

INFORMAȚIE DESPRE GRUPURILE ROTATIVE ALE POLIEDRELOR REGULATE

Pavel ZABOLOTNÎI

Catedra Algebră și Geometrie

The work contains a detailed description of the location of symmetry elements in sets, corresponding to every rotational symmetry group $3/2$, $3/4$, $3/5$. All these groups are described in a common coordinate system, which simplifies both finding group symmetry element directions as well as comparing these directions for elements of different groups. Every element of every group has a unique index, and numerous automatically computed summary tables will help finding the angle between directions of any two symmetry axes from any of the three mentioned symmetry groups.

După cercetarea structurii algebrice a principalelor serii de grupuri punctuale **k**, **k·m**, **k:m**, **k:2**, **m:k:m** [1-3], a mai rămas de cercetat seria de grupuri punctuale, generate de rotațiile elementare în jurul a două axe de ordin superior, așezate sub unghi ascuțit una față de alta. Studiarea acestei categorii devine mai complicată, în primul rând – din cauza ordinului relativ mare al grupurilor cercetate și, în al doilea rând – din cauza nedeterminării ce se conține în formularea „axe așezate sub unghi ascuțit una față de alta”. În principiu, acesta poate fi orice unghi de pe intervalul 0^0 , 90^0 , dar încercarea de a cerceta două axe de ordin superior, așezate sub un unghi ascuțit arbitrar ne conduce de cele mai dese ori la grupuri nediscrete, care conțin rotații la unghiuri oricât de mici și nu se încadrează în problema generală discutată aici.

Pentru rezolvarea problemei formulate, vom da la început o descriere amănunțită a grupurilor rotative cunoscute ale poliedrelor regulate, descriere obținută cu ajutorul computerului și fixată în tabele speciale, din care pot fi extrase oricând datele concrete necesare pentru cercetare, comparare, generalizare ș.a.m.d. Plus la toate, o astfel de informație va fi folositoare în orice alte domenii ale matematicii, legate într-un mod sau altul de poliedrele regulate.

Deoarece printre cele cinci poliedre regulate se întâlnesc două perechi de poliedre **duale** (cubul și octaedrul regulat, icosaedrul și dodecaedrul), care au grupuri complete de simetrie identice, aceste perechi de poliedre au unul și același grup rotativ. Rămâne ca mai departe să fie cercetate numai trei grupuri rotative, de exemplu, cel al **tetraedrului regulat** (grup cu denumirea clasică $3/2$), grupul rotativ al **cubului** (denumirea clasică $3/4$) și grupul rotativ al **icosaedrului** (denumirea clasică $3/5$). Pentru a simplifica raționamentele, dar și pentru a ușura compararea rezultatelor referitoare la diferite grupuri, este convenabil să reprezentăm cele trei poliedre regulate într-un sistem unic de coordonate, așa cum e arătat pe Figurile 1, 2 și 3. Ideea de bază aici constă în posibilitatea de a înscrie tetraedrul regulat și icosaedrul în același cub, de care este legat în cel mai obișnuit mod sistemul cartezian rectangular de coordonate ilustrat pe desen. Determinând în acest sistem coordonatele vârfurilor poliedrului cercetat, mijloacurilor laturilor și centrelor fețelor lui, vom deține toată informația necesară pentru calcularea unghiurilor dintre orice două axe de simetrie, care, după cum se știe, trec anume prin aceste puncte caracteristice. Niște programe speciale de calcul, la care nu ne vom opri în lucrarea de față, găsesc aceste unghiuri (și valoarea aproximativă a cosinusurilor lor) și le plasează în Tabelele 1-15, a căror structură este destul de firească și simplă, fără să necesite explicații suplimentare. Anume unghiurile din aceste tabele, tipărite pe 5–6 pagini, împreună cu tabelele rezultante relativ scurte, ce conțin pentru fiecare grup numai date alese, compactizate după anumite criterii, ne vor ajuta în viitor să ne orientăm mai sigur în acest torent voluminos de informație inițială.

Coordonatele punctelor și ale direcțiilor caracteristice pentru fiecare din cele trei grupuri cercetate corespund listei elementelor fiecărui grup și notațiilor de pe Figurile 1-3. Tabelul generalizat cu care se termină descrierea fiecărui grup conține informația compactizată din tabelele precedente, fără multiplele repetări, deși în el sunt indicate și unghiurile triviale de 0^0 și 90^0 .

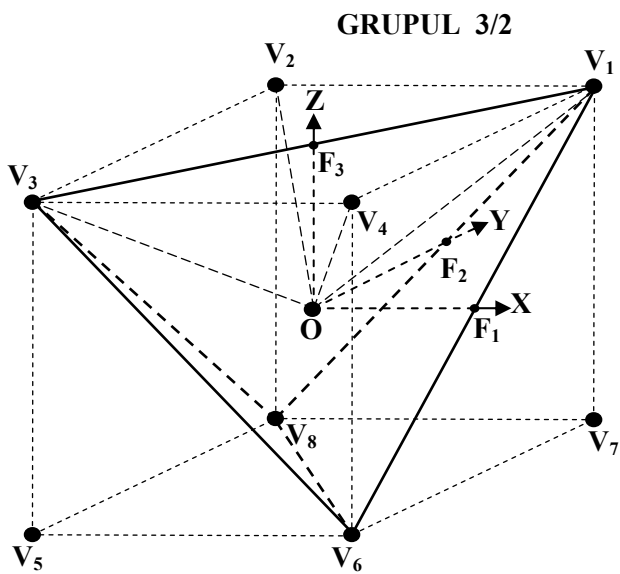


Fig.1

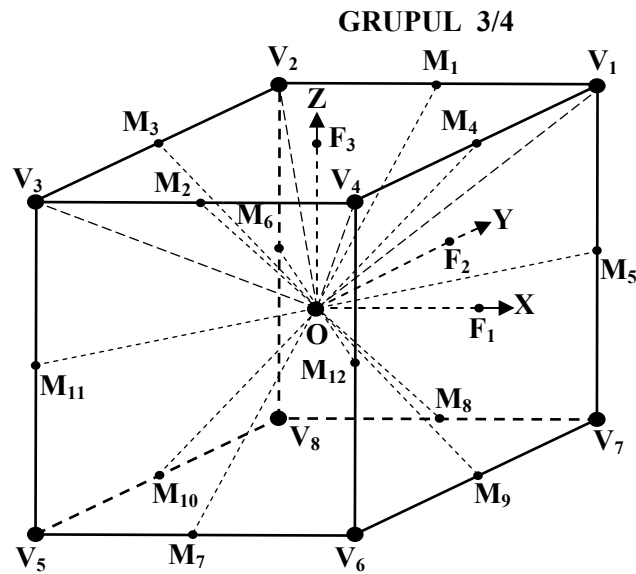


Fig.2

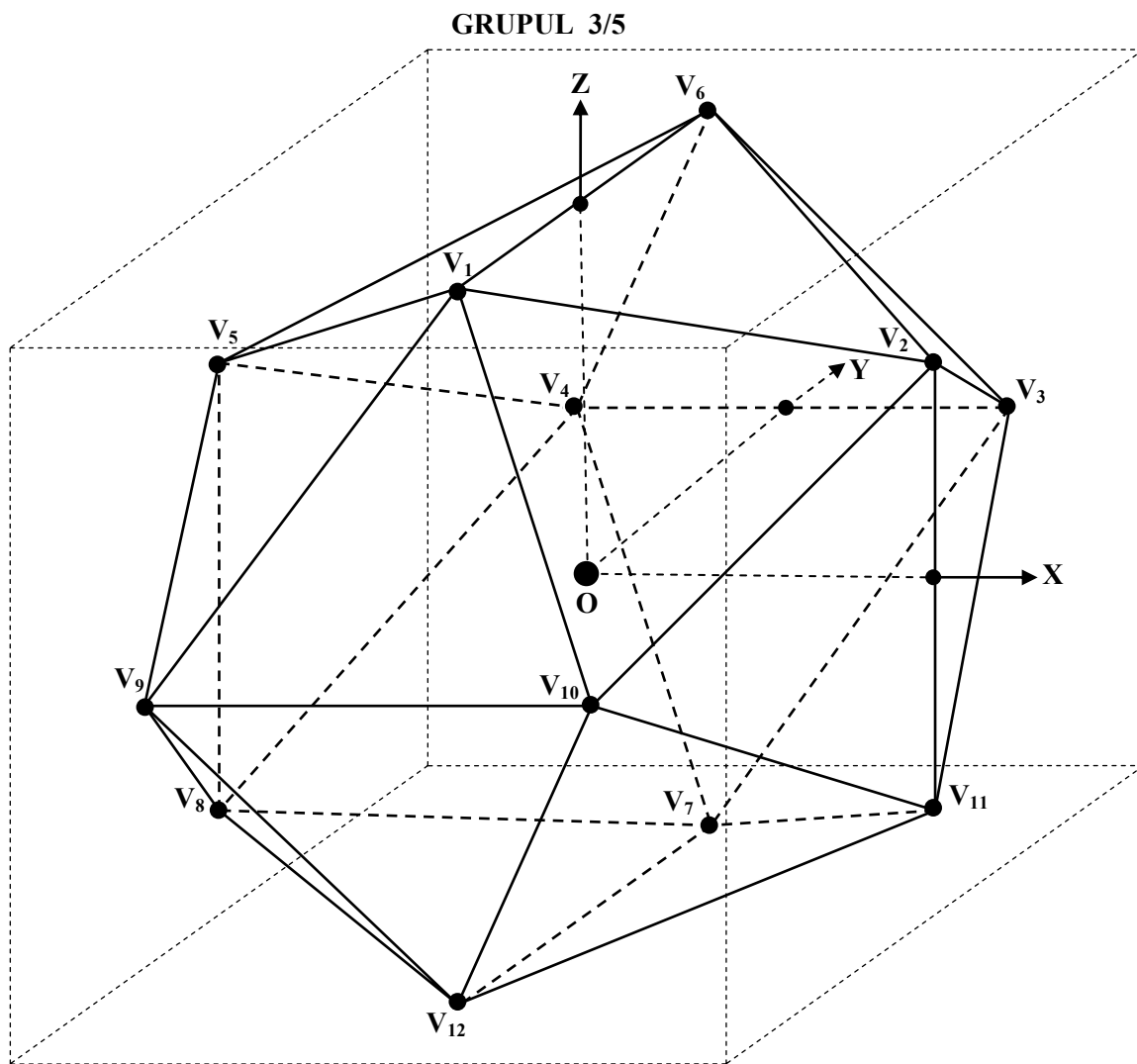


Fig.3

GRUPUL 3/2; ELEMENTELE GRUPULUI

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
E	3 ₁	3 ₁ ²	3 ₂	3 ₂ ²	3 ₃	3 ₃ ²	3 ₄	3 ₄ ²	2 ₁	2 ₂	2 ₃

GRUPUL 3/2; PUNCTE ȘI DIRECȚII CARACTERISTICE (Fig.1)

c – semilatura cubului circumscris tetraedrului

GRUPUL 3/2; Vârfurile cubului:

V₁(c, c, c); V₂(-c, c, c); V₃(-c,-c, c); V₄(c,-c, c); V₅(-c,-c,-c); V₆(c,-c,-c); V₇(c, c,-c); V₈(-c, c,-c);

GRUPUL 3/2; Centrele fețelor cubului:

F₁(c, 0, 0) ~ [V₁ - V₄ - V₆ - V₇]; F₂(0, c, 0) ~ [V₁ - V₂ - V₈ - V₇]; F₃(0, 0, c) ~ [V₁ - V₂ - V₃ - V₄];

F₄(-c, 0, 0) ~ [V₅ - V₈ - V₂ - V₃]; F₅(0,-c, 0) ~ [V₅ - V₆ - V₄ - V₃]; F₆(0, 0,-c) ~ [V₅ - V₆ - V₇ - V₈];

GRUPUL 3/2; Direcțiile axelor de ordinul 3 (AXE3):

AXE31={ c, c, c} ~ 3₁ ~ V₁; AXE32={-c, c, c} ~ 3₂ ~ V₂;

AXE33={-c,-c, c} ~ 3₃ ~ V₃; AXE34={ c,-c, c} ~ 3₄ ~ V₄;

GRUPUL 3/2; Direcțiile axelor de ordinul 2 (AXE2):

AXE21={ c, 0, 0} ~ 2₁ ~ F₁; AXE22={ 0, c, 0} ~ 2₂ ~ F₂; AXE23={ 0, 0, c} ~ 2₃ ~ F₃;

GRUPUL 3/4; ELEMENTELE GRUPULUI

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
E	3 ₁	3 ₁ ²	3 ₂	3 ₂ ²	3 ₃	3 ₃ ²	3 ₄	3 ₄ ²	4 ₁	4 ₁ ²	4 ₁ ³
4 ₂	4 ₂ ²	4 ₂ ³	4 ₃	4 ₃ ²	4 ₃ ³	2 ₁	2 ₂	2 ₃	2 ₄	2 ₅	2 ₆

GRUPUL 3/4; PUNCTE ȘI DIRECȚII CARACTERISTICE (Fig.2) (c – semilatura cubului)

GRUPUL 3/4; Vârfurile cubului:

V₁(c, c, c); V₂(-c, c, c); V₃(-c,-c, c); V₄(c,-c, c); V₅(-c,-c,-c); V₆(c,-c,-c); V₇(c, c,-c); V₈(-c, c,-c);

GRUPUL 3/4; Mijlocurile muchiilor cubului:

M₁(0, c, c) ~ [V₁ - V₂]; M₂(0, -c, c) ~ [V₃ - V₄]; M₃(-c, 0, c) ~ [V₂ - V₃]; M₄(c, 0, c) ~ [V₁ - V₄];

M₅(c, c, 0) ~ [V₁ - V₇]; M₆(-c, c, 0) ~ [V₂ - V₈]; M₇(0,-c,-c) ~ [V₅ - V₆]; M₈(0, c,-c) ~ [V₇ - V₈];

M₉(c, 0,-c) ~ [V₆ - V₇]; M₁₀(-c, 0,-c) ~ [V₅ - V₈]; M₁₁(-c,-c, 0) ~ [V₃ - V₅]; M₁₂(c,-c, 0) ~ [V₄ - V₆];

GRUPUL 3/4; Centrele fețelor cubului:

F₁(c, 0, 0) ~ [V₁ - V₄ - V₆ - V₇]; F₂(0, c, 0) ~ [V₁ - V₂ - V₈ - V₇]; F₃(0, 0, c) ~ [V₁ - V₂ - V₃ - V₄];

F₄(-c, 0, 0) ~ [V₅ - V₈ - V₂ - V₃]; F₅(0,-c,0) ~ [V₅ - V₆ - V₄ - V₃]; F₆(0, 0,-c) ~ [V₅ - V₆ - V₇ - V₈];

GRUPUL 3/4; Direcțiile axelor de ordinul 4 (AXE4):

AXE41={ c, 0, 0} ~ 4₁ ~ F₁; AXE42={ 0, c, 0} ~ 4₂ ~ F₂; AXE43={ 0, 0, c} ~ 4₃ ~ F₃;

GRUPUL 3/4; Direcțiile axelor de ordinul 3 (AXE3):

AXE31={ c, c, c} ~ 3₁ ~ V₁; AXE32={-c, c, c} ~ 3₂ ~ V₂;

AXE33={-c,-c, c} ~ 3₃ ~ V₃; AXE34={ c,-c, c} ~ 3₄ ~ V₄;

GRUPUL 3/4; Direcțiile axelor de ordinul 2 (AXE2):

AXE21={ 0, c, c} ~ 2₁ ~ M₁; AXE22={ 0, c, c} ~ 2₂ ~ M₂; AXE23={-c, 0, c} ~ 2₃ ~ M₃;

AXE24={ c, 0, c} ~ 2₄ ~ M₄; AXE25={ c, c, 0} ~ 2₅ ~ M₅; AXE26={-c, c, 0} ~ 2₆ ~ M₆;

GRUPUL 3/5; ELEMENTELE GRUPULUI

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60				
E	2 ₁	2 ₂	2 ₃	2 ₄	2 ₅	2 ₆	2 ₇	2 ₈	2 ₉	2 ₁₀	2 ₁₁	2 ₁₂	2 ₁₃	2 ₁₄	2 ₁₅
3 ₁	3 ₁ ²	3 ₂	3 ₂ ²	3 ₃	3 ₃ ²	3 ₄	3 ₄ ²	3 ₅	3 ₅ ²	3 ₆	3 ₆ ²	3 ₇	3 ₇ ²	3 ₈	3 ₈ ²
3 ₉	3 ₉ ²	3 ₁₀	3 ₁₀ ²	5 ₁	5 ₁ ²	5 ₁ ³	5 ₁ ⁴	5 ₂	5 ₂ ²	5 ₂ ³	5 ₂ ⁴	5 ₃	5 ₃ ²	5 ₃ ³	5 ₃ ⁴
5 ₄	5 ₄ ²	5 ₄ ³	5 ₄ ⁴	5 ₅	5 ₅ ²	5 ₅ ³	5 ₅ ⁴	5 ₆	5 ₆ ²	5 ₆ ³	5 ₆ ⁴				

GRUPUL 3/5; PUNCTE ȘI DIRECȚII CARACTERISTICE (Fig.3)

c – semilatura cubului circumscris; a – semilatura icosaedrului.

Exprimarea semilaturii icosaedrului prin semilatura cubului circumscris

Poliedrul înscris în cub, ilustrat pe Figura 3, este caracterizat de condițiile $|V_1V_6|=|V_2V_{11}|=|V_9V_{10}|=2a$. Însă, numai egalitatea lungimilor a trei segmente $[V_1V_6]$, $[V_2V_{11}]$ și $[V_9V_{10}]$ nu este suficientă pentru ca poliedrul înscris să fie regulat, adică să aibă toate fețele – niște triunghiuri echilaterale egale. Dacă însă, pe lângă condiția $|V_1V_6|=|V_2V_{11}|$ [1], vom mai adăuga cerința $|V_1V_6|=|V_1V_2|$, atunci orice două muchii ale poliedrului cercetat vor deveni egale ($|V_6V_2|=|V_6V_1|$, deci $|V_2V_6|=|V_2V_1|$; $\Delta V_1V_6V_2=\Delta V_2V_{11}V_3$ – după trei laturi ș.a.m.d.), iar poliedrul va deveni **regulat**. Așadar, încercarea de a răspunde la întrebarea: pentru care valoare a lui a poliedrul înscris astfel în cub va fi regulat, ne conduce la cercetarea condiției $|V_1V_6|=|V_1V_2|$ (avem în vedere că egalitatea $|V_1V_6|=|V_2V_{11}|$ se îndeplinește automat). Folosind coordonatele vârfurilor respective, obținem: $c^2+a^2+(c-a)^2=4a^2$; $\rightarrow 2c^2+2a^2-2ac-4a^2=0$; $\rightarrow a^2+ac-c^2=0$. La rezolvarea ultimei ecuații pătrate față de a , obținem soluțiile $a_1=(-c+c\sqrt{5})/2$ și $a_2=(-c-c\sqrt{5})/2$. Soluția evident negativă a_2 nu se potrivește pentru distanță, așa că pentru semilatura icosaedrului înscris în cub rămâne unica soluție: $a=c(\sqrt{5}-1)/2$. Prin transformări algebrice obișnuite se obțin și alte expresii pentru a : $a=c(\sqrt{5}-1)/2=c\cdot\sqrt{[2/(3+\sqrt{5})]}=c\cdot\sqrt{[(3-\sqrt{5})/2]}=2c/(\sqrt{5}+1)$; $a^2+a-1=0$.

GRUPUL 3/5; Vârfurile icosaedrului, exprimate prin a și c:

$V_1(0, -a, c)$; $V_2(c, 0, a)$; $V_3(a, c, 0)$; $V_4(-a, c, 0)$; $V_5(-c, 0, a)$; $V_6(0, a, c)$;
 $V_7(0, a, -c)$; $V_8(-c, 0, -a)$; $V_9(-a, -c, 0)$; $V_{10}(a, -c, 0)$; $V_{11}(c, 0, -a)$; $V_{12}(0, -a, -c)$;

GRUPUL 3/5; Mijlocurile muchiilor icosaedrului, exprimate prin a și c:

$M_1(0, 0, c) \sim [V_1 - V_6]$;	$M_2(c/2, a/2, c/2+a/2) \sim [V_2 - V_6]$;
$M_3(a/2, c/2+a/2, c/2) \sim [V_3 - V_6]$;	$M_4(-a/2, c/2+a/2, c/2) \sim [V_4 - V_6]$;
$M_5(-c/2, a/2, c/2+a/2) \sim [V_5 - V_6]$;	$M_6(c/2, -a/2, c/2+a/2) \sim [V_1 - V_2]$;
$M_7(c/2+a/2, c/2, a/2) \sim [V_2 - V_3]$;	$M_8(0, c, 0) \sim [V_3 - V_4]$;
$M_9(-a/2-c/2, c/2, a/2) \sim [V_4 - V_5]$;	$M_{10}(-c/2, -a/2, c/2+a/2) \sim [V_5 - V_1]$;
$M_{11}(-a/2, -a/2-c/2, c/2) \sim [V_1 - V_9]$;	$M_{12}(c/2+a/2, -c/2, a/2) \sim [V_2 - V_{10}]$;
$M_{13}(c/2+a/2, c/2, -a/2) \sim [V_3 - V_{11}]$;	$M_{14}(-a/2, c/2+a/2, -a/2) \sim [V_4 - V_7]$;
$M_{15}(-c, 0, 0) \sim [V_5 - V_8]$;	$M_{16}(0, 0, -c) \sim [V_7 - V_{12}]$;
$M_{17}(-c/2, -a/2, -c/2-a/2) \sim [V_8 - V_{12}]$;	$M_{18}(-a/2, -c/2-a/2, -c/2) \sim [V_9 - V_{12}]$;
$M_{19}(a/2, -c/2-a/2, -c/2) \sim [V_{10} - V_{12}]$;	$M_{20}(c/2, -a/2, -c/2-a/2) \sim [V_{11} - V_{12}]$;
$M_{21}(-c/2, a/2, -c/2-a/2) \sim [V_7 - V_8]$;	$M_{22}(-c/2-a/2, -c/2, -a/2) \sim [V_8 - V_9]$;
$M_{23}(0, -c, 0) \sim [V_9 - V_{10}]$;	$M_{24}(a/2+c/2, -c/2, -a/2) \sim [V_{10} - V_{11}]$;
$M_{25}(c/2, a/2, -c/2-a/2) \sim [V_{11} - V_7]$;	$M_{26}(a/2, a/2+c/2, -c/2) \sim [V_7 - V_3]$;
$M_{27}(-c/2-a/2, c/2, -a/2) \sim [V_8 - V_4]$;	$M_{28}(-c/2-a/2, -c/2, a/2) \sim [V_9 - V_5]$;
$M_{29}(a/2, -c/2-a/2, a/2) \sim [V_{10} - V_1]$;	$M_{30}(c, 0, 0) \sim [V_{11} - V_2]$;

GRUPUL 3/5; Centrele fețelor icosaedrului, exprimate prin a și c:

$F_1(c/3, 0, (2c+a)/3) \sim [V_1 - V_2 - V_6]$;	$F_2((c+a)/3, (c+a)/3, (c+a)/3) \sim [V_2 - V_3 - V_6]$;
$F_3(0, (2c+a)/3, c/3) \sim [V_3 - V_4 - V_6]$;	$F_4((-c-a)/3, (c+a)/3, (c+a)/3) \sim [V_4 - V_5 - V_6]$;
$F_5(-c/3, 0, (2c+a)/3) \sim [V_5 - V_1 - V_6]$;	$F_6((c+a)/3, (-c-a)/3, (c+a)/3) \sim [V_1 - V_2 - V_{10}]$;
$F_7((2c+a)/3, c/3, 0) \sim [V_2 - V_3 - V_{11}]$;	$F_8(0, (2c+a)/3, -c/3) \sim [V_3 - V_4 - V_7]$;
$F_9((-2c-a)/3, c/3, 0) \sim [V_4 - V_5 - V_8]$;	$F_{10}((-c-a)/3, (-c-a)/3, (c+a)/3) \sim [V_5 - V_1 - V_9]$;
$F_{11}(-c/3, 0, (-2c-a)/3) \sim [V_7 - V_8 - V_{12}]$;	$F_{12}((-c-a)/3, (-c-a)/3, (-c-a)/3) \sim [V_8 - V_9 - V_{12}]$;
$F_{13}(0, (-2c-a)/3, -c/3) \sim [V_9 - V_{10} - V_{12}]$;	$F_{14}((c+a)/3, (-c-a)/3, (-c-a)/3) \sim [V_{10} - V_{11} - V_{12}]$;
$F_{15}(c/3, 0, (-2c-a)/3) \sim [V_{11} - V_7 - V_{12}]$;	$F_{16}((-c-a)/3, (c+a)/3, (-c-a)/3) \sim [V_7 - V_8 - V_4]$;
$F_{17}((-2c-a)/3, -c/3, 0) \sim [V_8 - V_9 - V_5]$;	$F_{18}(0, (-2c-a)/3, c/3) \sim [V_9 - V_{10} - V_1]$;
$F_{19}((2c+a)/3, -c/3, 0) \sim [V_{10} - V_{11} - V_2]$;	$F_{20}((c+a)/3, (c+a)/3, (-c-a)/3) \sim [V_{11} - V_7 - V_3]$;

GRUPUL 3/5; Direcțiile axelor de rotație de ordinul 5 (AXE5):

AXE51={ $0, -a, c$ } $\sim 5_1 \sim V_1$; AXE52={ $c, 0, a$ } $\sim 5_2 \sim V_2$; AXE53={ $a, c, 0$ } $\sim 5_3 \sim V_3$;
 AXE54={ $-a, c, 0$ } $\sim 5_4 \sim V_4$; AXE55={ $-c, 0, a$ } $\sim 5_5 \sim V_5$; AXE56={ $0, a, c$ } $\sim 5_6 \sim V_6$;

GRUPUL 3/5; Direcțiile axelor de rotație de ordinul 3 (AXE3):

AXE31 = { $c/3, 0, (2c+a)/3$ } $\sim 3_1 \sim F_1$; AXE32 = { $(c+a)/3, (c+a)/3, (c+a)/3$ } $\sim 3_2 \sim F_2$;
 AXE33 = { $0, (2c+a)/3, c/3$ } $\sim 3_3 \sim F_3$; AXE34 = { $(-c-a)/3, (c+a)/3, (c+a)/3$ } $\sim 3_4 \sim F_4$;

$$\begin{aligned} \text{AXE35} &= \{ -c/3, 0, (2c+a)/3 \} \sim 3_5 \sim F_5; \text{AXE36} = \{ (c+a)/3, (-c-a)/3, (c+a)/3 \} \sim 3_6 \sim F_6; \\ \text{AXE37} &= \{ (2c+a)/3, c/3, 0 \} \sim 3_7 \sim F_7; \text{AXE38} = \{ 0, (2c+a)/3, -c/3 \} \sim 3_8 \sim F_8; \\ \text{AXE39} &= \{ (-2c-a)/3, c/3, 0 \} \sim 3_9 \sim F_9; \text{AXE310} = \{ (-c-a)/3, (-c-a)/3, (c+a)/3 \} \sim 3_{10} \sim F_{10}. \end{aligned}$$

GRUPUL 3/5; Direcțiile axelor de rotație de ordinul 2 (AXE2):

$$\begin{aligned} \text{AXE21} &= \{ 0, 0, c \} \sim 2_1 \sim M_1; & \text{AXE22} &= \{ c/2, a/2, c/2+a/2 \} \sim 2_2 \sim M_2; \\ \text{AXE23} &= \{ a/2, c/2+a/2, c/2 \} \sim 2_3 \sim M_3; & \text{AXE24} &= \{ -a/2, c/2+a/2, c/2 \} \sim 2_4 \sim M_4; \\ \text{AXE25} &= \{ -c/2, a/2, c/2+a/2 \} \sim 2_5 \sim M_5; & \text{AXE26} &= \{ c/2, -a/2, c/2+a/2 \} \sim 2_6 \sim M_6; \\ \text{AXE27} &= \{ c/2+a/2, c/2, a/2 \} \sim 2_7 \sim M_7; & \text{AXE28} &= \{ 0, c, 0 \} \sim 2_8 \sim M_8; \\ \text{AXE29} &= \{ -a/2-c/2, c/2, a/2 \} \sim 2_9 \sim M_9; & \text{AXE210} &= \{ -c/2, -a/2, c/2+a/2 \} \sim 2_{10} \sim M_{10}; \\ \text{AXE211} &= \{ -a/2, -a/2-c/2, c/2 \} \sim 2_{11} \sim M_{11}; & \text{AXE212} &= \{ c/2+a/2, -c/2, a/2 \} \sim 2_{12} \sim M_{12}; \\ \text{AXE213} &= \{ c/2+a/2, c/2, -a/2 \} \sim 2_{13} \sim M_{13}; & \text{AXE214} &= \{ -a/2, c/2+a/2, -a/2 \} \sim 2_{14} \sim M_{14}; \\ \text{AXE215} &= \{ -c, 0, 0 \} \sim 2_{15} \sim M_{15}. \end{aligned}$$

GRUPUL 3/2; U22 / COS(U22); Tab.1			
	2 ₁	2 ₂	2 ₃
2 ₁	00.0° / 1.00	90.0° / 0.00	90.0° / 0.00
2 ₂	90.0° / 0.00	00.0° / 1.00	90.0° / 0.00
2 ₃	90.0° / 0.00	90.0° / 0.00	00.0° / 1.00

GRUPUL 3/2; U33 / COS(U33); Tab.2				
	3 ₁	3 ₂	3 ₃	3 ₄
3 ₁	00.0° / 1.00	70.5° / 0.33	70.5° / 0.33	70.5° / 0.33
3 ₂	70.5° / 0.33	00.0° / 1.00	70.5° / 0.33	70.5° / 0.33
3 ₃	70.5° / 0.33	70.5° / 0.33	00.0° / 1.00	70.5° / 0.33
3 ₄	70.5° / 0.33	70.5° / 0.33	70.5° / 0.33	00.0° / 1.00

GRUPUL 3/2; U32 / COS(U32); Tab.3			
	2 ₁	2 ₂	2 ₃
3 ₁	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58
3 ₂	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58
3 ₃	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58
3 ₄	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58

GRUPUL 3/2; TABEL GENERALIZAT; Tab.32GEN					
Tipul U	Unghiul concret	Cosinusul unghiului dintre axe (valoarea exactă și aproximativă)		Axe sub unghiul U	Subgrup generat
U22	00.0°	COS(U22)=1	≈1.00	2 ₁ × 2 ₁	2
	90.0°	COS(U22)=0	≈0.00	2 ₁ × 2 _{2,3}	2:2
U33	00.0°	COS(U33)=108/108=1	≈1.00	3 ₁ × 3 ₁	3
	70.5°	COS(U33)=36/36·3=1/3	≈0.33	3 ₁ × 3 _{2,3,4}	3/2
U32	54.7°	COS(U32)=√3/3	≈0.58	3 ₁ × 2 _{1,2,3}	3/2

GRUPUL 3/4;		U22 / COS(U22);				Tab.4
	2 ₁	2 ₂	2 ₃	2 ₄	2 ₅	2 ₆
2 ₁	00.0 ⁰ / 1.00	90.0 ⁰ / 0.00	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50
2 ₂	90.0 ⁰ / 0.00	00.0 ⁰ / 1.00	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50
2 ₃	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	00.0 ⁰ / 1.00	90.0 ⁰ / 0.00	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50
2 ₄	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	90.0 ⁰ / 0.00	00.0 ⁰ / 1.00	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50
2 ₅	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	00.0 ⁰ / 1.00	90.0 ⁰ / 0.00
2 ₆	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	60.0 ⁰ / 0.50	90.0 ⁰ / 0.00	00.0 ⁰ / 1.00

GRUPUL 3/4;		U33 / COS(U33);		Tab.5
	3 ₁	3 ₂	3 ₃	3 ₄
3 ₁	00.0 ⁰ / 1.00	70.5 ⁰ / 0.33	70.5 ⁰ / 0.33	70.5 ⁰ / 0.33
3 ₂	70.5 ⁰ / 0.33	00.0 ⁰ / 1.00	70.5 ⁰ / 0.33	70.5 ⁰ / 0.33
3 ₃	70.5 ⁰ / 0.33	70.5 ⁰ / 0.33	00.0 ⁰ / 1.00	70.5 ⁰ / 0.33
3 ₄	70.5 ⁰ / 0.33	70.5 ⁰ / 0.33	70.5 ⁰ / 0.33	00.0 ⁰ / 1.00

GRUPUL 3/4; U44 / COS(U44); Tab.6			
	4 ₁	4 ₂	4 ₃
4 ₁	00.0 ⁰ / 1.00	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00
4 ₂	90.0 ⁰ / 0.00	00.0 ⁰ / 1.00	90.0 ⁰ / 0.00
4 ₃	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00	00.0 ⁰ / 1.00

GRUPUL 3/4;		U32 / COS(U32);				Tab.7
	2 ₁	2 ₂	2 ₃	2 ₄	2 ₅	2 ₆
3 ₁	35.3 ⁰ / 0.82	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00	35.3 ⁰ / 0.82	35.3 ⁰ / 0.82	90.0 ⁰ / 0.00
3 ₂	35.3 ⁰ / 0.82	90.0 ⁰ / 0.00	35.3 ⁰ / 0.82	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00	35.3 ⁰ / 0.82
3 ₃	90.0 ⁰ / 0.00	35.3 ⁰ / 0.82	35.3 ⁰ / 0.82	90.0 ⁰ / 0.00	35.3 ⁰ / 0.82	90.0 ⁰ / 0.00
3 ₄	90.0 ⁰ / 0.00	35.3 ⁰ / 0.82	90.0 ⁰ / 0.00	35.3 ⁰ / 0.82	90.0 ⁰ / 0.00	35.3 ⁰ / 0.82

GRUPUL 3/4; U24 / COS(U24); Tab.8			
	4 ₁	4 ₂	4 ₃
2 ₁	90.0 ⁰ / 0.00	45.0 ⁰ / 0.71	45.0 ⁰ / 0.71
2 ₂	90.0 ⁰ / 0.00	45.0 ⁰ / 0.71	45.0 ⁰ / 0.71
2 ₃	45.0 ⁰ / 0.71	90.0 ⁰ / 0.00	45.0 ⁰ / 0.71
2 ₄	45.0 ⁰ / 0.71	90.0 ⁰ / 0.00	45.0 ⁰ / 0.71
2 ₅	45.0 ⁰ / 0.71	45.0 ⁰ / 0.71	90.0 ⁰ / 0.00
2 ₆	45.0 ⁰ / 0.71	45.0 ⁰ / 0.71	90.0 ⁰ / 0.00

GRUPUL 3/4; U34 / COS(U34); Tab.9			
	4 ₁	4 ₂	4 ₃
3 ₁	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58
3 ₂	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58
3 ₃	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58
3 ₄	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58	54.7° / 0.58

GRUPUL 3/4; TABEL GENERALIZAT; Tab.34GEN					
Tipul U	Unghiul concret	Cosinusul unghiului dintre axe (valoarea exactă și aproximativă)		Axe sub unghiul U	Subgrup generat
U22	00.0°	COS(U22)=72/72=1	≈1.00	2 ₁ × 2 ₁	2
	60.0°	COS(U22)=36/72=1/2	≈0.50	2 ₁ × 2 _{3,4,5,6}	3:2
	90.0°	COS(U22)=0/72=0	≈0.00	2 ₁ × 2 ₂	2:2
U33	00.0°	COS(U33)=108/108=1	≈1.00	3 ₁ × 3 ₁	3
	70.5°	COS(U33)=36/36·3=1/3	≈0.33	3 ₁ × 3 _{2,3,4}	3/2
U44	00.0°	COS(U44)=36/36=1	≈1.00	4 ₁ × 4 ₁	4
	90.0°	COS(U44)=0/36=0	≈0.00	4 ₁ × 4 _{2,3}	4:4=3/4
U32	35.3°	COS(U32)=√2/√3	≈0.82	3 ₁ × 2 _{1,4,5}	3/4
	90.0°	COS(U32)=0/(36·√6)	≈0.00	3 ₁ × 2 _{2,3,6}	3:2
U24	45.0°	COS(U24)=√2/2	≈0.71	2 ₁ × 4 _{2,3}	3/4
	90.0°	COS(U24)=0/(36·√2)	≈0.00	2 ₁ × 4 ₁	4:2
U34	54.7°	COS(U34)=√3/3	≈0.58	3 ₁ × 4 _{1,2,3}	3/4

GRUPUL 3/5; U22 / COS(U22); Tab.10															
	2 ₁	2 ₂	2 ₃	2 ₄	2 ₅	2 ₆	2 ₇	2 ₈	2 ₉	2 ₁₀	2 ₁₁	2 ₁₂	2 ₁₃	2 ₁₄	2 ₁₅
2 ₁	00.0° /1.00	36.0° /0.81	60.0° /0.50	60.0° /0.50	36.0° /0.81	36.0° /0.81	72.0° /0.31	90.0° /0.00	72.0° /0.31	36.0° /0.81	60.0° /0.50	72.0° /0.31	72.0° /0.31	60.0° /0.50	90.0° /0.00
2 ₂	36.0° /0.81	00.0° /1.00	36.0° /0.81	60.0° /0.50	60.0° /0.50	36.0° /0.81	36.0° /0.81	72.0° /0.31	90.0° /0.00	72.0° /0.31	90.0° /0.00	60.0° /0.50	72.0° /0.31	72.0° /0.31	60.0° /0.50
2 ₃	60.0° /0.50	36.0° /0.81	00.0° /1.00	36.0° /0.81	60.0° /0.50	72.0° /0.31	36.0° /0.81	36.0° /0.81	72.0° /0.31	90.0° /0.00	60.0° /0.50	90.0° /0.00	60.0° /0.50	72.0° /0.31	72.0° /0.31
2 ₄	60.0° /0.50	60.0° /0.50	36.0° /0.81	00.0° /1.00	36.0° /0.81	90.0° /0.00	72.0° /0.31	36.0° /0.81	36.0° /0.81	72.0° /0.31	72.0° /0.31	60.0° /0.50	90.0° /0.00	60.0° /0.50	72.0° /0.31
2 ₅	36.0° /0.81	60.0° /0.50	60.0° /0.50	36.0° /0.81	00.0° /1.00	72.0° /0.31	90.0° /0.00	72.0° /0.31	36.0° /0.81	36.0° /0.81	72.0° /0.31	72.0° /0.31	60.0° /0.50	90.0° /0.00	60.0° /0.50
2 ₆	36.0° /0.81	36.0° /0.81	72.0° /0.31	90.0° /0.00	72.0° /0.31	00.0° /1.00	60.0° /0.50	72.0° /0.31	72.0° /0.31	60.0° /0.50	60.0° /0.50	36.0° /0.81	90.0° /0.00	36.0° /0.81	60.0° /0.50
2 ₇	72.0° /0.31	36.0° /0.81	36.0° /0.81	72.0° /0.31	90.0° /0.00	60.0° /0.50	00.0° /1.00	60.0° /0.50	72.0° /0.31	72.0° /0.31	60.0° /0.50	60.0° /0.50	36.0° /0.81	90.0° /0.00	36.0° /0.81
2 ₈	90.0° /0.00	72.0° /0.31	36.0° /0.81	36.0° /0.81	72.0° /0.31	72.0° /0.31	60.0° /0.50	00.0° /1.00	60.0° /0.50	72.0° /0.31	36.0° /0.81	60.0° /0.50	60.0° /0.50	36.0° /0.81	90.0° /0.00

2 ₉	72.0 ⁰ /0.31	90.0 ⁰ /0.00	72.0 ⁰ /0.31	36.0 ⁰ /0.81	36.0 ⁰ /0.81	72.0 ⁰ /0.31	72.0 ⁰ /0.31	60.0 ⁰ /0.50	00.0 ⁰ /1.00	60.0 ⁰ /0.50	90.0 ⁰ /0.00	36.0 ⁰ /0.81	60.0 ⁰ /0.50	60.0 ⁰ /0.50	36.0 ⁰ /0.81
2 ₁₀	36.0 ⁰ /0.81	72.0 ⁰ /0.31	90.0 ⁰ /0.00	72.0 ⁰ /0.31	36.0 ⁰ /0.81	60.0 ⁰ /0.50	72.0 ⁰ /0.31	72.0 ⁰ /0.31	60.0 ⁰ /0.50	00.0 ⁰ /1.00	36.0 ⁰ /0.81	90.0 ⁰ /0.00	36.0 ⁰ /0.81	60.0 ⁰ /0.50	60.0 ⁰ /0.50
2 ₁₁	60.0 ⁰ /0.50	90.0 ⁰ /0.00	60.0 ⁰ /0.50	72.0 ⁰ /0.31	72.0 ⁰ /0.31	60.0 ⁰ /0.50	60.0 ⁰ /0.50	36.0 ⁰ /0.81	90.0 ⁰ /0.00	36.0 ⁰ /0.81	00.0 ⁰ /1.00	72.0 ⁰ /0.31	36.0 ⁰ /0.81	36.0 ⁰ /0.81	72.0 ⁰ /0.31
2 ₁₂	72.0 ⁰ /0.31	60.0 ⁰ /0.50	90.0 ⁰ /0.00	60.0 ⁰ /0.50	72.0 ⁰ /0.31	36.0 ⁰ /0.81	60.0 ⁰ /0.50	60.0 ⁰ /0.50	36.0 ⁰ /0.81	90.0 ⁰ /0.00	72.0 ⁰ /0.31	00.0 ⁰ /1.00	72.0 ⁰ /0.31	36.0 ⁰ /0.81	36.0 ⁰ /0.81
2 ₁₃	72.0 ⁰ /0.31	72.0 ⁰ /0.31	60.0 ⁰ /0.50	90.0 ⁰ /0.00	60.0 ⁰ /0.50	90.0 ⁰ /0.00	36.0 ⁰ /0.81	60.0 ⁰ /0.50	60.0 ⁰ /0.50	36.0 ⁰ /0.81	36.0 ⁰ /0.81	72.0 ⁰ /0.31	00.0 ⁰ /1.00	72.0 ⁰ /0.31	36.0 ⁰ /0.81
2 ₁₄	60.0 ⁰ /0.50	72.0 ⁰ /0.31	72.0 ⁰ /0.31	60.0 ⁰ /0.50	90.0 ⁰ /0.00	36.0 ⁰ /0.81	90.0 ⁰ /0.00	36.0 ⁰ /0.81	60.0 ⁰ /0.50	60.0 ⁰ /0.50	36.0 ⁰ /0.81	36.0 ⁰ /0.81	72.0 ⁰ /0.31	00.0 ⁰ /1.00	72.0 ⁰ /0.31
2 ₁₅	90.0 ⁰ /0.00	60.0 ⁰ /0.50	72.0 ⁰ /0.31	72.0 ⁰ /0.31	60.0 ⁰ /0.50	60.0 ⁰ /0.50	36.0 ⁰ /0.81	90.0 ⁰ /0.00	36.0 ⁰ /0.81	60.0 ⁰ /0.50	72.0 ⁰ /0.31	36.0 ⁰ /0.81	36.0 ⁰ /0.81	72.0 ⁰ /0.31	00.0 ⁰ /1.00

GRUPUL 3/5;		U33 / COS(U33);									Tab.11
	3 ₁	3 ₂	3 ₃	3 ₄	3 ₅	3 ₆	3 ₇	3 ₈	3 ₉	3 ₁₀	
3 ₁	00.0 ⁰ /1.00	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	
3 ₂	41.8 ⁰ /0.75	00.0 ⁰ /1.00	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	
3 ₃	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	00.0 ⁰ /1.00	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	
3 ₄	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	00.0 ⁰ /1.00	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	
3 ₅	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	00.0 ⁰ /1.00	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	
3 ₆	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	00.0 ⁰ /1.00	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	
3 ₇	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	00.0 ⁰ /1.00	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	41.8 ⁰ /0.75	
3 ₈	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	00.0 ⁰ /1.00	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	
3 ₉	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	41.8 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	00.0 ⁰ /1.00	70.5 ⁰ /0.33	
3 ₁₀	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	41.8 ⁰ /0.75	41.8 ⁰ /0.75	70.5 ⁰ /0.33	00.0 ⁰ /1.00	

GRUPUL 3/5;		U55 / COS(U55);					Tab.12
	5 ₁	5 ₂	5 ₃	5 ₄	5 ₅	5 ₆	
5 ₁	00.0 ⁰ / 1.00	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	
5 ₂	63.4 ⁰ / 0.45	00.0 ⁰ / 1.00	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	
5 ₃	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	00.0 ⁰ / 1.00	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	
5 ₄	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	00.0 ⁰ / 1.00	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	
5 ₅	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	00.0 ⁰ / 1.00	63.4 ⁰ / 0.45	
5 ₆	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	63.4 ⁰ / 0.45	00.0 ⁰ / 1.00	

GRUPUL 3/5;					U32 / COS(U32);					Tab.13					
	2 ₁	2 ₂	2 ₃	2 ₄	2 ₅	2 ₆	2 ₇	2 ₈	2 ₉	2 ₁₀	2 ₁₁	2 ₁₂	2 ₁₃	2 ₁₄	2 ₁₅
3 ₁	20.9 ⁰ /0.93	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36
3 ₂	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	90.0 ⁰ /0.00	69.1 ⁰ /0.36	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58
3 ₃	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00
3 ₄	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	20.9 ⁰ /0.93	90.0 ⁰ /0.00	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58
3 ₅	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	69.1 ⁰ /0.36
3 ₆	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	69.1 ⁰ /0.36	90.0 ⁰ /0.00	20.9 ⁰ /0.93	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	90.0 ⁰ /0.00	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58
3 ₇	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	69.1 ⁰ /0.36	69.1 ⁰ /0.36	20.9 ⁰ /0.93	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	90.0 ⁰ /0.00	20.9 ⁰ /0.93
3 ₈	69.1 ⁰ /0.36	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	20.9 ⁰ /0.93	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93	90.0 ⁰ /0.00
3 ₉	90.0 ⁰ /0.00	69.1 ⁰ /0.36	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	20.9 ⁰ /0.93	69.1 ⁰ /0.36	90.0 ⁰ /0.00	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	20.9 ⁰ /0.93
3 ₁₀	54.7 ⁰ /0.58	90.0 ⁰ /0.00	69.1 ⁰ /0.36	90.0 ⁰ /0.00	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58	69.1 ⁰ /0.36	20.9 ⁰ /0.93	20.9 ⁰ /0.93	90.0 ⁰ /0.00	20.9 ⁰ /0.93	54.7 ⁰ /0.58	54.7 ⁰ /0.58

GRUPUL 3/5;		U25 / COS(U25);				Tab.14
	5 ₁	5 ₂	5 ₃	5 ₄	5 ₅	5 ₆
2 ₁	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85
2 ₂	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85
2 ₃	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85
2 ₄	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85
2 ₅	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85	31.7 ⁰ / 0.85
2 ₆	31.7 ⁰ / 0.85	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53
2 ₇	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53	58.3 ⁰ / 0.53
2 ₈	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53
2 ₉	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53
2 ₁₀	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53
2 ₁₁	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00
2 ₁₂	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53	90.0 ⁰ / 0.00
2 ₁₃	58.3 ⁰ / 0.53	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00
2 ₁₄	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00	90.0 ⁰ / 0.00
2 ₁₅	90.0 ⁰ / 0.00	31.7 ⁰ / 0.85	58.3 ⁰ / 0.53	58.3 ⁰ / 0.53	31.7 ⁰ / 0.85	90.0 ⁰ / 0.00

GRUPUL 3/5;		U35 / COS(U35);				Tab.15	
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
3_1	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	
3_2	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	
3_3	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	
3_4	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	
3_5	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	
3_6	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	
3_7	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	
3_8	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$79.2^0 / 0.19$	
3_9	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	
3_{10}	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	$37.4^0 / 0.79$	$79.2^0 / 0.19$	

GRUPUL 3/5;		TABEL GENERALIZAT;		Tab.35GEN	
Tipul U	Unghiul concret	Cosinusul unghiului dintre axe (valoarea exactă și aproximativă)	Axe sub unghiul U	Subgrup generat	
U22	00.0^0	$\text{COS}(U22)=1 \approx 1.00$	$2_1 \times 2_1$	2	
	36.0^0	$\text{COS}(U22)=(\sqrt{5}+1)/4 \approx 0.81$	$2_1 \times 2_{2,5,6,10}$	5:2	
	60.0^0	$\text{COS}(U22)=36/72 \approx 0.50$	$2_1 \times 2_{3,4,11,14}$	3:2	
	72.0^0	$\text{COS}(U22)=(\sqrt{5}-1)/4 \approx 0.31$	$2_1 \times 2_{7,9,12,13}$	5:2	
	90.0^0	$\text{COS}(U22)=0 \approx 0.00$	$2_1 \times 2_{8,15}$	2:2	
U33	00.0^0	$\text{COS}(U33)=108/108 \approx 1.00$	$3_1 \times 3_1$	3	
	41.8^0	$\text{COS}(U33)=\sqrt{5}/3 \approx 0.75$	$3_1 \times 3_{2,5,6}$	3/5	
	70.5^0	$\text{COS}(U33)=36/36 \cdot 3=1/3 \approx 0.33$	$3_1 \times 3_{3,4,7,8,9,10}$	3/2	
U55	00.0^0	$\text{COS}(U55)=1 \approx 1.00$	$5_1 \times 5_1$	5	
	63.4^0	$\text{COS}(U55)=\sqrt{5}/5 \approx 0.45$	$5_1 \times 5_{2,3,4,5,6}$	3/5	
U32	20.9^0	$\text{COS}(U32)=(\sqrt{5}+1)/(2 \cdot \sqrt{3}) \approx 0.93$	$3_1 \times 2_{1,2,6}$	3/5	
	54.7^0	$\text{COS}(U32)=\sqrt{3}/3 \approx 0.58$	$3_1 \times 2_{3,5,7,10,12,14}$	3/2	
	69.1^0	$\text{COS}(U32)=(\sqrt{5}-1)/(2 \cdot \sqrt{3}) \approx 0.36$	$3_1 \times 2_{4,11,15}$	3/5	
	90.0^0	$\text{COS}(U32)=0 \approx 0.00$	$3_1 \times 2_{8,9,13}$	3:2	
U25	31.7^0	$\text{COS}(U25)=\sqrt{[5+\sqrt{5}]/10} \approx 0.85$	$2_1 \times 5_{1,6}$	3/5	
	58.3^0	$\text{COS}(U25)=\sqrt{[5-\sqrt{5}]/10} \approx 0.53$	$2_1 \times 5_{2,5}$	3/5	
	90.0^0	$\text{COS}(U25)=0 \approx 0.00$	$2_1 \times 5_{3,4}$	5:2	
U35	37.4^0	$\text{COS}(U35)=(\sqrt{5}+3)/\sqrt{[6 \cdot (\sqrt{5}+5)]} \approx 0.79$	$3_1 \times 5_{1,2,6}$	3/5	
	79.2^0	$\text{COS}(U35)=(\sqrt{5}-1)/\sqrt{[6 \cdot (\sqrt{5}+5)]} \approx 0.19$	$3_1 \times 5_{3,4,5}$	3/5	

Referințe:

1. Заболотный П.А., Перетятков С.М. База данных и решение при помощи компьютера задач геометрической кристаллографии. - Кишинев: ОП МолдГУ, 1991.
2. Заболотный П.А. Геометрическое обоснование алгебраической структуры точечных групп симметрии с одной главной поворотной осью // Analele Științifice ale USM. Seria „Științe fizico-matematice”. - Chișinău: CE USM, 2004.
3. Заболотный П.А. Геометрическое обоснование алгебраической структуры точечных групп симметрии серии $m \cdot k : m$. // Analele Științifice ale USM. Seria „Științe fizico-matematice”. - Chișinău: CEP USM, 2006.

Bibliografie:

1. Zamorzaev A.M., Palistrant A.F., Lungu A.P. Teoria grupurilor discrete de simetrie. Partea 1. - Chișinău: CE USM, 1991.
2. Заболотный П.А., Перетятков С.М. Вывод нетривиальных подгрупп и минимальных систем образующих точечных кристаллографических групп при помощи компьютера // Buletinul AȘM. Matematica. - Nr.4 (10). - Chișinău: Știința, 1992, p.25-31.

Prezentat la 14.09.2009