# ASELENIZAREA UNEI NAVE COSMICE

***Alexandru BREGA, Valeriu UNGUREANU***
*Catedra Informatică Aplicată*

It is considered the problem of the spaceship descending on the Moon (cosmic body without atmosphere) with spending a minimum amount of the fuel. The mathematical model represents an optimal control problem. It's solved by application of the Lagrange principle and the maximum principle of Pontreaghin.

The investigation of the problem with Lagrange method it is difficult because it needs application of numerical methods with a high precision and knowledge in several fields of mathematics and physics, also. However we obtain numerical results that illustrates the possibility for the cosmic ship to descend, respecting the proposed beginning requirements (the initial mass of fuel, height, velocity, etc.).

It is presented the program for lunar descending simulation process in Mathematica 7.0. The formulas and numerical results, obtained during the theoretical analysis of the problem, are program fundamentals.

## Preliminarii

Rezolvarea unei probleme de optimizare cere determinarea celei mai bune variante dintr-un set de alternative, evaluate conform unui anumit criteriu. Din perspectivă practică, problemele de optimizare pot fi considerate modele matematice ale unor obiecte, fenomene, procese, sisteme,... reale. Dar, prin esenţa lor, problemele de optimizare constituie un domeniu matematic distinct, care formează obiectul de studiu al teoriei optimizării [1,5].

O problemă importantă a astro-navigaţiei este problema aselenizării navei cosmice cu pierderi minime de combustibil [2-4]. Modelul matematic al acestei probleme reprezintă o problemă de optimizare. Rezolvarea ei poate fi efectuată prin aplicarea aparatului calculului variaţional şi al controlului optimal, a principiului lui Lagrange pentru problema lui Lagrange şi, în special, a principiului de maxim al lui Pontreaghin [5].

## Modelul matematic

Vom cerceta problema coborârii navei cosmice pe suprafaţa netedă a unui corp cosmic lipsit de atmosferă. În calitate de astfel de corp cosmic poate fi considerat satelitul natural al Pământului – Luna [2-4].

Considerăm că nava cosmică se mişcă pe o traiectorie rectilinie, perpendiculară suprafeţei Lunii şi pentru frânare foloseşte doar puterea motorului. Notăm:

- $m(t)$ – masa navei în momentul $t$,
- $x(t)$ – distanţa navei de la suprafaţa Lunii în momentul $t$.

Asupra navei cosmice acţionează forţa de greutate – $\gamma m$ şi forţa de tracţiune – $ku$. Coeficienţii $\gamma > 0$ (acceleraţia căderii libere) şi $k$ (acceleraţia forţei de tracţiune) sunt consideraţi constanţi. Asupra puterii motorului $u$ se impune restricţia $0 \le u \le U$.

Conform legii a doua a lui Newton, zborul navei se descrie prin relaţiile:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = ku - \gamma m, \\ \dot{m} = -u, \\ 0 \le u \le U. \end{cases} \tag{1}$$

Ne punem drept scop aselenizarea lentă cu un consum minim de combustibil (fără fixarea timpului de aselenizare).

Aceasta ne conduce la următoarea formalizare matematică a problemei inițiale ca problemă de optimizare:

$$m_0 - m(T) \to \inf,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{ku}{m} - \gamma, \\ \dot{m} = -u, \end{cases}$$

$$x_1(0) = \xi_1 > 0,\; x_2(0) = \xi_2,\; m(0) = m_0,\; x_1(T) = x_2(T) = 0\;,\; 0 \le u \le U\;,$$

unde notăm $x(t)$ prin $x_1$, viteza prin $x_2$, $m(0)$ prin $m_0$, timpul aselenizării prin $T$.

Menționăm că diferența dintre masa inițială şi cea finală este egală cu cantitatea de combustibil cheltuit, numerele $x_1(0)$, $x_2(0)$ şi $m(0)$ caracterizează stările inițiale şi masa inițială a navei, egalitatea $x_1(T) = x_2(T) = 0$ indică că aselenizarea a avut loc lent – în punctul necesar nava a aselenizat cu viteza zero.

Considerăm funcția Lagrange pentru problema de optimizare:

$$L = \lambda_0\left(m_0 - m(T)\right) + \int_0^T \left(p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2\left(\dot{x}_2 - \frac{ku}{m} + \gamma\right) + p_3(\dot{m} + u)\right)dt + \mu_1 x_1(T) + \mu_2 x_2(T).$$

Soluția optimă a problemei verifică condițiile necesare:

a) ecuațiile lui Euler

$$-\dot{p}_1 = 0, \qquad -\dot{p}_2 - p_1 = 0,\; -\dot{p}_3 + p_2\left(\frac{ku}{m^2}\right) = 0;$$

b) transversabilitatea după $x$

$$p_1(T) = -\mu_1, \qquad p_2(T) = -\mu_2, \qquad p_3(T) = \lambda_0;$$

c) optimalitatea după $u$

$$\min_{0 \le u \le U}\left(p_3(t)u - p_2(t)\frac{ku}{m(t)}\right) = p_3(t)\hat{u}(t) - p_2(t)\frac{k\hat{u}(t)}{m(t)};$$

*d)* staționaritatea după $T$

$$-\lambda_0 \dot{m}(T) + \mu_1 \dot{x}_1(T) + \mu_2 \dot{x}_2(T) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-p_3(T)\dot{m}(T) - p_1(T)\dot{x}_1(T) - p_2(T)\dot{x}_2(T) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-p_3(T)\left(-\hat{u}(T)\right) - p_1(T)x_2(T) - p_2(T)\left(\frac{k\hat{u}(T)}{m} - \gamma\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda_0 \hat{u}(T) - p_2(T)\left(\frac{k\hat{u}(T)}{m(T)} - \gamma\right) = 0.$$

Din a) rezultă că:

$$p_1(T) = p = const, \qquad p_2(T) = -pt + q, \qquad q - \; const. \tag{2}$$

Notăm $\psi(t) = -p_3(t) + \dfrac{kp_3(t)}{m(t)}$.

În baza punctului a) obținem:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{kp}{m(t)}. \tag{3}$$

$$\dot{\psi}(t) = \left(-p_3(t) + \frac{kp_1}{m(t)}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\psi}(t) = \left(-p_3(t)\right)' + \left(\frac{k(-p)t}{m(t)}\right)' + \left(\frac{kq}{m(t)}\right)' = \frac{(pt+q)ku}{m(t)^2} +$$

$$+ \frac{(-kp)m(t) + kpt\dot{m}(t)}{m(t)^2} + \frac{kq\dot{m}(t)}{m(t)^2} = -\frac{kp}{m(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\psi}(t) = \frac{-kp}{m(t)}$$

Din condițiile de staționaritate după *T* ajungem la egalitatea:

$$\psi(T)\dot{m}(T) = p_2(T)\gamma \tag{4}$$

$$\lambda_0\dot{m}(T) - p_2(T)\frac{k\dot{m}(T)}{m(T)} + p_2(T)\gamma = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_0\dot{m}(T) + \frac{pTk\dot{m}(T)}{m(T)} = -p_2(T)\gamma \qquad \Leftrightarrow$$

$$p_3(T)\dot{m}(T) - \frac{p_2(T)k\dot{m}(T)}{m(T)} = -p_2(T)\gamma \qquad \Leftrightarrow$$

$$\dot{m}(T)\left(p_3(T) - \frac{p_2(T)k}{m(T)}\right) = p_2(T)\gamma \qquad \Leftrightarrow$$

$$-\psi(T)\dot{m}(T) = -p_2(T)\gamma \qquad \Leftrightarrow$$

$$\psi(T)\dot{m}(T) = p_2(T)\gamma$$

Iar din optimalitatea după *u* găsim că:

$$p_3(t)\dot{m}(t) - p_2(t)\frac{k\dot{m}(t)}{m(t)} \Leftrightarrow \dot{m}(t)\left(p_3(t) - p_2(t)\frac{k}{m(t)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\dot{m}(t)\psi(t) \overset{(3)}{=} -p_2(t)\gamma \Rightarrow \dot{m}(t) = \begin{cases} 0, & daca \quad \psi(t) < 0, \\ U, & daca \quad \psi(t) > 0. \end{cases}$$

Dacă $p = 0$, atunci din (3) rezultă că $\psi = \psi_0 = const$. Cu toate acestea, $\psi_0 \neq 0$; altfel, din (2) şi (4) se obține că $p_2 \equiv 0$ şi toți multiplicatorii Lagrange se anulează. Deci, sau $\hat{u}(t) \equiv 0$, sau $\hat{u}(t) \equiv U$. Dacă totuşi $p \neq 0$, atunci funcția $\psi$ este strict monotonă şi există un singur schimb de viteză de la $\hat{u}(t) \equiv U$ la $\hat{u}(t) \equiv 0$, sau invers – de la $\hat{u}(t) \equiv 0$ la $\hat{u}(t) \equiv U$. Uşor se observă că primul caz este imposibil, adică nu putem aseleniza nava cu motorul oprit. Deci, rămân doar două posibilități: sau nava se mişcă fără a-şi schimba viteza $\hat{u}(t) \equiv U$, sau face un schimb momentan de viteză de la zero la $U$.

Fie $\tau$ – timpul în care a avut loc schimbul de viteză. Mişcarea navei când $t \le \tau$ este dată de formulele căderii libere:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 t - \gamma \frac{t^2}{2}, \qquad x_2 = \xi_2 - \gamma t, \qquad m(t) \equiv m_0.$$

În planul $(x_1, x_2)$ această corelație determină o parabolă (*a se vedea* Fig.1):

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 \frac{(\xi_2 - x_2)}{\gamma} - \frac{(\xi_2 - x_2)^2}{2\gamma}.$$

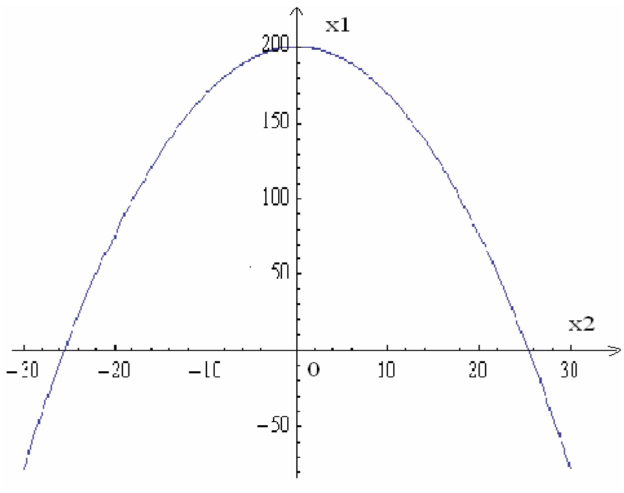



**Fig1.** Dependența înălțimii de viteză.

Mişcarea navei pe intervalul de timp $[\tau, T]$ se determină după formulele (1), unde

$$u(t) \equiv U, \qquad x_1(\tau) = \overline{\xi}_1, \qquad x_2(\tau) = \overline{\xi}_2, \qquad m(\tau) = m_0.$$

Deci, programul aselenizării lente constă din două părți:

[A,B] – în care $u(t) \equiv 0$ şi are loc căderea liberă a navei cosmice pe intervalul de timp $[0, \tau]$;

[B,0] – în care $u(t) \equiv U$ şi este asigurată frânarea maximă a căderii navei în punctul $x_1(t) = x_2(t) = 0$ pe porțiunea de timp $[\tau, T]$ (*a se vedea*, Fig.2).

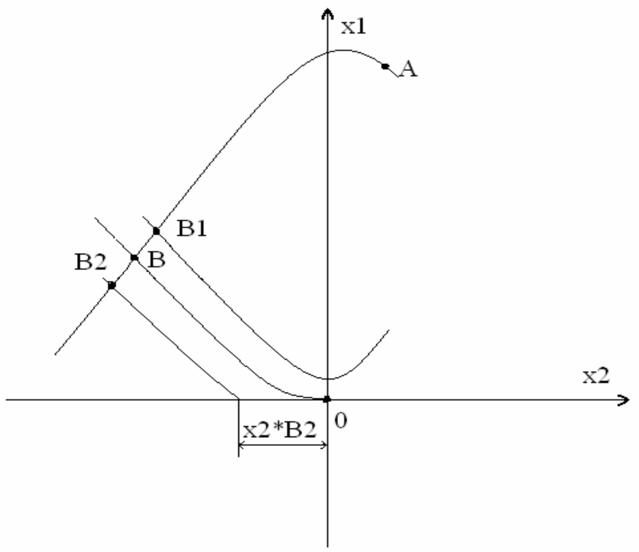



**Fig.2.** Ilustrarea grafică pentru trei situații diferite la aselenizare.
Punctele B1 şi B2 reprezintă cazurile de eşec.

Soluția corespunzătoarei probleme Cauchy are forma:

$$x_1(\tau+\alpha)=\overline{\xi_1}+\overline{\xi_2}\alpha-\frac{1}{2}\gamma\alpha^2+k\alpha+k\frac{m_0}{U}\left(1-\frac{U\alpha}{m_0}\right)\ln\left(1-\frac{U\alpha}{m_0}\right),$$

$$x_2(\tau+\alpha)=\overline{\xi_2}-\gamma\alpha-k\ln\left(1-\frac{U\alpha}{m_0}\right),$$

$$m=m_0-U\alpha,$$

unde $\tau+\alpha=t$.

Rezolvând acest sistem de ecuații în raport cu variabilele $\overline{\xi_1}$, $\overline{\xi_2}$, obținem:

$$\overline{\xi}_1=\frac{1}{2}\left(-\alpha^2\gamma-2k\alpha\ln\left(1-\frac{U\alpha}{m_0}\right)\right),$$

$$\overline{\xi}_2=\alpha\gamma+k\ln\left(1-\frac{U\alpha}{m_0}\right).$$

și dacă $\alpha=\frac{m_0-m}{U}$, atunci obținem rezultatul:

$$\overline{\xi}_1=\frac{1}{2}\left(-\frac{2k\ln\left(1-\frac{-m+m_0}{m_0}\right)(m_0-m)}{U}-\frac{\gamma(m_0-m)^2}{U^2}\right),$$

$$\overline{\xi}_2=k\ln\left(1-\frac{-m+m_0}{m_0}\right)+\frac{\gamma(m_0-m)}{U}$$

Mulțimea punctelor $(\xi_1,\ \xi_2)$ din care se poate ajunge la originea coordonatelor, pornind motorul la puterea maximă, se dă în formă parametrică de egalitățile:

$$x_1(\alpha)=x_2(\alpha)=0\ \Rightarrow x_1(\alpha)=\frac{-\alpha^2\gamma}{2},$$

$x_2(\alpha)=\alpha\gamma$ (a se vedea Fig.3).

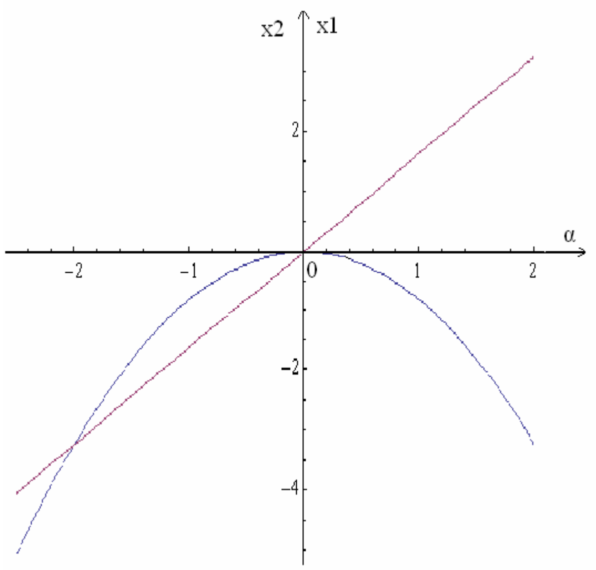



**Fig.3.** Suprapunerea graficelor dependenței vitezei și înălțimii față de timpul de lucru al motorului.

Dacă excludem din aceste două egalități parametrul $\alpha$, obținem curba $\Psi\left(\overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}\right)$. Astfel, obținem rezultatul final: urmează ca în intervalul de timp $\left[0, \tau\right]$, precizat de prima rădăcină pozitivă a ecuației

$$\Psi\left(\xi_1 + \xi_2\tau - \frac{\gamma\tau^2}{2},\ \xi_2 - \gamma\tau\right) = 0, \tag{5}$$

să se lase aparatul să cadă liber, apoi în momentul $\tau$ să se pornească motorul la putere maximă. Dacă pentru $\left(\xi_1, \xi_2\right)$ ecuația (5) nu are soluții, aselenizarea lentă este imposibilă.

**Programul în Wolfram Mathematica 7.0**

Pentru soluționarea problemei au fost alcătuite programe în sistemul Wolfram Matematica 7.0. Programul este alcătuit astfel încât în regim interactiv se introduc datele inițiale, şi apoi se poate simula în regim apropiat de cel real procesul de aselenizare a navei cosmice, astfel că nu doar se calculează parametrii numerici, dar şi se construieşte o animație vizuală a procesului. E posibilă manipularea în decursul întregului act de aselenizare.

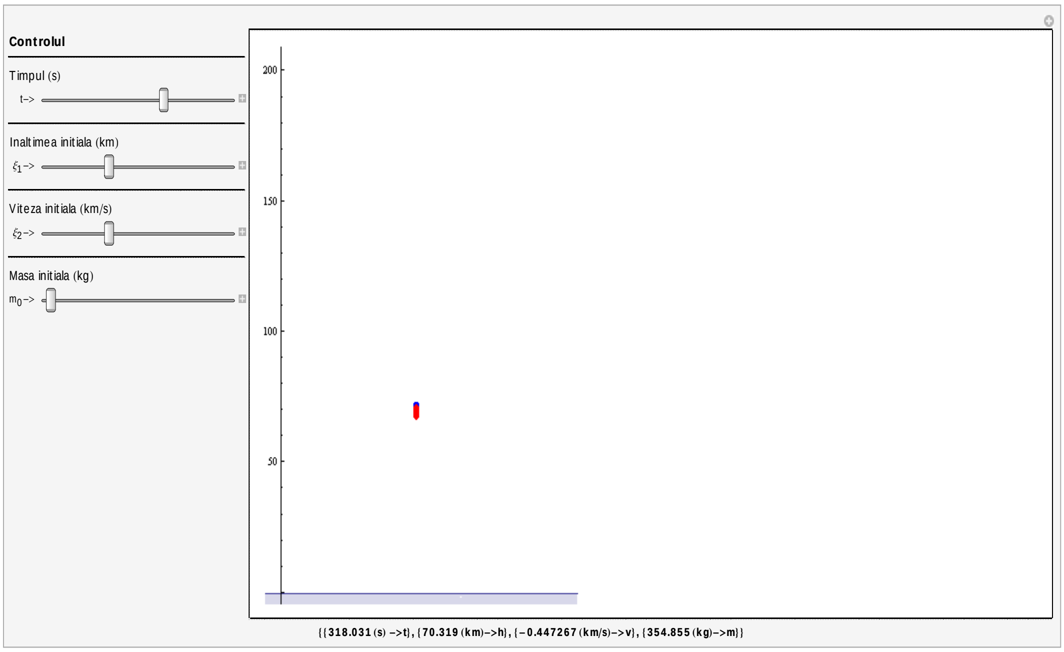
În continuare prezentăm textul unei variante de program în sistemul Wolfram Mathematica 7.0.

```
Clear[h0,v0,γ,m0,U,k,ξ1,ξ2,α,τ,T,t,δ,r1,r2,x]
h0=150;v0=0.;γ=1.622/1000;
m0=500;U=2;k=0.2;
Manipulate[sol=FindRoot[{ξ1+ξ2 y-(γ y2)/2+(ξ2-γ y) x1-1/2 γ x12+k x1+(k m0)/U
(1-(U x1)/m0) Log[1-(U x1)/m0]==0,ξ2-γ y-γ x1-k Log[1-(U
x1)/m0]==0},{{y,245},{x1,245}}];
  α=x1/.sol;
  τ=y/.sol;
  T=α+τ;
  If[t>=T-0.5,Pause[15]];
   r1=ξ1+ξ2  τ-(γ τ2)/2;
  r2=ξ2-γ τ;
  Show[
   Plot[x,{x,0,200+5},PlotStyle→White,AxesStyle-
>{Directive[White,0],Black},ImageSize→800],
   Plot[0a-0.4,{a,-12,82},PlotStyle→Thick,Filling→-10],
   If[t≤τ,
    Graphics[{Blue,Disk[{37.5,ξ1+ξ2 t-(γ t2)/2+1.5},{0.8,1.5}]}],
    If[t>τ && t<T-0.7,
     {Graphics[{Blue,Disk[{37.5,r1+r2 δ- (γ δ2)/2+k δ+(k m0)/U (1-(U δ)/m0)
Log[1-(U δ)/m0]+1.5},{0.8,1.5}]//.δ->t-τ}],
      Graphics[{Red,Disk[{37.5,r1+r2 δ-( γ δ2)/2+k δ+(k m0)/U (1-(U δ)/m0)
Log[1-(U δ)/m0]-1.2},{0.9,3}]//.δ->t-τ}]},
     Graphics[{Blue,Disk[{37.5,r1+r2 δ- (γ δ2)/2+k δ+(k m0)/U (1-(U δ)/m0)
Log[1-(U δ)/m0]+1.5},{0.8,1.5}]//.δ->t-τ}]
     ]
    ]
   ],
  Delimiter,Style["Controlul",Bold,Medium],
  Delimiter,Style["Timpul (s)",Medium],
  {{t,0,"t->"},0,T},

  Delimiter,Style["Inaltimea initiala (km)",Medium],
  {{ξ1,h0,"ξ1->"},200,50},
  Delimiter,Style["Viteza initiala (km/s)",Medium],
  {{ξ2,v0,"ξ2->"},-0.05,0.1},
  Delimiter,Style["Masa initiala (kg)",Medium],
```

```
  {{m0,m0,"m₀->"},500,508},
   FrameLabel→
   Style[
    Dynamic[
     {
      {"(s) ->t"t},
      {"(km)->h"If[t≤τ,ξ1+ξ2  t-γ  t²/2,r1+r2  δ-  (γ  δ2)/2+k  δ+(k  m0)/U  (1-(U
δ)/m0) Log[1-(U δ)/m0]]//.δ->t-τ},
      {"(km/s)->v"If[t≤τ,ξ2-γ t,r2-γ δ-k Log[1-(U δ)/m0]]//.δ->t-τ},
      {"(kg)->m" If[t≤τ,m0,m0-U δ]//.δ→t-τ}
      }
     ],
    Bold
    ],ControlPlacement→Left
  ]
```

Rezultatele execuției programului se vizualizează pe ecran în următoarea formă.




Programul este util atât pentru studiul problemei inițiale, cât şi pentru efectuarea experimentelor cu date reale.

**Referințe:**

1. Ungureanu V.A. Programarea matematică. - Chişinău: CEP USM, 2001.
2. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации. - Москва: Наука, 1984.
3. Летов А.М. Математическая теория процессов управления. - Москва: Наука, 1981.
4. Ли Э. Б. Основы теории оптимального управления. - Москва: Наука, 1972.
5. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. - Москва: Наука, 1989.

*Prezentat la 02.11.2009*