GRUPURI FINITE DE SIMETRIE, GENERATE DE ROTAȚIILE ÎN JURUL A DOUĂ AXE DE ORDIN SUPERIOR, AŞEZATE SUB UNGHI ASCUȚIT

Pavel ZABOLOTNÎI

Catedra Algebră şi Geometrie

This work contains the analysis, comparison and classification of the results gathered wile studying groups defined by elementary rotations around two symmetry axes which form an acute angle. After determination of the finitude of the number of such groups it becomes clear that there exist a relatively small number of acute angles, which are formed by intersection of rotation axes in such groups. All these angles are described in details, and then we examine the problem of defining every such group series with combinations of different axis pairs which intersects at different acute angles.

1. Elemente din geometria unghiului triedru

Orice trei semidrepte necoplanare **a, b, c** cu originea comună **S** formează unghiul triedru **Sabc**, cu laturile **a, b, c** (Fig.1). Unghiurile **α** = <(**b,c**), **β** = <(a,**c**), **γ** = <(a,**b**) se numesc ***unghiuri plane ale unghiului triedru.*** Unghiurile diedre **A, B, C** de la muchiile respective se numesc ***unghiuri diedre ale unghiului triedru.***

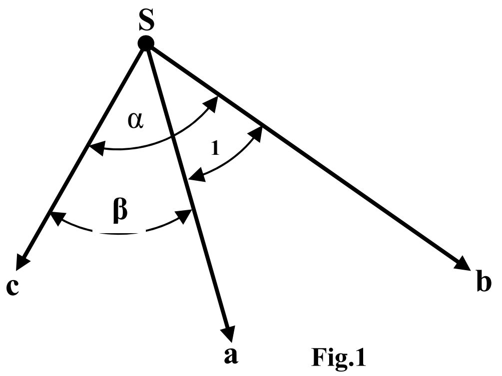

Fig.1

Unghiurile plane **α, β, γ,** şi cele diedre **A, B, C** sunt legate între ele printr-un şir de relații**:**

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos C; \quad (1)$$

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos\gamma; \quad (2)$$

$$\sin\alpha/\sin A = \sin\beta/\sin B = \sin\gamma/\sin C. \quad (3)$$

Egalitățile **(1)** şi **(2)** se numesc respectiv ***prima*** şi ***cea de a doua*** teoremă a cosinusurilor pentru unghiul triedru [1]. Egalitatea **(3)** se numeşte ***teorema sinusurilor*** pentru unghiul triedru. Evident, fiecare din teoremele **(1)** şi **(2)** pot fi scrise încă în două modificații fiecare, ținându-se cont de faptul că în triedrul **Sabc** ungiurile plane **α, β, γ** sunt opuse respectiv unghiurilor diedre **A, B, C**.

Alte proprietăți ale unghiului triedru sunt legate cu noțiunea de ***triedru reciproc.*** Pentru triedrul **Sabc** construim (Fig.2) din acelaşi vârf **S** un nou unghi triedru **Sa´b´c´** după regulile:

semidreapta **a´** porneşte din vârful **S,** este perpendiculară la planul **Sbc** şi se află cu semidreapta **a** de părți diferite față de acest plan;

semidreapta **b´** porneşte din vârful **S,** este perpendiculară la planul **Sac** şi se află cu semidreapta **b** de părți diferite față de acest plan;

semidreapta **c´** porneşte din vârful **S,** este perpendiculară la planul **Sab** şi se află cu semidreapta **c** de părți diferite față de acest plan.

Definiție: Triedrul **Sa´b´c´** obținut în modul descris mai sus se numeşte ***reciproc*** pentru triedrul **Sabc.**

În noul unghi triedru **Sa´b´c´** notăm în mod analogic unghiurile plane – prin **α´, β´, γ´,** iar unghiurile diedre respective – prin **A´, B´, C´,** aşa cum e arătat pe Figura 2.

Proprietăţi. Perpendicularitatea semidreptei **a** către planul **Sb´c´** se stabileşte nemijlocit, ca şi perpendicularitatea semidreptei **b** către planul **Sa´c´** şi perpendicularitatea semidreptei **c** către planul **Sa´b´.** Deci, triedrele **Sa´b´c´** şi **Sabc** sunt reciproce fiecare pentru celălalt. În cazul de faţă, unghiul dintre normalele a două plane este complementar până la $\boldsymbol{\pi}$ cu unghiul diedru dintre ele; astfel, se primeşte că $\boldsymbol{\alpha' = \pi - A}$. În mod analogic se obţin şi alte relaţii simetrice cu cea de faţă:

$$\alpha = \pi - A', \beta = \pi - B', \gamma = \pi - C', \alpha' = \pi - A, \beta' = \pi - B, \gamma' = \pi - C; \quad (4)$$

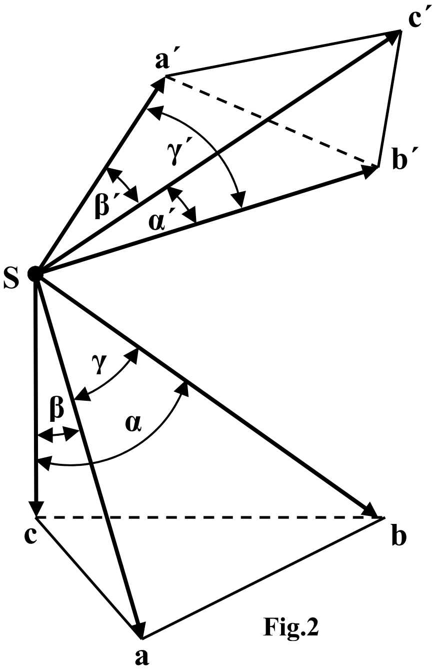

Fig.2

Pe baza acestor relaţii mai departe pot fi stabilite un şir de **mărginiri suplimentare** [2]:

$$\gamma < \alpha+\beta; \ \alpha < \beta+\gamma; \ \beta < \alpha+\gamma; \quad (5)$$

$$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi; \quad (6)$$

$$A + B + C > \pi. \quad (7)$$

Observaţie. De rând cu inegalitatea **(7),** în practică se mai foloseşte uneori inegalitatea $\boldsymbol{A + B + C < 3\pi}$, care poate fi obţinută pe aceeaşi cale, numai pornind de la condiţia: $\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma' > 0}$.

2. Configuraţii posibile de axe de rotaţie aşezate sub unghi ascuţit, care pot fi întâlnite între elementele de simetrie ce corespund grupurilor finite

Fie $\boldsymbol{SA_1, SA_2, SA_3}$ – trei semidrepte cu originea comună **S,** orientate una faţă de alta sub unghiurile $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$, aşa cum e arătat pe Figura 3. Fără a încălca generalitatea cazului cercetat, pentru simplitate, putem socoti că $\boldsymbol{|SA_1|=|SA_2|=|SA_3|=1}$. Atunci, laturile triunghiului din bază $\boldsymbol{\Delta A_1A_2A_3}$ se determină univoc şi tetraedrul $\boldsymbol{SA_1A_2A_3}$ este un poliedru rigid. Din prima teoremă a cosinusurilor **(1),** aplicată la cazul cercetat, rezultă:

$$\cos A_3 = (\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2)/\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2. \quad (8)$$

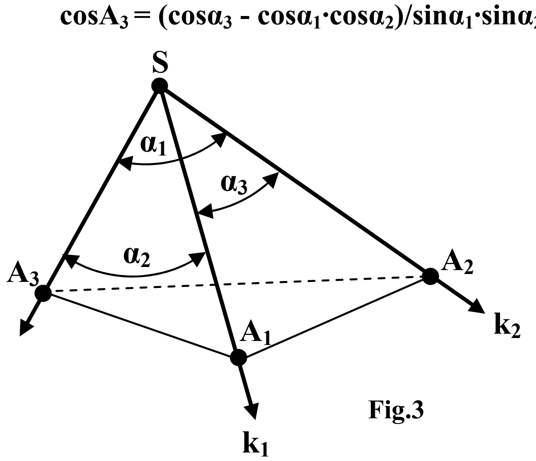

Fig.3

Deci, unghiurile diedre $\mathbf{A_1, A_2, A_3}$ de la muchiile tetraedrului indicat sunt pe deplin determinate de unghiurile plane $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$. Din teoria generală a simetriei [3-6] este cunoscut că rotația spațială în jurul oricărei axe poate fi înlocuită cu două simetrii consecutive în două plane ce se intersectează după axa cercetată. Pentru aceasta, poziția primului plan se alege în mod **arbitrar,** cu unica cerință ca el să treacă prin axa dată, iar poziția celui de-al doilea plan se alege în așa fel, ca el de asemenea să treacă prin axa dată, iar unghiul diedru format de cel de-al doilea plan cu primul plan, măsurat în direcția rotației, să fie egal cu jumătate din unghiul elementar de rotație în jurul axei de simetrie. Așadar, tetraedrul $\mathbf{SA_1A_2A_3}$, ilustrat pe Figura 3, poate fi interpretat ca modelul real al unui cuplu din trei axe spațiale de rotație $\mathbf{SA_1, SA_2, SA_3}$, fiecare având respectiv ordinul $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ și unghiul elementar de rotație $\boldsymbol{\varphi_1 = 2A_1, \varphi_2 = 2A_2, \varphi_3 = 2A_3}$, unde $\mathbf{A_1, A_2, A_3}$ sunt mărimile unghiurilor diedre de la muchiile respective. Pe de altă parte, având în vedere definiția ordinului axei de simetrie [5,6], numerele naturale $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ se vor determina în felul următor:

$\mathbf{k_1 = 2\pi/\varphi_1 = \pi/A_1, k_2 = 2\pi/\varphi_2 = \pi/A_2, k_3 = 2\pi/\varphi_3 = \pi/A_3}$, de unde obținem: $\mathbf{A_1 = \pi/k_1, A_2 = \pi/k_2}$, $\mathbf{A_3 = \pi/k_3}$. Aplicând mărginirea **(7)** la unghiurile diedre $\mathbf{A_1, A_2, A_3}$, obținem condiția:

$$\pi/k_1 + \pi/k_2 + \pi/k_3 > \pi,$$

sau:

$$1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3 > 1. \quad (9)$$

Astfel, ordinele celor trei axe de rotație trebuie să satisfacă această inegalitate. Pentru a trece la rezolvarea inecuației **(9)** în numere naturale, $\mathbf{(k_1, k_2, k_3 = 2, 3, 4,\ldots)}$, vom face mai întâi o serie de observații.

1) Dacă două dintre numerele $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ sunt egale cu **2**, de exemplu $\mathbf{k_1 = 2 = k_2}$, atunci **(9)** este satisfăcută pentru orice valoare posibilă a celui de-al treilea număr. Într-adevăr, nu-i greu de observat că $\mathbf{1/2 + 1/2 + 1/k_3 > 1}$, pentru toți $\mathbf{k_3 = 2, 3, 4,\ldots}$

2) Dacă nici unul dintre numerele $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ nu este egal cu **2,** atunci **(9)** nu este satisfăcută de nici un triplet $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$, ales din diapazonul **[3, 4, 5,...).** Într-adevăr, în acest caz valoarea maximală pentru partea stângă a inegalității **(9)** se obține pentru $\mathbf{k_1 = k_2 = k_3 = 3}$. Dar, în acest caz partea stângă a inegalității **(9)** devine egală cu: **1/3 + 1/3 + 1/3 = 1** și inegalitatea nu este satisfăcută. Așadar, pentru satisfacerea **(9), cel puțin unul dintre numerele** $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ **trebuie să fie egal cu 2.**

3) În cazul în care numai unul singur dintre numerele $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ este egal cu **2,** atunci, pentru satisfacerea **(9),** nici unul dintre cele două numere rămase **nu poate fi mai mare decât 5.** Afirmația rezultă din faptul că **1/2 + 1/6 + 1/3 = 1.**

După aceste observații, pot fi alcătuite combinatoric **unicele** patru triplete de numere naturale – soluții ale inegalității **(9): (2, 2, k); (2, 3, 3); (2, 3, 4); (2, 3, 5),** unde **k = 2, 3, 4, 5, 6, 7,...** Vom cerceta fiecare din aceste triplete aparte.

A doua teoremă a cosinusurilor **(2)** pentru unghiul triedru poate fi transcrisă în felul următor**:** $\mathbf{\cos C+\cos A\cdot\cos B = \sin A\cdot\sin B\cdot\cos\gamma}$. În notațiile unghiului triedru $\mathbf{SA_1A_2A_3}$ de pe Figura 3, ultima egalitate capătă forma:

$$\cos\alpha_3 = (\cos A_3 + \cos A_1\cdot\cos A_2)/\sin A_1\cdot\sin A_2. \quad (10)$$

Prin analogie mai pot fi alcătuite încă două egalități asemănătoare, pe care le vom folosi în caz de necesitate**:** $\mathbf{\cos\alpha_2 = (\cos A_2 + \cos A_1\cdot\cos A_3)/\sin A_1\cdot\sin A_3}$ și $\mathbf{\cos\alpha_1 = (\cos A_1 + +\cos A_2\cdot\cos A_3)/\sin A_2\cdot\sin A_3}$. Astfel, fiecare unghi plan al unghiului triedru se exprimă numai prin unghiurile lui diedre care, la rândul lor, sunt determinate în mod univoc de către ordinele $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ ale axelor de rotație $\mathbf{OA_1, OA_2, OA_3}$. Atragem atenția asupra faptului că mărimile unghiurilor plane $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ **nu depind** de lungimile laturilor laterale și restricția $\mathbf{|SA_1|=|SA_2|=|SA_3|=1}$ introdusă anterior nu poate influența asupra mărimilor unghiurilor plane $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$.

Din cele obținute rezultă că ordinele $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ ale axelor de rotație nu pot fi luate arbitrar. Ele trebuie să satisfacă inegalitatea **(9)**. Cercetarea și rezolvarea inecuației **(9)** ne-a dat răspuns la întrebarea formală algebrică: ce fel de triplete de numere naturale $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$, din șirul **2, 3, 4,...** se potrivesc în calitate de soluții pentru **(9)**? Acestea sunt numai și numai cele patru triplete menționate mai sus**: (2, 2, k); (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5).** Numai în aceste patru cazuri **poate să existe** (dar poate și să nu existe) un grup finit ce conține trei **rotații** de ordinele respective în jurul a trei axe, așezate sub unghi ascuțit una față de alta (Fig.3), astfel încât produsul (efectuarea consecutivă) oricăror două din aceste rotații să fie egal cu rotația a treia – condiție necesară pentru formarea unui grup algebric [5,6]. Anume din această cauză, pentru ca grupul generat să fie finit, fiecare dintre numerele $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ poate căpăta numai valori naturale din diapazonul **2, 3, 4,...,** adică unghiul elementar de rotaţie în jurul fiecărei axe de simetrie trebuie să reprezinte o parte întreagă din rotaţia completă în jurul acestei axe**.** În caz contrar, dacă, de exemplu, rotaţia în jurul axei $\mathbf{OA_1}$ se va efectua la un unghi ce reprezintă o parte iraţională din $\mathbf{2\pi}$**,** atunci $\mathbf{k_1}$ ar fi un număr iraţional şi grupul de simetrie respectiv nu ar fi finit, deoarece el trebuie să conţină cel puţin toate puterile acestei rotaţii. Şi totuşi, din punct de vedere formal, condiţia de coincidenţă a tripletului $\mathbf{k_1, k_2, k_3}$ cu unul din cele patru menţionate este numai o condiţie necesară. Nu există nici o garanţie că pentru fiecare din cele patru triplete de numere există cel puţin un grup rotativ real, care îl realizează. Pentru demonstrarea existenţei grupului ce corespunde tripletului numeric cercetat, nu ne rămâne decât să folosim relaţia **(10)** şi cele asemănătoare cu ea şi să calculăm toate unghiurile plane ale unghiului triedru respectiv, iar apoi să încercăm a interpreta rezultatul pe un poliedru real, bine cunoscut. Numai după aceasta se va putea afirma **existenţa** grupului finit ce corespunde tripletului numeric cercetat.

TRIPLETUL (2, 2, k)

$\mathbf{k_1 = 2; \rightarrow \varphi_1 = 2\pi/2 = \pi; \rightarrow A_1 = \pi/2;}$
$\mathbf{k_2 = 2; \rightarrow \varphi_2 = 2\pi/2 = \pi; \rightarrow A_2 = \pi/2;}$
$\mathbf{k_3 = k; \rightarrow \varphi_1 = 2\pi/k; \quad \rightarrow A_3 = \pi/k.}$

Pentru cosinusurile unghiurilor plane în cazul cercetat obţinem după **(10)** astfel de valori**:**

$\mathbf{\cos\alpha_1 = (\cos(\pi/2) + \cos(\pi/2)\cdot\cos(\pi/k)) / \sin(\pi/2)\cdot\sin(\pi/k) = 0; \quad \alpha_1 = \pi/2;}$
$\mathbf{\cos\alpha_2 = (\cos(\pi/2) + \cos(\pi/2)\cdot\cos(\pi/k)) / \sin(\pi/2)\cdot\sin(\pi/k) = 0; \quad \alpha_2 = \pi/2;}$
$\mathbf{\cos\alpha_3 = (\cos(\pi/k) + \cos(\pi/2)\cdot\cos(\pi/2)) / \sin(\pi/2)\cdot\sin(\pi/2) = \cos(\pi/k); \ \alpha_3 = \pi/k.}$

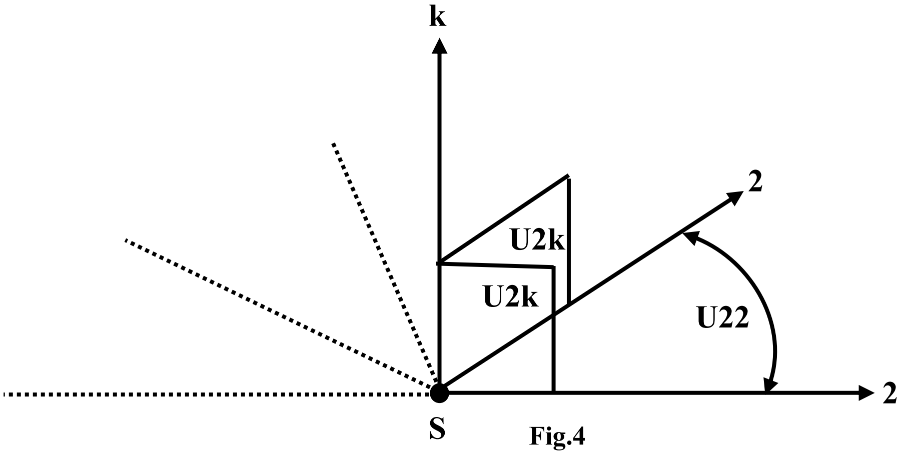

Fig.4

Un astfel de triplet de axe este ilustrat pe Figura 4, unde: $\mathbf{\alpha_1 = U2k = \pi/2, \alpha_2 = U2k = \pi/2, \alpha_3 = U22 = \pi/k;}$ $\mathbf{A_1 = \pi/2, A_2 = \pi/2, A_3 = \pi/k.}$ Din teoria generală a simetriei [3-6] se ştie că produsul a două rotaţii în jurul a două axe de ordinul **2**, ce se intersectează sub unghiul $\mathbf{\pi/k}$**,** este o a treia rotaţie de ordinul **k,** efectuată în jurul unei axe perpendiculare la planul ce trece prin axele de ordinul **2.** O aşa totalitate de elemente de simetrie corespunde seriei de grupuri de simetrie de tipul **k:2 (k = 2, 3, 4,…)**. Grupurile din această serie sunt izomorfe cu grupurile de tip **k·m**, cercetate în lucrările precedente [7,8]. Plus la toate, în grupul de tip **k:2** unghiul ascuţit $\mathbf{\pi/k}$ se poate întâlni numai între axele de ordinul **2.** Deci, aceste grupuri nu conţin rotaţii în jurul axelor de ordin superior aşezate sub unghi ascuţit una faţă de alta, de aceea în lucrarea de faţă ele nu se cercetează. Menţionând că tripletul de numere naturale **(2, 2, k)** corespunde totuşi unei serii infinite de grupuri de tipul **k:2** (doar **k = 2, 3, 4,…),** trecem la cercetarea următorului caz.

TRIPLETUL (2, 3, 3)

$\mathbf{k_1 = 2; \rightarrow \varphi_1 = 2\pi/2 = \pi; \rightarrow A_1 = \pi/2;}$
$\mathbf{k_2 = 3; \rightarrow \varphi_2 = 2\pi/3; \quad \rightarrow A_2 = \pi/3;}$
$\mathbf{k_3 = 3; \rightarrow \varphi_3 = 2\pi/3; \quad \rightarrow A_3 = \pi/3;}$

Pentru cosinusurile unghiurilor plane în cazul dat folosim **(10)** şi obţinem următoarele valori:

$\mathbf{\cos\alpha_1 = (\cos(\pi/2) + \cos(\pi/3)\cdot\cos(\pi/3)) / \sin(\pi/3)\cdot\sin(\pi/3) = 1/3;}$
$\mathbf{\cos\alpha_2 = (\cos(\pi/3) + \cos(\pi/2)\cdot\cos(\pi/3)) / \sin(\pi/2)\cdot\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/3;}$
$\mathbf{\cos\alpha_3 = (\cos(\pi/3) + \cos(\pi/2)\cdot\cos(\pi/3)) / \sin(\pi/2)\cdot\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/3.}$

În descrierea grupului punctual cristalografic de simetrie **3/2** găsim anume aceste caracteristici ale unghiurilor dintre axele de simetrie pentru grupul **3/2**:

cosU33 = 1/3 = cosα_1; cos$\alpha_1 \approx$ 0.33; α_1 = U33 $\approx$ 70.5^0;

cosU32 = $\sqrt{3}$/3 = cosα_2; cos$\alpha_2 \approx$ 0.58; α_2 = U32 $\approx$ 54.7^0.

De aici facem concluzia că tripletul **(2, 3, 3)** corespunde anume grupului punctual cristalografic de simetrie **3/2.** El este grupul rotativ al **tetraedrului regulat,** deşi, în unele cazuri, la cercetarea lui e mai comod ca el să fie privit ca un subgrup al grupului rotativ al cubului.

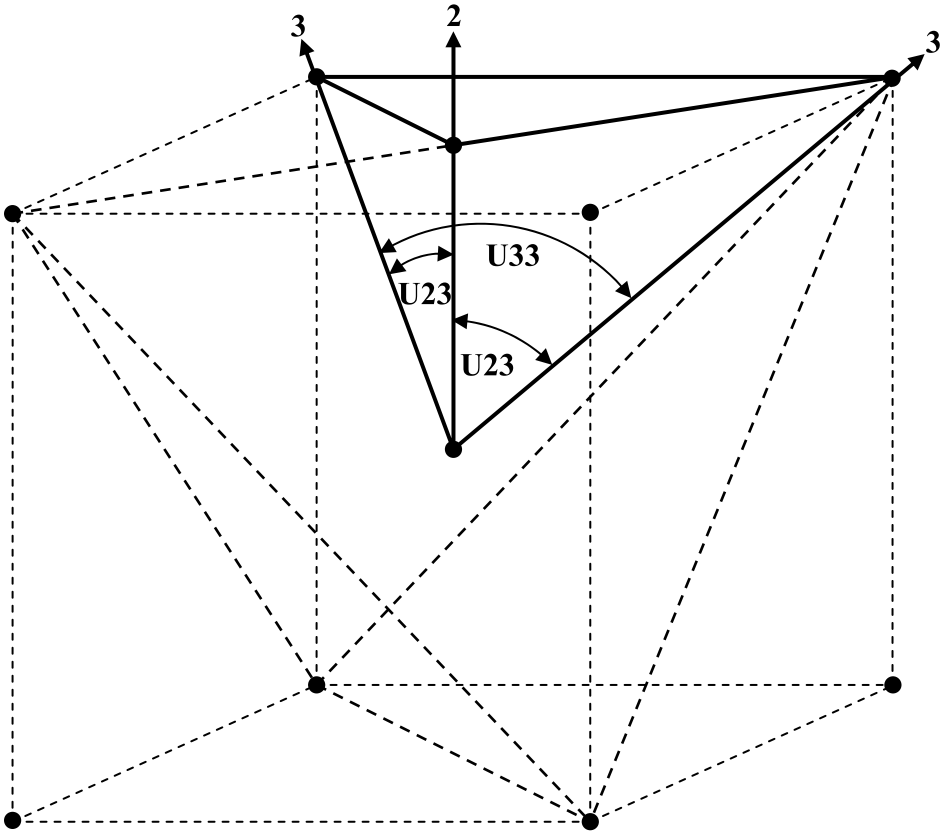

Fig.5

Pe Figura 5 este ilustrată configurația a trei axe de simetrie ce corespund tripletului de numere (**2, 3, 3)** şi care se întâlneşte în totalitatea elementelor de simetrie ale grupului **3/2.** În acest caz, simbolul **"/"** din denumirea grupului reprezintă unghiul **U32** dintre diagonala spațială a cubului şi oricare dintre dreptele ce trec prin centrele fețelor opuse ale lui. Aceste drepte indică direcțiile axelor de simetrie de ordinul **4** ale cubului şi tot ele indică direcțiile axelor de simetrie de ordinul **2** ale tetraedrului regulat înscris în el. Aşadar, pentru **tetraedrul regulat** grupul **3/2** este grupul complet rotativ, iar pentru **cub** acelaşi grup **3/2** este numai un subgrup netrivial al grupului complet rotativ, pentru că nu toate transformările de simetrie ale cubului sunt şi transformări de simetrie ale tetraedrului regulat înscris în el (de exemplu, tetraedrul nu are axe de rotație de ordinul **4**).

TRIPLETUL (2, 3, 4)

$k_1 = 2$; $\to \varphi_1 = 2\pi/2$; $\to A_1 = \pi/2$;

$k_2 = 3$; $\to \varphi_2 = 2\pi/3$; $\to A_2 = \pi/3$;

$k_3 = 4$; $\to \varphi_3 = 2\pi/4$; $\to A_3 = \pi/4$;

Pentru cosinusurile unghiurilor plane în cazul de față obținem după **(10)** valorile:

cosα_1 = [cos(π/2) + cos(π/3)·cos(π/4)] / sin(π/3)·sin(π/4) = $\sqrt{3}$/3;

cosα_2 = [cos(π/3) + cos(π/2)·cos(π/4)] / sin(π/2)·sin(π/4) = $\sqrt{2}$/2;

cosα_3 = [cos(π/4) + cos(π/2)·cos(π/3)] / sin(π/2)·sin(π/3) = $\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

Anterior au fost obținute aceleaşi caracteristici ale unghiurilor dintre axele de simetrie pentru grupul **3/4**:

cosU34 = $\sqrt{3}/3$ = cosα_1; cos$\alpha_1 \approx$ 0,58; α_1 = U34 $\approx$ 54,7^0;

cosU24 = $\sqrt{2}/2$ = cosα_2; cos$\alpha_2 \approx$ 0,71; α_2 = U24 $\approx$ 45,0^0;

cosU32 =$\sqrt{2}/\sqrt{3}$ = cosα_3; cos$\alpha_3 \approx$ 0,82; α_3 = U32 $\approx$ 35,3^0.

De aici formulăm concluzia că tripletul de numere **(2, 3, 4)** corespunde grupului punctual cristalografic de simetrie **3/4.** El este grupul rotativ al **cubului** şi, deoarece grupul de simetrie al cubului este identic cu grupul de simetrie al octaedrului regulat, formal putem considera că în cazul de față este vorba şi despre grupul rotativ al **octaedrului regulat.**

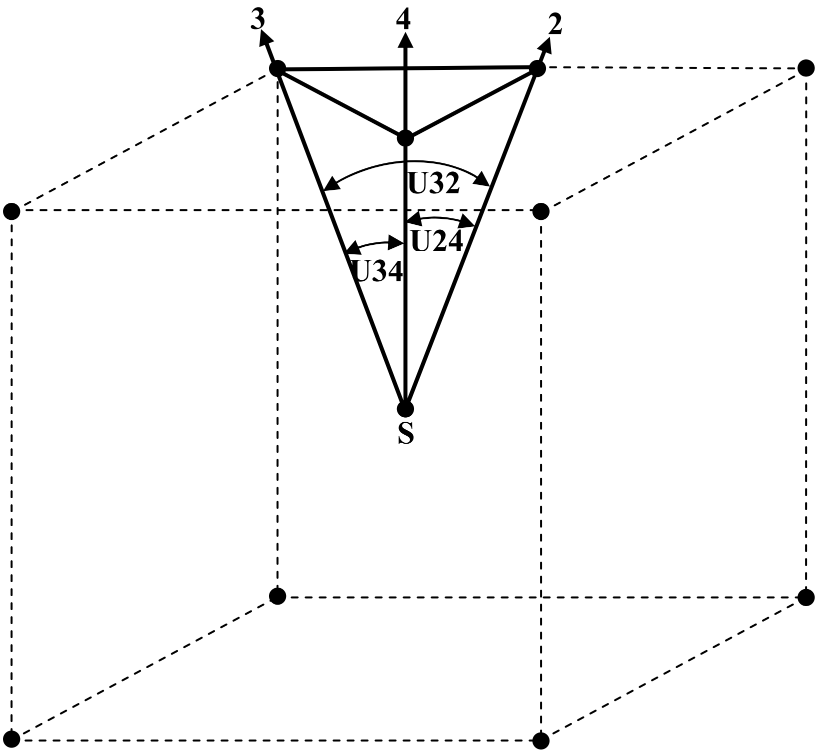

Fig.6

Pe Figura 6 este ilustrată configurația axelor de simetrie ce corespunde tripletului (**2, 3, 4)** şi care se întâlneşte în totalitatea elementelor de simetrie ale grupului **3/4.** Aici simbolul **"/"** din denumirea grupului reprezintă unghiul **U34** dintre diagonala spațială a cubului şi oricare dintre dreptele ce trec prin centrele fețelor opuse ale lui, adică în acest caz este vorba exact despre acelaşi unghi ca şi în grupul precedent **3/2,** cu deosebirea că acolo el se numea **U32,** iar aici – **U34**.

TRIPLETUL (2, 3, 5)

$k_1 = 2; \rightarrow \varphi_1 = 2\pi/2; \rightarrow A_1 = \pi/2;$

$k_2 = 3; \rightarrow \varphi_2 = 2\pi/3; \rightarrow A_2 = \pi/3;$

$k_3 = 5; \rightarrow \varphi_3 = 2\pi/5; \rightarrow A_3 = \pi/5;$

Pentru a calcula unghiurile plane în cazul cercetat, menționăm în prealabil următoarele**:**

$\cos(\pi/5)=(\sqrt{5}+1)/4$; $\sin(\pi/5)=[\sqrt{(10-2\sqrt{5})}]/4$.

Folosind **(10),** după transformări elementare voluminoase, obținem pentru **cosα_1, cosα_2, cosα_3:**

$\cos\alpha_1=[\cos(\pi/2)+\cos(\pi/3)\cdot\cos(\pi/5)]/\sin(\pi/3)\cdot\sin(\pi/5)=[0+(1/2)\cdot(\sqrt{5}+1)/4]/[(\sqrt{3}/2)\cdot[\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}]/4]=$
$=[(\sqrt{5}+1)/8]/[\sqrt{3}\cdot\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}]/8=(\sqrt{5}+1)/\sqrt{(6\cdot(5-\sqrt{5}))}=(\sqrt{5}+3)/\sqrt{[6\cdot(5+\sqrt{5})]}$;

$\cos\alpha_2=[\cos(\pi/3)+\cos(\pi/2)\cdot\cos(\pi/5)]/\sin(\pi/2)\cdot\sin(\pi/5)=(1/2+0)/[\sqrt{[(10-2\cdot\sqrt{5})/4]}]=\sqrt{[2/(5-\sqrt{5})]}=\sqrt{[(5+\sqrt{5})/10]}$;

$\cos\alpha_3=[\cos(\pi/5)+\cos(\pi/2)\cdot\cos(\pi/3)]/\sin(\pi/2)\cdot\sin(\pi/3)=[(\sqrt{5}+1)/4]/[\sqrt{3}/2]=(\sqrt{5}+1)(2\cdot\sqrt{3})$.

Printre rezultatele anterioare găsim anume aceste caracteristici ale unghiurilor dintre axele de simetrie pentru grupul necristalografic **3/5.** El este grupul rotativ al poliedrului regulat numit ***icosaedru***. Deoarece grupul de simetrie al icosaedrului este identic cu grupul de simetrie al dodecaedrului, formal se poate afirma că în cazul de față este vorba despre grupul rotativ al ***dodecaedrului***.

$\cos(U35)=(\sqrt{5}+3)/\sqrt{[6\cdot(5+\sqrt{5})]}=\cos\alpha_1$; $\cos\alpha_1 \approx 0.79$; $\alpha_1=U35\approx 37.4^0$;
$\cos(U25)=\sqrt{[(5+\sqrt{5})/10]} \quad =\cos\alpha_2$; $\cos\alpha_2 \approx 0.85$; $\alpha_2=U25\approx 31.7^0$;
$\cos(U32)=(\sqrt{5}+1)/(2\cdot\sqrt{3}) \quad =\cos\alpha_3$; $\cos\alpha_3 \approx 0.93$; $\alpha_3=U32\approx 20.9^0$.

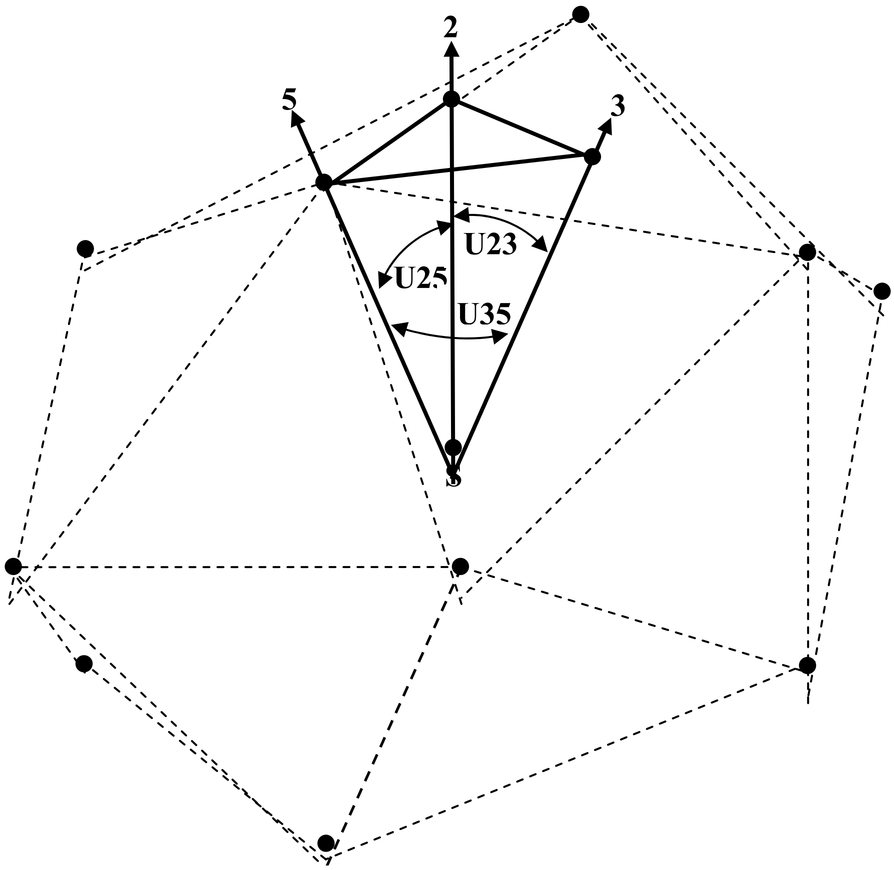

Fig.7

Pe Figura 7 este ilustrată configurația a trei axe de simetrie ce corespund tripletului de numere **(2, 3, 5)** şi care se întâlneşte în totalitatea elementelor de simetrie ale grupului punctual **3/5.** Aici simbolul **"/"** din denumirea grupului reprezintă unghiul ascuțit **U35,** caracterizat mai sus, adică **U35≈37,4^0, cosU35 = (√5+3)/√[6·(5+√5)]**.

3. Analiza rezultatelor. Pentru compararea rezultatelor obținute în lucrarea de față, propunem de a uni trei tabele generalizate în lucrarea precedentă – **TAB32GEN, TAB34GEN, TAB35GEN** – într-un singur tabel, cu excluderea cazurilor triviale, când unghiurile dintre axe sunt egale cu **0^0** şi **90^0**. De asemenea, excludem şi cazurile când rotațiile elementare în jurul celor două axe aşezate sub unghi ascuțit generează un subgrup netrivial al grupului cercetat. Atunci în tabelul astfel obținut vom avea numai diferite versiuni ale sistemelor de elemente generatoare sau, altfel spus, diferite denumiri posibile pentru fiecare din grupurile rotative **3/2, 3/4, 3/5**.

Convenim să notăm prin **p/q (p, q=2, 3, 4,…)** numele grupului rotativ **finit**, determinat de rotațiile elementare în jurul a două axe de ordin superior aşezate sub unghi ascuțit, având în vedere că mărimea unghiului determinant dintre axe va fi comunicată suplimentar în fiecare caz concret. În caz general, când valoarea concretă a unghiului determinant nu va avea însemnătate, tot prin simbolul **p/q (p, q=2, 3, 4,…)** vom nota şi întreaga serie respectivă de grupuri ce pot fi obținute pentru diferite valori admisibile ale unghiului determinant dintre axe. Atunci rezultatele de bază prezentate în acest compartiment pot fi formulate astfel:

DIFERITE DENUMIRI PENTRU GRUPURILE 3/2, 3/4, 3/5; TABREZ				
Nr. d/r	**Numele posibil al grupului**	**Unghiul dintre axe**	**Cosinusul unghiului dintre axe (valoare exactă şi cea aproximativă)**	**Axe aşezate sub unghiul dat**
GRUPUL 3/2				
1.	**3/2**	**U32≈54.7^0**	**cos(U32)=√3/3 ≈0,58**	$3_1 \times 2_{1,2,3}$
2.	**3/3**	**U33≈70.5^0**	**cos(U33)=1/3 ≈0,33**	$3_1 \times 3_{2,3,4}$
GRUPUL 3/4				
1.	**3/2**	**U32≈35.3^0**	**cos(U32)=√2/√3 ≈0,82**	$3_1 \times 2_{1,4,5}$
2.	**3/4**	**U34≈54.7^0**	**cos(U34)=√3/3 ≈0,58**	$3_1 \times 4_{1,2,3}$
3.	**2/4**	**U24≈45.0^0**	**cos(U24)=√2/2 ≈0,71**	$2_1 \times 4_{2,3}$
GRUPUL 3/5				
1.	**3/2**	**U32≈20.9^0**	**cos(U32)=(√5+1)/(2·√3) ≈0,93**	$3_1 \times 2_{1,2,6}$
2.	**3/2**	**U32≈69.1^0**	**cos(U32)=(√5-1)/(2·√3) ≈0,36**	$3_1 \times 2_{4,11,15}$
3.	**3/3**	**U33≈41.8^0**	**cos(U33)=√5/3 ≈0,75**	$3_1 \times 3_{2,5,6}$
4.	**3/5**	**U35≈37.4^0**	**cos(U35)=(√5+3)/√[6·(√5+5)] ≈0,79**	$3_1 \times 5_{1,2,6}$
5.	**3/5**	**U35≈79.2^0**	**cos(U35)=(√5 -1)/√[6·(√5+5)] ≈0,19**	$3_1 \times 5_{3,4,5}$
6.	**5/5**	**U55≈63.4^0**	**cos(U55)=√5/5 ≈0,45**	$5_1 \times 5_{2,3,4,5,6}$
7.	**2/5**	**U25≈31.7^0**	**cos(U25)=√[(5+√5)/10] ≈0,85**	$2_1 \times 5_{1,6}$
8.	**2/5**	**U25≈58.3^0**	**cos(U25)=√[(5-√5)/10] ≈0,53**	$2_1 \times 5_{2,5}$

1. În seria cercetată de grupuri finite **p/q** există **trei şi numai trei** astfel de grupuri. Acestea sunt grupurile **3/2, 3/4, 3/5.** Alte grupuri rotative din seria **p/q** nu mai există; în caz contrar, ar exista şi alte triplete de numere naturale **(k_1, k_2, k_3)** – soluţii ale inecuaţiei **(9)**, ceea ce este imposibil.

2. În mod direct a fost stabilit că fiecare din grupurile **3/2, 3/4 şi 3/5** ale seriei **p/q** reprezintă grupul rotativ al unui poliedru **regulat** – respectiv, al **tetraedrului** regulat, al **cubului** (octaedrului regulat) şi al **icosaedrului** (dodecaedrului). Argumente directe pentru a putea afirma în prealabil, că seria **p/q** este alcătuită exclusiv din grupuri rotative ale poliedrelor regulate nu au fost aduse, dar rezultatul formulat a fost obţinut nemijlocit.

3. În **TABREZ,** pentru fiecare din grupurile **3/2, 3/4, 3/5** sunt descrise caracteristicile tuturor unghiurilor posibile dintre orice două axe ce se întâlnesc la cercetarea acestui grup.

4. În grupul punctual cristalografic **3/2** una din axele, rotaţia în jurul căreia participă în denumirea grupului, nu este de ordin superior. Şi totuşi, apartenenţa grupului **3/2** la seria cercetată este justificată cel puţin de faptul că, după cum e arătat în **TABREZ,** acelaşi grup **3/2** poate fi înscris şi în forma **3/3,** numai că de data aceasta simbolul **"/"** din denumirea grupului indică unghiul ascuţit **U33,** pentru care **cos(U33)=1/3, U33≈70,5^0,** adică acesta este unghiul dintre orice două diagonale spaţiale ale cubului. Aceleaşi două axe de ordinul **3,** aşezate sub acelaşi unghi **U33**, le întâlnim şi la cercetarea grupului **3/4,** şi la cercetarea grupului **3/5.** În ambele cazuri rotaţiile respective generează în grupul de bază subgrupul **3/2.** Astfel, **3/2** asistă ca subgrup trivial sau netrivial în toate grupurile seriei **p/q.**

5. În **TABREZ** pentru fiecare din grupurile **3/2, 3/4, 3/5** sunt descrise diferite denumiri posibile ale grupului cercetat **p/q,** în dependenţă de ordinele **p** şi **q** ale celor două axe şi unghiul determinant dintre ele. Analiza amănunţită a **TABREZ** ne deschide un şir de caracteristici individuale ale celor trei grupuri cercetate.

5_1. Există două posibilităţi de înscriere a grupului **3/2,** trei posibilităţi de înscriere a grupului **3/4** şi opt posibilităţi de înscriere a grupului **3/5.** În toate aceste treisprezece cazuri unghiurile determinante dintre axe nu se repetă, cu unica excepţie a unghiului **U32** din grupul **3/2,** care coincide cu unghiul **U34** din grupul **3/4.**

5_2. Numele **3/2** este **UNIVERSAL** şi poate fi aplicat la oricare din cele trei grupuri ale seriei **p/q.** În primul caz (grupul clasic **3/2**) unghiul determinant este **U32≈54.7^0, cos(U32)=√3/3≈0,58,** în cel de-al doilea caz (grupul clasic **3/4**) unghiul determinant este **U32≈35,3^0, cos(U32)=√2/√3≈0,82,** iar în cazul al treilea (grupul clasic **3/5)** există chiar două unghiuri determinante, adică **3/5** se scrie în forma **3/2** în două feluri diferite: pentru unghiul determinant **U32≈20,9^0, cos(U32)=(√5+1)/(2·√3)≈0,93** şi pentru **U32≈69,1^0, cos(U32)=(√5--1)/(2·√3)≈0,36**. Alte denumiri universale pentru toate cele trei grupuri cercetate nu există.

5_3. Printre cele opt posibilități de înscriere a grupului clasic **3/5** se întâlnesc trei perechi de înscrieri identice: numele **3/2** din rândul **1** şi rândul **2** ale **TABREZ,** numele **3/5** din rândul **4** şi rândul **5** ale **TABREZ,** şi numele **2/5** din rândul **7** şi rândul **8** ale **TABREZ.** Plus la toate, fiecare nume de forma **p/q** este **general.** De exemplu, în grupul **3/5** există zece posibilități de alegere a rotației elementare **3** şi câte şase posibilități de alegere a rotației elementare **5,** aşa că numai pentru înscrierea concretă a numelui **3/5** există **10·6=60** de posibilități.

5_4. Numele **3/3** se poate folosi atât pentru notarea grupului clasic **3/2** (atunci unghiul determinant va fi **U33≈70,5^0, cos(U33)=1/3≈0,33),** cît şi pentru notarea grupului clasic **3/5** (în acest caz unghiul determinant va fi **U33≈41,8^0, cos(U33)=√5/3≈0,75)**. Şi numai pentru grupul clasic **3/4** nu există nici o posibilitate de a-l înscrie în forma **3/3.**

5_5. În grupul **3/5,** fiecare axă de ordinul **3** formează unghiul determinant **U33** descris în punctul precedent, nu cu toate axele de ordinul **3,** ci numai cu trei dintre ele. Deci, pentru cazul dat numele particular **3/3** poate fi format nu în **10·9=90,** ci numai în **10·3=30** de feluri. Spre deosebire de acest caz, unghiul dintre orice două axe diferite de ordinul **5** este unul şi acelaşi **U55≈63,4^0, cos(U55)=√5/5≈0,45;** astfel, numele concret **5/5** pentru grupul clasic **3/5** poate fi alcătuit într-un număr maximal posibil de feluri, egal cu **6·5=30**.

Referințe:

1. Погорелов А.В. Элементарная геометрия. Стереометрия. - Москва: Наука, 1970.
2. Гилберт Д., Кон-Фоссеп С. Наглядная геометрия. - Москва: Наука, 1981.
3. Заморзаев А.М. Развитие новых идей в федоровском учении о симметрии за последние десятилетия. - В сб.: Идеи Е.С. Федорова в современной кристаллографии и минералогии. - Ленинград: Наука, 1970, с.42-64.
4. Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке и искусстве. - Москва: Наука, 1972.
5. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Теория дискретных групп симметрии: Лекции по спецкурсу. - Кишинев: ОП КГУ, 1977.
6. Zamorzaev A.M., Palistrant A.F., Lungu A.P. Teoria grupurilor discrete de simetrie. Partea 1. - Chişinău: CE USM, 1991.
7. Заболотный П.А. Геометрическое обоснование алгебраической структуры точечных групп симметрии с одной главной поворотной осью // Analele Ştiințifice ale USM. Seria „Stiințe fizico-matematice”. - Chişinău: CE USM, 2004.
8. Заболотный П.А. Геометрическое обоснование алгебраической структуры точечных групп симметрии серии **m·k:m.** // Analele Ştiințifice ale USM. Seria „Stiințe fizico-matematice”. - Chişinău: CEP USM, 2006.

Prezentat la 14.09.2009