{(4}$, $(2\cdot m^{/)})\cdot 1^{(4}$, $(3\cdot m^{/)})\cdot 1^{(4}$, $(4^{/)}\cdot m)\cdot 1^{(4}$, $(4\cdot m^{/)})\cdot 1^{(4}$, $(6^{/)}\cdot m)\cdot 1^{(4}$, $(6\cdot m^{/)})\cdot 1^{(4}$.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий: $(2^{/}, 4)$-, $(4^{/}, 4)$-, $(6^{/},4)$-, $(1/^{/}, 4)$-, $(2^{/}/, 4)$-, $(2/^{/},4)$-, $(3/^{/},4)$-, $(4^{/}/, 4)$-, $(4/^{/},4)$-, $(6^{/}/,4)$-, $(6/^{/},4)$-.
Шесть 2-средних двумерных точечных групп (4/)- симметрии: $2^{(4}\cdot m^{/)}$, $2^{/}\cdot m^{(4}$, $4^{(4}\cdot m^{/)}\cdot 1^{(2}$,$4^{/)}\cdot m^{(4}$, $6^{(4}\cdot m^{/)}$, $6^{/)}\cdot m^{(4}$.	Шесть неполных бирозеточных *P*-симметрий: $(2^4/^{/})$-, $(2^{/}/^4)$-, $(4^4/^{/}, 2)$-, $(4^{/}/^4)$-, $(6^4/^{/})$-, $(6^{/}/^4)$-.
Две младших двумерных точечных группы (6/)-симметрии: $6^{(6}\cdot m^{/)}$, $6^{(-6}\cdot m^{/)}$.	Две неполных бирозеточных *P*- симметрии: $(6^6/^{/})$-, $(6^{-6}/^{/})$-.
Десять старших двумерных точечных групп (6/)-симметрии: $1\times(1^{(6}\cdot 1^{1)})$, $2\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$,$3\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$, $4\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$, $6\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$, $m\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$, $(2\cdot m)\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$, $(4\cdot m)\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$, $(3\cdot m)\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$, $(6\cdot m)\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$.	Десять неполных бирозеточных *P*-симметрий: (6/,1)-, (6/,2)-, (6/,3)-,(6/,4)-, (6/,6)-, (6/,1/)-, (6/,2/)-, (6/,4/)-, (6/,3/)-, (6/,6/)-.
Одиннадцать(3/)-средних двумерных точечных групп (6/)-симметрии: $2^{(2}\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$,$4^{(2}\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $6^{(2}\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$,$m^{(2}\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$,$(2^{(2}\cdot m)\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(2\cdot m^{(2)})\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(3\cdot m^{(2)})\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(4^{(2}\cdot m)\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(4\cdot m^{(2)})\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$, $(6^{(2}\cdot m)\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$,$(6\cdot m^{(2)})\times(1^{(3}\cdot 1^{/)})$.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий: $(3/,2^2)$-, $(3/,4^2)$-, $(3/,6^2)$-, $(3/, 1/^{2})$-, $(3/,2^2/)$-, $(3/,2/^2)$-, $(3/,3/^2)$-, $(3/,4^2/)$-, $(3/,4/^2)$-, $(3/,6^2/)$-,$(3/, 6/^2)$-.

Продолжение таблицы

1	2
Одиннадцать 6-средних двумерных точечных групп (6/)-симметрии: $2^{/)}\cdot 1^{(6}$, $4^{/)}\cdot 1^{(6}$, $6^{/)}\cdot 1^{(6}$, , $m^{/)}\cdot 1^{(6}$, $(2^{/)}\cdot m)\cdot 1^{(6}$,$(2\cdot m^{/)})\cdot 1^{(6}$,$(3\cdot m^{/)})\cdot 1^{(6}$,$(4^{/)}\cdot m)\cdot 1^{(6}$,$(4\cdot m^{/)})\cdot 1^{(6}$, $(6^{/)}\cdot m)\cdot 1^{(6}$, $(6\cdot m^{/)})\times 1^{(6}$.	Одиннадцать неполных бирозеточных *P*-симметрий: $(2^{/}, 6)$-, $(4^{/},6)$-, $(6^{/},6)$-, $(1/^{/},6)$- ,$(2^{/}/,6)$-, $(2/^{/},6)$-, $(3/^{/},6)$- ,$(4^{/}/,6)$-,$(4/^{/},6)$-, $(6^{/}/,6)$-, $(6/^{/},6)$-.
Шесть 3-средних двумерных точечных групп (6/)-симметрии: $(2^{(2}\cdot m^{/)})\cdot 1^{(3}$, $(2^{/)}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(3}$, $(4^{(2}\cdot m^{/)})\cdot 1^{(3}$, $(4^{/)}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(3}$, $(6^{(2}\cdot m^{/)})\cdot 1^{(3}$, $(6^{/)}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(3}$.	Шесть неполных бирозеточных *P*-симметрий: $(2^{2}/^{/},3)$-,$(2^{/}/^{2},3)$-,$(4^{2}/^{/},3)$-, $(4^{/}/^{2},3)$-, $(6^{2}/^{/},3)$-, $(6^{/}/^{2},3)$-.
Четыре 2-средних двумерных точечных группы (6/)-симметрии:$(3^{(3}\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$,$(3^{-3}\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$, $(6^{(3}\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$, $(6^{(-3}\cdot m^{/})^{)}\times 1^{(2}$.	Четыре неполных бирозеточных *P*-симметрии: $(3^{3}/^{/},2)$-, $(3^{-3}/^{/},2)$-, $(6^{3}/^{/},2)$-, $(6^{-3}/^{/},2)$-.

Итак, интересующие нас 263 бирозеточных *P*-симметрии, как это следует из таблицы, можно получить в виде (p_1, p_2)-, $(p_1, p_2^{/})$-, $(p_1^{/}, p_2)$-, $(p_1^{/}, p_2^{/})$- симметрии – полной (когда группа *P*, задающая данную бирозеточную *P*-симметрию, представляется в виде прямого произведения двух групп, каждая из которых характеризует определенную розеточную *P*-симметрию) или неполной (когда группа *P*, представляющая данную бирозеточную *P*-симметрию, является нетривиальной подгруппой некоторой группы полной бирозеточной *P*-симметрии), где p_i = 1,2,3,4,6, а i = 1,2. Всего при этом получается 100 полных бирозеточных *P*-симметрий, которые при геометрическом толковании р-симметрии и (р/)-симметрии в первом смысле соответствуют, как это подтверждает таблица, порождающим и старшим двумерным точечным группам G_{20}^{P} розеточных *P*-симметрий. Остальные 163 неполных бирозеточных *P*-симметрии, как это непосредственно вытекает из таблицы, при геометрическом толковании р-симметрии и (р/)-симметрии в первом смысле, соответствуют младшим и средним двумерным точечным группам G_{20}^{P} розеточных *P*-симметрий.

Впервые бирозеточные *P*-симметрии были выписаны в [22] в виде 10 розеточных *P*-симметрий [17] и их расширений с помощью этих же 10 розеточных *P*-симметрий. Наш независимый от [22] способ получения бирозеточных *P*-симметрий показал, что список ста полных бирозеточных *P*-симметрий, представленный в [22], является верным, а среди списка 163 неполных бирозеточных *P*-симметрий имеются 11 групп $(2^{2}, 2/)$-, $(4^{2},2/)$-, $(6^{2},2/)$-, $(2^{2}/, 2/)$-, $(4^{2}/, 2/)$-, $(6^{2}/,2/)$-, $(2/^{2}, 2/)$-, $(3/^{2},2/)$-,$(4/^{2}, 2/)$-, $(6/^{2},2/)$-, $(1/^{2},2/)$-, которые не соответствуют одиннадцати (2/)- средним двумерным точечным группам (4/)-симметрии. А это говорит о том, что отмеченные группы в списке 163 неполных бирозеточных *P*-симметрий в [22] не являются таковыми. Кроме этих 11 групп в списке 163 неполных бирозеточных *P*-симметрий в [22] имеется еще 6 групп $(2^{2}/^{/},2)$-, $(4^{2}/^{/}, 2)$-,$(6^{2}/^{/},2)$-, $(2^{/}/^{2},2)$-, $(4^{/}/^{2},2)$-, $(6^{/}/^{2}, 2)$-, которые также не соответствуют шести 2-средним двумерным точечным группам (4/)-симметрии. Следовательно, и эти 6 групп не могут входить в список 163 неполных бирозеточных *P*-симметрий, представленных в [22].

Заменив в списке 163 неполных бирозеточных *P*-симметрии в [22] выписанные 11 групп таким же количеством групп, соответствующих (2/)-средним двумерным точечным группам (4/)-симметрии из таблицы настоящей статьи, а также 6 отмеченных групп шестью группами, соответствующими шести 2-средним двумерным точечным группам (4/)-симметрии из таблицы нашей статьи, получим в [22] полный верный список из 163 неполных бирозеточных *P*-симметрий, тождественно совпадающих с нашими неполными бирозеточными *P*-симметриями, протатулированными в таблице.

3. Для сокращения и облегчения обзора полного вывода групп G_{10}^{P} 263 бирозеточных *P*-симметрий воспользуемся понятиями сильного изоморфизма и изоморфизма *P*-симметрий из [23]. Напомним, что применение этих понятий, например, при подсчёте групп $G_{r\ldots}^{P}$ вместо 31, 125 и 671 *P*-симметрии при *P*, изоморфной последовательно G_{320}, G_{4320} и G_{54320}, детально изучались лишь 17, 25 и 33 неизоморфных [17]. Таким образом, применение сильного изоморфизма и изоморфизма *P*-симметрий из [23] к 263 бирозеточным *P*-симметриям означает распределение выписанных бирозеточных *P*-симметрий по классам, содержащим бирозеточные *P*-симметрии, характеризуемые группами подстановок *P*, имеющими

одинаковое строение. Ибо *P*-симметрия и $P^{/}$-симметрия называются изоморфными, согласно [23], если определяющие их группы *P* и $P^{/}$ сильно изоморфны ($P \approxeq P^{/}$), то есть если при изоморфизме одинаковым и одинаково включенным в группу P элементам соответствуют одинаковые элементы в $P^{/}$, а различным одинаково включённым в группу P элементам соответствуют различные элементы в группе $P^{/}$.

Ниже приводится распределение бирозеточных *P*-симметрий при $P \simeq G_{420}$ на пронумерованные классы по их изоморфизму ($P \approxeq P^{/}$), то есть в один класс попадают такие *P*- и $P^{/}$-симметрии, которые задаются сильно изоморфными между собой группами подстановок P и $P^{/}$. При этом знаком ~ внутри каждого отмеченного класса, содержащего не менее двух *P*-симметрий, соединены изоморфные *P*-симметрии. Через запятую отделяются друг от друга такие изоморфные классы, группы подстановок которых *P* и $P^{/}$ изоморфны ($P \simeq P^{/}$), но не сильно изоморфны ($P \approxeq P^{/}$), а через точку с запятой отделяются друг от друга классы изоморфизма, группы подстановок которых P и $P^{/}$ неизоморфны ($P \simeq P^{/}$).

Классы изоморфизма бирозеточных *P*-симметрий выглядят так: **1)** (1,1); **2**) (2,1)~(1,2)~(1/,1)~ ~(1,1/)~2^{2}~$(1/^{/})$~$2^{/}$~$(1/^{2})$ – всего 8 *P*-симметрий; **3)** (3,1)~(1,3)~3^{3}~3^{-3} – всего 4 *P*-симметрии, из которых пара 3^{3} и 3^{-3} энантиоморфна ; **4)** (4,1)~(1,4)~4^{4}~4^{-4}~4^{2}~2^{4}~$4^{/}$~$(1/^{4})$ – всего 8 *P*-симметрий, из которых пара 4^{4} и 4^{-4} энантиоморфна; **5)** (2,2)~(2,1/)~(1/,2)~(1/,1/)~$(2^{/}/)$~$(1/^{2},1/)$~$(2^{2}/)$~ $(2^{2},1/)$~$(2^{/},/^{2})$ – всего 9 *P*-симметрий, **6)** (2/,1)~(1,2/)~$(2/^{/})$~$(1/^{/},2)$~$(2/^{2})$~$(2^{/},2)$~$(2^{2}/^{/})$ – всего 7 *P*-симметрий; **7)** (6,1)~(1,6)~(3,2)~(2,3)~(3,1/)~(1/,3)~$6^{/}$~$(1/^{2},3)$~6^{2}~$(2^{2},3)$~6^{3}~6^{-3}~$(3^{3},2)$~$(3^{-3},2)$~ 6^{6}~6^{-6} – всего 16 *P*-симметрий, из которых три пары, 6^{3} и 6^{-3}, $(3^{3},2)$ и $(3^{-3},2)$, 6^{6} и 6^{-6} энантиоморфны; **8)** (3/,1)~(1,3/)~$(3/^{/})$~$(1/^{/},3)$~$(3/^{2})$~$(2^{/},3)$~$(3^{3}/^{/})$~$(3^{-3}/^{/})$ – всего 8 *P*-симметрий, из которых пара $(3^{3}/^{/})$ и $(3^{-3}/^{/})$ энантиоморфна ; **9)** (4,2)~(2,4)~(4,1/)~(1/,4)~ $(4^{4}, 2)$~$(2^{4}/)$~$(4^{2},1/)$ – всего 7 *P*-симметрий; **10)** $(4^{/}, 2)$~$(2/^{4})$ – всего 2 *P*-симметрии; **11)** (4/,1)~(1,4/)~$(4/^{/})$~ $(1/^{/},4)$~$(2^{/},4)$~$(4/^{2})$~ $(4^{2}/^{/})$~$(2^{4}/^{/})$~$(4^{(4}/^{/})$~$(4^{-4}/^{/})$ – всего 10 *P*-симметрий, из которых одна пара $(4^{4}/^{/})$ и $(4^{-4}/^{/})$ энантиоморфна; **12)** $(4^{/}/)$~$(1/^{4},1/)$~$(4^{2}/)$~$(2^{4},1/)$~$(4^{/}/^{2})$~$(2^{/}/^{4})$ – 6 *P*-симметрий; **13)** (2,2/)~(2/,2)~(2/,1/)~ (1/,2/)~$(2^{/}/,2)$~$(2/^{2},1/)$ – всего 6 *P*-симметрий; **14)** $(2^{2}/, 1/)$; **15)**$(2/^{/},2)$; **16)**(3,3); **17)** (3,4)~(4,3)~6^{4}~ $(4^{2},3)$ – всего 4 *P*-симметрии; **18)** $(3/^{4})$~$(4^{/},3)$ – всего 2 *P*-симметрии; **19)** (6,2) ~(2,6) ~(6,1/) ~ (1/,6)~$(6^{3},2)$~$(6^{-3},2)$ ~$(2^{2}/,3)$~$(6^{2}, 1/)$ – всего 8 *P*-симметрий, из которых пара $(6^{3},2)$ и $(6^{-3},2)$ энантиоморфна; **20)** (2/,3) ~(3,2/) ~$(2/^{2},3)$~$(6^{/},2)$ – всего 4 *P*-симметрии; **21)** (6/,1)~(1,6/)~$(6/^{/})$~$(1/^{/},6)$~$(6/^{2})$~$(2^{/},6)$~$(6^{2}/^{/})$~$(2^{2}/^{/},3)$~$(6^{3}/^{/})$~ $(3^{-3}/^{/},2)$~$(3^{3}/^{/},2)$~$(6^{-3}/^{/})$~$(6^{6}/^{/})$~$(6^{-6}/^{/})$~$(3/^{/},2)$~$(2/^{/},3)$ – всего 16 *P*-симметрий, из которых 2 пары, $(3^{-3}/^{/},2)$ и $(3^{3}/^{/},2)$, а также $(6^{6}/^{/})$ и $(6^{-6}/^{/})$ энантиоморфны; **22)** (3/,2)~(2,3/)~(3/,1/)~(1/,3/)~$(6^{/}/)$~$(1/^{2}, 3/)$~ $(6^{2}/)$~$(2^{2},3/)$~ $(3/^{2},/^{/})$~$(2^{/},3)$~$(6^{/}/^{2})$~$(2^{/}/^{2},3)$ – всего 12 *P*-симметрий; **23)** (2/,2/); **24** (4,4); **25)**(2/,4)~(4,2/) – всего 2 *P*-симметрии; **26)** (4/,2)~(2,4/)~ (4/,1/)~(1/,4/)~$(4/^{2},1/)$~$(2^{/}/,4)$ – всего 6 *P*-симметрий; **27)** $(4^{2}/,1/)$~$(2^{4}/,1/)$~ $(4^{/}/^{2},2)$~$(2/^{4},1/)$ – всего 4 *P*-симметрии; **28)** $(4/^{/},2)$~$(2/^{/},4)$ – всего 2 *P*-симметрии; **29)** $(4^{4}/^{/},2)$; **30)** $(4^{4}/)$~ $(4^{4},2/)$ – всего 2 *P*-симметрии; **31)** $(4^{/}/^{4})$; **32)** $(4/^{4})$~$(4^{/},4)$ – всего 2 *P*-симметрии; **33)** (6,3)~(3,6)~$(6^{2},3)$ – всего 3 *P*-симметрии; **34)** (3/,3)~(3,3/)~$(3/^{2},3)$~$(6^{/},3)$ – всего 4 *P*-симметрии; **35)** $(3/^{/},3)$; **36)** (6,4)~(4,6) – всего 2 *P*-симметрии; **37)** (6,2/)~(2/,6) – всего 2 *P*-симметрии; **38)** (3/,2/)~(2/,3/) – всего 2 *P*-симметрии; **39)** (6/,2)~(2,6/)~(6/,1/)~(1/,6/)~$(6/^{2},1/)$~$(2^{/}/,6)$ – всего 6 *P*-симметрий; **40)** $(6/^{/},2)$~ $(2/^{/},6)$~$(6^{3}/^{/},2)$~$(6^{-3}/^{/},2)$ – всего 4 *P*-симметрии, включая энантиоморфную пару $(6^{3}/^{/},2)$ и $(6^{-3}/^{/},2)$; **41)** $(6^{2}/,1/)$~$(2^{2}/,3/)$ – всего 2 *P*-симметрии; **42)** $(6^{/}/,2)$~$(2/^{2},3/)$ – всего 2 *P*-симметрии; **43)** (4/,3) ~ (3,4/)~$(4/^{2},3)$~$(6^{/},4)$ – всего 4 *P*-симметрии; **44)** $(4^{2}/,3)$~$(6^{4},1/)$ – всего 2 *P*-симметрии; **45)** $(6^{4}/)$~ $(4^{2},3/)$ – всего 2 *P*-симметрии; **46)** $(6/^{4})$~ $(4^{/},6)$ – всего 2 *P*-симметрии; **47)** $(4^{/}/,3)$~$(3/^{4},1/)$~ $(6^{/}/^{4})$~$(4^{/}/^{2},3)$ – всего 4 *P*-симметрии; **48)** $(4/^{/},3)$~$(3/^{/},4)$~ $(6^{4}/^{/})$~$(4^{2}/^{/},3)$ – всего 4 *P*-симметрии; **49)** (3/,4)~(4,3/) – всего 2 *P*-симметрии; **50)** (4/,4)~(4,4/) – всего 2 *P*-симметрии; **51**) (4/,2/)~(2/,4/) – всего 2 *P*-симметрии; **52**) $(4^{4}/,1/)$; **53)** $(4/^{4},1/)$~$(4^{/}/,4)$ – всего 2 *P*-симметрии; **54)** $(4/^{/},4)$; **55)** (6,6); **56)** (3/,3/); **57)** (6,3/)~(3/,6)~$(6^{2}/,3)$~$(6^{2},3/)$ – всего 4 *P*-симметрии; **58**) (6/,3) ~(3,6/)~$(6/^{2},3)$~$(6^{/},6)$ – всего 4 *P*-симметрии; **59)** $(6/^{/},3)$~$(3/^{/},6)$~$(6^{2}/^{/},3)$ – всего 3 *P*-симметрии; **60)** $(6^{/}/,3)$~ $(3/^{2},3/)$~ $(6^{/}/^{2},3)$ – всего 3 *P*-симметрии; **61)** (6,4/)~(4/,6) – всего 2 *P*-симметрии; **62)** (3/,4/)~(4/,3/) – всего 2 *P*-симметрии; **63)** (6/,4)~(4,6/) – всего 2 *P*-симметрии; **64)** (6/,2/) ~(2/,6/) – всего 2 *P*-симметрии; **65)** $(6/^{4}, 1/)$~$(4^{/}/,6)$ – всего 2 *P*-симметрии; **66)** $(6^{4}/,1/)$~$(4^{2}/, 3/)$ – всего 2 *P*-симметрии; **67)** $(6^{/}/, 4)$ ~$(4/^{2},3/)$ – всего 2 *P*-симметрии; **68)** $(6/^{/},4)$ ~$(4/^{/},6)$ – всего 2 *P*-симметрии; **69)** (4/, 4/); **70)** (6/,6)~(6,6/) – всего 2 *P*-симметрии; **71)** (6/,3/)~(3/,6/)~ $(6/^{2},3/)$~ $(6^{/}/,6)$ – всего 4 *P*-симметрии; **72)** $(6^{2}/,3/)$; **73)** $(6/^{/},6)$; **74**) (6/,4/)~(4/,6/) – всего 2 *P*-симметрии; **75**) (6/,6/) – всего 263 бирозеточных *P*-симметрии, из которых 252 различны без учёта энантиоморфизма.

Из приведенного перечня классов изоморфных бирозеточных *P*-симметрий следует, что из 263 различных с учётом энантиоморфизма и 252 различных без его учёта бирозеточных *P*-симметрий неизоморфны между собой только 75, а из 263 групп P, задающих бирозеточные *P*-симметрии, неизоморфны ровно 57.

4. Интересующие нас группы G_{10}^{P} бирозеточных *P*-симметрий делятся, как отмечено в [1,6,7], на старшие, младшие и *Q*-средние. Вывод старших групп тривиален, так как в этом случае, согласно [1,6,7], G = S×P, где S – порождающая группа, P – группа подстановок индексов, характеризующая рассматриваемую *P*-симметрию, x - символ прямого произведения групп. Младшие группы данной *P*-симметрии выводятся из определенной порождающей S, согласно основной теореме из [1,6,7], только в том случае, если S обладает таким нормальным делителем H, что фактор–группа P/H $\cong$ P. Изучение *Q*-средних групп *P*-симметрии, согласно той же основной теореме, связано с перебиранием нетривиальных нормальных делителей Q групп подстановок P, а сам подсчет этих групп становится сразу же возможным, если предварительно выявлены младшие, ибо, как доказано в [23], число различных *Q*-средних групп *P*-симметрии в данном семействе равно количеству младших групп P_0-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа P/Q сильно изоморфна P_0. При этом в семействах групп изоморфных *P*-симметрий с общей порождающей совпадают не только числа различных младших, но и числа различных средних групп [23]. Это позволяет существенно сократить числовой обзор групп G_{10}^{P} бирозеточных *P*-симметрий, так как для полного их подсчета следует осуществить подробное исследование не для всех 263 *P*-симметрий, а только для одной из каждого класса изоморфности, т.е. только для 75 неизоморфных бирозеточных *P*-симметрий.

Для удобства использования этих *P*-симметрий выпишем их под номерами классов изоморфности, из которых они извлечены. Список этих неизоморфных 75 бирозеточных *P*-симметрий таков: **1)** (1,1), **2)** (2,1), **3)** (3,1), **4)** (4,1), **5)** (2,2), **6)** (2/,1), **7)** (6,1), **8)** (3/,1), **9)** (4,2), **10)** (4/,2), **11)** (4/,1), **12)** $(4^{\prime}/)$, **13)** (2/,2), **14)** $(2^{2}/,1/)$, **15)** $(2/^{\prime},2)$, **16)** (3,3), **17)** (3,4), **18)** $(3/^{4})$, **19)** (6,2), **20)** (2/,3), **21)** (6/,1), **22)** (3/, 2), **23)** (2/, 2/), **24)** (4,4), **25)** (2/,4), **26)** (4/,2), **27)** $(4^{2}/,1/)$, **28)** $(4/^{\prime},2)$, **29)** $(4^{4}/^{\prime},2)$, **30)** $(4^{4}/)$, **31)** $(4^{\prime}/^{4})$, **32)** $(4/^{4})$, **33)** (6,3), **34)** (3/,3), **35)** $(3/^{\prime},3)$, **36)** (6,4), **37)** (6,2/), **38)** (3/,2/), **39)** (6/,2), **40)** $(6/^{\prime},2)$, **41)** $(6^{2}/^{\prime},1/)$, **42)** $(6^{\prime}/,2)$, **43)** (4/,3), **44)** $(4^{2}/,3)$, **45)** $(6^{4}/)$, **46)** $(6/^{4})$, **47)** $(4^{\prime}/,3)$, **48)** $(4/^{\prime},3)$, **49)** (3/,4), **50)** (4/,4), **51)** (4/,2/), **52)** $(4^{4}/,1/)$, **53)** $(4/^{4},1/)$, **54)** $(4/^{\prime},4)$, **55)** (6,6), **56)** (3/,3/), **57)** (6,3/), **58)** (6/,3), **59)** $(6/^{\prime},3)$, **60)** $(6^{\prime}/,3)$, **61)** (6,4/), **62)** (4/,3/), **63)** (6/,4), **64)** (6/,2/), **65)** $(6/^{4}, 1/)$, **66)** $(6^{4}/,1/)$, **67)** $(6^{\prime}/,4)$, **68)** $(6/^{\prime},4)$, **69)** (4/,4/), **70)** (6/,6),**71)** (6/,3/), **72)** $(6^{2}/, 3/)$, **73)** $(6/^{\prime},6)$, **74)** (6/,4/), **75)** (6/,6/). Из них подчеркнутые можно изучать менее подробно, как изоморфные таблеточным [17] или кристаллографическим *P*-симметриям [7, с. 31]. Из приведенного перечня следует, что таких бирозеточных *P*-симметрий 17.

Для полного обзора *Q*-средних групп категории G_{10}^{P} 263 бирозеточных *P*-симметрий нужно для каждой из 75 выписанных *P*-симметрий найти все её нетривиальные нормальные делители, составить фактор-группы P/Q и указать ту группу, которой эта фактор-группа будет сильно изоморфна. Это довольно сложная и громоздкая задача, решение которой будет дано в новой отдельной статье.

5. Изучение интересующих нас 5-мерных групп симметрии категории G_{5310} можно осуществить с помощью интерпретирующих их таблеточных групп G_{310}^{P} розеточных *P*-симметрий, а также с помощью интерпретирующих их одномерных точечных групп G_{10}^{P} бирозеточных *P*-симметрий (ср.[21]). Совпадение независимых способов обзора полного числа 5-мерных групп симметрии категории G_{5310} и даст окончательное достоверное число различных групп симметрии этой категории.

Из-за громоздкости приведем в настоящей статье в шубниковской символике [2,5] список только таблеточных групп G_{310}^{P} розеточных *P*-симметрий [17], интерпретирующих с точностью до строения все различные 5-мерные группы симметрии категории G_{5310}. Список таблеточных групп G_{310}^{P} 10 розеточных *P*-симметрий, распределяющихся, согласно [17], по 9 классам 1; 2, 1/;3;4; 6;2/; 3/; 4/; 6/ сильной изоморфности, выглядит следующим образом.

Группы симметрии G_{310} (порождающие, или 1-симметрии) – 1, 1·m, 1: m, 1:2, 1:m·2, 2, $\tilde{2}$, 2:m, 3, 3:m, 4, 4:m, $\tilde{4}$,6, 6:m, $\tilde{6}$, 2·m, 2·m:2, 1·m:2, 2:2, 3·m, 3:m·2, 3:2, 4·m, 4·m:2, $\tilde{4}$ ·m, 4:2, 6·m, 6:m·2, $\tilde{6}$ ·m, 6:2 – всего 31 группа симметрии таблеток (ср. с. 72 в [5]).

Далее, так как при любой розеточной *P*-симметрии, отличной от тривиальной 1, каждая группа симметрии таблеток порождает по одной старшей, являющейся прямым произведением таблеточной группы симметрии и группы P, задающей данную розеточную *P*-симметрию, то таких старших таблеточных групп розеточных *P*-симметрии будет ровно 279(31×9).

Следовательно, чтобы выявить количество всех различных таблеточных групп розеточных *P*-симметрий, осталось, как это следует из п.4, вывести всевозможные младшие и *Q*-средние группы, порождаемые 31 таблеточной группой при каждой из остальных 8 нетривиальных розеточных *P*-симметриях.

Начнем с (1/)-симметрии. В этом случае группы G_{310} порождают следующие младшие группы антисимметрии: $1\cdot m^{/}$; $1:m^{/}$; $1:2^{/}$; $1:m^{/}\cdot 2$, $1:m\cdot 2^{/}$, $1:m^{/}\cdot 2^{/}$; $2^{/}$; $\tilde{2}^{/}$; $2^{/}:m$, $2:m^{/}$, $2^{/}:m^{/}$; $3:m^{/}$; $4^{/}$; $4^{/}:m$, $4\cdot m^{/}$, $4^{/}:m^{/}$; $\tilde{4}^{/}$; $6^{/}$; $6^{/}:m$, $6\ :m^{/}$, $6^{/}:m^{/}$; $\tilde{6}^{/}$; $2^{/}\cdot m$, $2\cdot m^{/}$; $2^{/}\cdot m:2$, $2\cdot m^{/}:2$, $2\cdot m:2^{/}$, $2^{/}\cdot m:2^{/}$, $2\cdot m^{/}:2^{/}$; $1\cdot m^{/}:2$, $1\cdot m:2^{/}$, $1\cdot m^{/}:2^{/}$; $2:2^{/}$, $2^{/}:2^{/}$; $3\cdot m^{/}$; $3:m^{/}\cdot 2$, $3:m\cdot 2^{/}$, $3:m^{/}\cdot 2^{/}$; $3:2^{/}$; $4^{/}\cdot m$, $4\cdot m^{/}$; $4^{/}\cdot m:2$, $4\cdot m^{/}:2$, $4\cdot m:2^{/}$, $4^{/}\cdot m:2^{/}$, $4\cdot m^{/}:2^{/}$; ; $\tilde{4}^{/}\cdot m$, $\tilde{4}\cdot m^{/}$, $\tilde{4}^{/}\cdot m^{/}$, $4:2^{/}$, $4^{/}:2^{/}$; $6^{/}\cdot m$, $6\cdot m^{/}$; $6^{/}: m\cdot 2$, $6:m^{/}\cdot 2$, $6:m\cdot 2^{/}$, $6^{/}:m^{/}\cdot 2$, $6:m^{/}\cdot 2^{/}$; $\tilde{6}^{/}\cdot m$, $\tilde{6}\cdot m^{/}$, $\tilde{6}^{/}\cdot m^{/}$; $6: 2^{/}$, $6^{/}:2^{/}$ – всего 63 группы.

Если в списке 63 младших групп антисимметрии таблеток символ «/» заменить на символ «(2)», то получим список 63 младших групп, порождаемых таблеточными группами симметрии при их обобщении с 2-симметрией, то есть группы $1\cdot m^{(2)}$, $1:m^{(2)}$,…,$6^{(2)}:2^{(2)}$ – всего 63 группы.

Далее, при 3-симметрии группы G_{310} порождают только следующие младшие: $3^{(3)}$; $6^{(3)}$; $\tilde{6}^{(3)}$; $3^{(3)}: m$ и $6^{(3)}: m$ – всего 5 групп [7, с.44].

При 4-симметрии группы G_{310} порождают младшие – $4^{(4)}$; $\tilde{4}^{(4)}$;$4^{(4)} : m$, $4^{(4)}:m^{(2)}$ – всего 4 группы, а также 2-средние $1\cdot m^{(4)}$; $1:m^{(4)}$; $1: 2^{(4)}$; $1 : m^{(4)}\cdot 2$, $1: m\cdot 2^{(4)}$, $1:m^{4} : 2^{(4)}$; $2^{(4)}$; $\tilde{2}^{(4)}$; $2^{(4)}: m$; $2 : m^{(4)}$, $2^{(4)}: m^{(4)}$; $3:m^{(4)}$; $4^{(4)}\times 1^{(2)}$; $4^{(4)}:m$; $4: m^{(4)}$, $4^{(4)}:m^{(4)}$; $\tilde{4}^{(4)}\times 1^{(2)}$; $6^{(4)}$; $6^{(4)}:m$, $6:m^{(4)}$, $6^{(4)}:m^{(4)}$; $\tilde{6}^{(4)}$; $2^{(4)}\cdot m$, $2\cdot m^{(4)}$; $2^{(4)}\cdot m : 2$, $2\cdot m^{(4)}:2$, $2\cdot m : 2^{(4)}$, $2^{(4)}\cdot m : 2^{(4)}$, $2\cdot m^{(4)} : 2^{(4)}$; $1\cdot m^{(4)}:2$, $1\cdot m : 2^{(4)}$, $1\cdot m^{(4)}:2^{(4)}$; $2:2^{(4)}$, $2^{(4)}:2^{(4)}$; $3\cdot m^{(4)}$; $3: m^{(4)}\cdot 2$, $3\cdot m\cdot 2^{(4)}$, $3:m^{(4)}\cdot 2^{(4)}$; $3:2^{(4)}$; $4^{(4)}\cdot m$, $4\cdot m^{(4)}$; $4^{(4)}\cdot m:2$, $4\cdot m^{(4)}:2$, $4\cdot m : 2^{(4)}$, $4^{(4)}\cdot m:2^{(4)}$, $4\cdot m^{(4)}:2^{(4)}$; $\tilde{4}^{(4)}\cdot m$, $\tilde{4}\cdot m^{(4)}$, $\tilde{4}^{(4)}\cdot m^{(4)}$; $4:2^{(4)}$, $4^{(4)} : 2^{(4)}$; $6^{(4)}\cdot m$, $6\cdot m^{(4)}$; $6^{(4)}:m\cdot 2$, $6 : m^{(4)}\cdot 2$, $6:m\cdot 2^{(4)}$, $6^{(4)}:m^{(4)}\cdot 2$, $6:m^{(4)}:2^{(4)}$; $\tilde{6}^{(4)}\cdot m$, $\tilde{6}\cdot m^{(4)}$, $\tilde{6}^{(4)}\cdot m^{(4)}$; $6:2^{(4)}$, $6^{(4)}:2^{(4)}$ – всего 63 группы, ввиду того, что группа 4, задающая 4-симметрию, имеет нетривиальный нормальный делитель Q = 2, а фактор-группа $4/2 \cong 2$. Следовательно, 2-средних групп при 4-симметрии будет столько, согласно [23], сколько имеется младших таблеточных групп антисимметрии.

При 6-симметрии таблеточные группы G_{310} порождают следующие младшие: $6^{(6)}$; $\tilde{6}^{(6)}$; $6^{(6)}:m$, $6^{(3)}: m^{(2)}$, $6^{(6)}:m^{(2)}$; $3^{(3)}:m^{(2)}$ – всего 6 групп, а также 2- и 3-средние группы. Список 2-средних групп таков: $3^{(3)}\times 1^{(2)}$; $6^{(3)}\times 1^{(2)}$; $\tilde{6}^{(3)}\times 1^{(2)}$; $(3^{(3)}\cdot m)\times 1^{(2)}$; $(6^{(3)}:m)\times 1^{(2)}$ – всего 5 групп, так как фактор-группа $6/2 \cong 3$, а список 3-средних групп выглядит так: $(1\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(1:m^{(2)})\times 1^{(3)}$;$(1:2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(1:m^{(2)}\cdot 2)\times 1^{(3)}$, $(1:m\cdot 2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(1:m^{(2)}\cdot 2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $2^{(2)}\times 1^{(3)}$; $\tilde{2}^{(2)}\times 1^{(3)}$; $(2^{(2)}:m)\times 1^{(3)}$, $(2:m^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(2^{(2)}:m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(3: m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $4^{(2)}\times 1^{(3)}$; $(4^{(2)}: m)\times 1^{(3)}$, $(4:m^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(4^{(2)}:m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $\tilde{4}^{(2)}\times 1^{(3)}$; $6^{(2)}\times 1^{(3)}$; $(6^{(2)}:m)\times 1^{(3)}$, $(6:m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(6^{(2)}:m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $\tilde{6}^{(2)}\times 1^{(3)}$; $(2^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$, $(2\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(2^{(2)}\cdot m:2)\times 1^{(3)}$, $(2\cdot m^{(2)}:2)\times 1^{(3)}$, $(2\cdot m:2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(2^{(2)}\cdot m:2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $2\cdot m^{(2)}:2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(1\cdot m^{(2)}:2)\times 1^{(3)}$, $(1\cdot m\cdot 2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(1\cdot m^{(2)}:2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(2:2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(2^{(2)}:2^{(2)})\times 1^{(3)}$;$(3\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(3:m^{(2)}\cdot 2)\times 1^{(3)}$, $(3:m\cdot 2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(3:m^{(2)}\cdot 2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(3:2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(4^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$, $(4\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(4^{(2)}\cdot m:2)\times 1^{(3)}$, $(4\cdot m^{(2)}:2)\times 1^{(3)}$, $(4\cdot m:2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(4^{(2)}\cdot m:2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(4\cdot m^{(2)}\ :2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(\tilde{4}^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$, $(\tilde{4}\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(\tilde{4}^{(2)}\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(4:2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(4^{(2)}:2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(6^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$, $(6\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(6^{(2)}:m\cdot 2)\times 1^{(3)}$, $(6:m^{(2)}\cdot 2)\times 1^{(3)}$, $(6:m\cdot 2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(6^{(2)}:m^{(2)}\cdot 2)\times 1^{(3)}$, $(6:m^{(2)}\cdot 2^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(\tilde{6}^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$, $(\tilde{6}\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(\tilde{6}^{(2)}\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(6:2^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(6^{(2)}:2^{(2)})\times 1^{(3)}$ – всего 63 группы в связи с тем, что фактор-группа $6/3 \cong 2$ [23].

При (2/)- симметрии таблеточные группы G_{310} порождают младшие- $2^{(2}:m^{/)}$, $2^{/)}:m^{(2}$, $2^{(2\prime}:m^{(2}$; $4^{(2}:m^{/)}$, $4^{/)}:m^{(2}$, $4^{(2\prime}:m^{(2}$; $6^{(2}:m^{/)}$, $6^{/)}:m^{(2}$, $6^{(2\prime}:m^{(2}$; $1:m^{(2}\cdot 2^{/)}$,$1:m^{/)}\cdot 2^{(2}$, $1:m^{(2\prime}\cdot 2^{(2}$;$2^{(2}\cdot m^{/)}:2$,$2^{(2\prime}\cdot m^{(2}:2$, $2^{(2}\cdot m:2^{/)}$, $2^{/)}\cdot m:2^{(2}$, $2^{(2\prime}\cdot \cdot m : 2^{(2}$; $2\cdot m^{(2}:2^{/)}$, $2\cdot m^{/)} :2^{(2}$, $2\cdot m^{(2\prime} : 2^{(2}$; $2^{(2}\cdot m^{/)}:2^{/)}$, $2^{(2\prime} \cdot m^{(2}: 2^{(2}$; $2^{(2} \cdot m^{/)}:2^{(2}$, $2^{(2\prime}\cdot m^{(2}:2^{(2\prime}$, $2^{(2}\cdot m^{/)}:2^{(2\prime}$, $2^{(2\prime} \cdot m^{(2}:2^{/)}$; $3:m^{(2}\cdot 2^{/)}$, $3:m^{/)}\cdot 2^{(2}$; $3:m^{(2\prime} \cdot 2^{(2}$; $4^{(2}\cdot m^{/)}: 2$, $4^{(2\prime} \cdot m^{(2}:2$; $4^{(2}\cdot m : 2^{/)}$, $4^{/)}\cdot m : 2^{(\prime 2}$, $4^{(2\prime} \cdot m : 2^{(2}$; $4\cdot m^{(2}:2^{/)}$, $4\cdot m^{/)}:2^{(2}$, $4\cdot m^{(2\prime}:2^{(2}$; $4^{(2}\cdot m^{/)}:2^{/)}$, $4^{(2\prime} \cdot m^{(2}\cdot 2^{(2}$, $4^{(2}\cdot m^{/)}:2^{(2}$, $4^{(2\prime}\cdot m^{(2}:2^{(2\prime}$; $4^{(2}\cdot m^{/)}:2^{(2\prime}$,$4^{/)}\cdot m^{(2\prime}:2^{(2}$; $6^{(2}:m^{(2\prime}\cdot 2$, $6^{/)}:m^{(2}\cdot 2$; $6^{(2}:m\cdot 2^{/)}$, $6^{/)}:m\ \cdot 2^{(2}$; $6:m^{(2}\cdot 2^{/)}$, $6:m^{/)}\cdot 2^{(2}$, $6:m^{(2\prime} \cdot 2^{(2}$; $6^{(2}:m^{(2}\cdot 2^{/)}$, $6^{/)}:m^{/)}\cdot 2^{(2}$; $6^{(2}:m^{/)}\cdot 2^{(2}$, $6^{(2\prime} : m^{(2}\cdot 2^{(2\prime}$; $6^{(2}:m^{/)}\cdot 2^{(2\prime}$, $6^{/)}:m^{(2}\cdot 2^{(2\prime}$, $6^{(2\prime}:m^{(2}\cdot 2^{/)}$; $1\cdot m^{(2}:2^{/)}$, $1\cdot m^{/)}:2^{(2}$, $1\cdot m^{(2\prime} \cdot 2^{(2}$; $2^{(2}:2^{/)}$, $2^{/)}:2^{(2}$; $\tilde{4}^{(2}\cdot m^{/)}$, $\tilde{4}^{(/}\cdot m^{2)}$, $\tilde{4}^{(2\prime}\cdot m^{2)}$; $4^{(2}:2^{/)}$, $4^{/)}:2^{(2}$; $\tilde{6}^{(2}\cdot m^{/)}$, $\tilde{6}^{/)}\cdot m^{(2}$, $\tilde{6}^{(2\prime} \cdot m^{(2}$,

ISSN 1857-2073

$6^{(2}:2^{/)}$, $6^{/)}:2^{(2}$; $2^{(2}\cdot m^{/)}$, $2^{/)}\cdot m^{(2}$; $4^{(2}\cdot m^{/)}$, $4^{/)}\cdot m^{(2}$; $6^{(2}\cdot m^{/)}$, $6^{/)}\cdot m^{(2}$ – всего 78 групп, а также 63 (1/) – средних и 63 2-средних, ибо $(2/)/2 \simeq (2/)/(1/) \simeq 2$ [23].

Список $(1^{/)})$-средних групп выглядит так: $(1\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(1:m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(1:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(1:m^{(2}\cdot 2)\cdot 1^{/)}$, $(1:m\cdot 2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(1:m^{(2}\cdot 2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $2^{(2}\cdot 1^{/)}$; $\tilde{2}^{(2}\cdot 1^{/)}$; $(2^{(2}:m)\cdot 1^{/)}$, $(2:m^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(2^{(2}:m^{(2})\cdot 1^{/)}$; $(3:m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $4^{(2}\cdot 1^{/)}$; $(4^{(2}:m)\times 1^{/)}$, $(4:m^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(4^{(2}:m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $\tilde{4}^{(2}\cdot 1^{/}$; $6^{(2}\cdot 1^{/)}$; $(6^{(2}:m)\cdot 1^{/)}$, $(6:m^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(6^{(2}:m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $\tilde{6}^{(2}\cdot 1^{/)}$; $(2^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$,$(2\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(2^{(2}\cdot m:2)\cdot 1^{/)}$, $(2\cdot m^{(2}:2)\cdot 1^{/)}$, $(2\cdot m:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(2^{(2}\cdot m:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(2\cdot m^{(2}:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(1\cdot m^{(2}:2)\cdot 1^{/)}$, $(1\cdot m:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(1\cdot m^{(2}:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $\cdot$ $(2:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(2^{(2}:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(3\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(3:m^{(2}\cdot 2)\cdot 1^{/)}$, $(3:m\cdot 2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(3:m^{(2}\cdot 2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(3:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(4^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(4\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(4^{(2}\cdot m:2)\cdot 1^{/)}$, $(4\cdot m^{(2}:2)\cdot 1^{/)}$, $(4\cdot m:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(4^{(2}\cdot m:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(4\cdot m^{(2}:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(\tilde{4}^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(\tilde{4}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(\tilde{4}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(4:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(4^{(2}:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(6^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(6\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(6^{(2}:m\cdot 2)\cdot 1^{/)}$, $(6:m^{(2}\cdot 2)\cdot 1^{/)}$, $(6:m\cdot 2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(6^{(2}:m^{(2}\cdot 2)\cdot 1^{/)}$, $(6:m^{(2}\cdot 2^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(\tilde{6}^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(\tilde{6}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(\tilde{6}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{/)}$; $(6:2^{(2)})\cdot 1^{/)}$, $(6^{(2}:2^{2)})\cdot 1^{/)}$ – всего 63 группы.

Что касается 2-средних групп, то их список таков: $(1\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$; $(1:m^{/)})\cdot 1^{(2}$; $(1:2^{/)})\times 1^{(2}$; $(1:m^{/)}\cdot 2)\times 1^{(2}$, $(1:m\cdot 2^{/)})\times 1^{(2}$, $(1:m^{/)}\cdot 2^{/)})\times 1^{(2}$; $2^{/)}\times 1^{(2}$; $\tilde{2}^{/)}\times 1^{(2}$; $(2^{/)}:m)\times 1^{(2}$, $(2:m^{/)})\times 1^{(2}$, $(2^{/)}:m^{/)})\times 1^{(2}$; $(3\cdot m^{/})\times 1^{(2}$; $4^{/)}\times 1^{(2}$;$(4^{/)}:m)\times 1^{(2}$, $(4:m^{/)}\times 1^{(2}$, $(4^{/)}:m^{/)})\times 1^{(2}$; $\tilde{4}^{/)}\times 1^{(2}$; $6^{/)}\times 1^{(2}$; $(6^{/)}:m)\times 1^{(2}$, $(6:m^{/)})\times 1^{(2}$; $(6^{/)}:m^{/)})\times 1^{(2}$;$\tilde{6}^{/)}\times 1^{(2}$; $(2^{/)}\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$,$(2\cdot m^{/})\times 1^{(2}$; $(2^{/)}\cdot m:2)\times 1^{(2}$, $(2\cdot m^{/)}:2)\times 1^{(2}$, $(2\cdot m:2^{/)})\times 1^{(2}$,$(2^{/)}\cdot m:2^{/)})\times 1^{(2}$, $(2\cdot m^{/}:2^{/)})\times 1^{(2}$; $(1\cdot m^{/)}:2)\times 1^{(2}$, $(1\cdot m:2^{/})\times 1^{(2}$, $(1\cdot m^{/)}:2^{/)})\times 1^{(2}$; $(2:2^{/)})\times 1^{(2}$, $(2^{/)}:2^{/)})\times 1^{(2}$; $(3\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$; $(3:m^{/)}\cdot 2)\times 1^{(2}$, $(3:m\cdot 2^{/)})\times 1^{(2}$, $(3:m^{/)}\cdot 2^{/)})\times 1^{(2}$; $(3:2^{/)})\times 1^{(2}$; $(4^{/)}\cdot m)\times 1^{(2}$, $(4\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$; $(4^{/)}\cdot m:2)\times 1^{(2}$, $(4\cdot m^{/)}:2)\times 1^{(2}$, $(4\cdot m:2^{/)})\times 1^{(2}$, $(4^{/)}\cdot m:2^{/)})\times 1^{(2}$, $(4\cdot m^{/)}:2^{/)})\times 1^{(2}$; $(\tilde{4}^{/)}\cdot m)\times 1^{(2}$, $(\tilde{4}\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$, $(\tilde{4}^{/)}\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$; $(4:2^{/)})\times 1^{(2}$, $(4^{/)}:2^{/)})\times 1^{(2}$; $(6^{/)}\cdot m)\times 1^{(2}$, $(6\cdot m^{/)})\times 1^{(2}$; $(6^{/)}:m\cdot 2)\times 1^{2)}$, $(6:m^{/)}\cdot 2)\times 1^{2)}$, $(6:m\cdot 2^{/)})\times 1^{(2}$, $(6^{/)}:m^{/)}\cdot 2)\times 1^{(2}$, $(6:m^{/)}\cdot$