ISSN 1857-2073

PROBABILITĂȚILE LIMITĂ DE TRANSFER ALE SISTEMELOR ALEATORII DISCRETE

Alexandru LAZARI

Catedra Matematica Aplicată

In this article we study discrete random systems with finite set of states. A polynomial time algorithm for determining the limit matrix of probabilities in Markov processes is proposed and grounded.

1. Formularea problemei

Considerăm un sistem aleator discret L. Mulțimea de stări posibile ale sistemului este $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, unde n este un număr natural finit. Trecerea sistemului din starea x_i în starea x_j se efectuează cu probabilitatea p_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, la orice moment discret de timp $t = 0, 1, 2, \dots$. Timpul de transfer direct dintr-o stare în alta este unitar.

Matricea $P = (p_{ij})_{i, j=\overline{1,n}}$ se numește matricea probabilităților de transfer a sistemului aleator L. Se observă că sistemul aleator L reprezintă un proces Markov discret.

Deoarece sistemul, sigur, va părăsi starea curentă și va trece într-o nouă stare (care, în particular, poate coincide cu cea curentă), la orice trecere sunt juste egalitățile

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,\ i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Faptul că $p_{i,j}$, $i, j = \overline{1, n}$, reprezintă probabilități, implică

$$0 \le p_{i,j} \le 1,\ i, j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Matricea P ce verifică proprietățile $(1)-(2)$ se numește *matrice stocastică*.

În continuare, vom nota $p_{i,j}(t)$ probabilitatea că sistemul aleator L se află în starea x_j la momentul de timp t, cu condiția că inițial sistemul se afla în starea x_i, $i, j = \overline{1, n}$, $t = 1, 2, \dots$. Matricea $P(t) = (p_{i,j}(t))_{i, j=\overline{1,n}}$ reprezintă matricea probabilităților de transfer în t unități de timp. Este cunoscută formula $P(t) = P^t, \forall t > 0$.

Dacă există probabilitățile limită

$$p_j^* = \lim_{t \to \infty} p_{i,j}(t),\ j = \overline{1, n},$$

ce nu depind de starea inițială x_i a sistemului aleator L, atunci sistemul se numește *ergodic* și probabilitățile limită p_j^*, $j = \overline{1, n}$, se determină ca soluție unică a sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} P^T p^* = p^* \\ \sum_{j=1}^{n} p_j^* = 1 \end{cases}, \tag{3}$$

unde P^T reprezintă transpusa matricei P și $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)^T$.

Dacă sistemul nu este ergodic, atunci sistemul de ecuații liniare (3) poate să nu posede soluție unică. Totuși, există valorile $p_{i,j}^*$, $i, j = \overline{1, n}$, care reprezintă probabilitățile limită de transfer ale sistemului dintr-o stare în alta. Altfel spus, valoarea $p_{i,j}^*$ reprezintă probabilitatea că peste o perioadă infinită de timp sistemul aleator L se va afla în starea x_j, știind că sistemul și-a demarat evoluția din starea x_i, $i, j = \overline{1, n}$.

Se pune problema determinării matricei $P^* = (p^*_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$.

2. Concepte de bază

Considerăm funcția $A_P : \mathbb{C} \to M_n(\mathbb{C})$, $A_P(z) = I_n - zP$, unde I_n este matricea unitate de dimensiune n. Fie $A_{P,ij}(z)$, $i,j = \overline{1,n}$, elementele matricei $A_P(z)$. Conform definiției funcției $A_P(z)$, avem $A_{P,ij}(z) = \delta_{ij} - zp_{ij} \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(A_{P,ij}(z)) \le 1$, $i,j = \overline{1,n}$, unde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & dacă\ i = j \\ 0, & dacă\ i \ne j \end{cases}$, $i,j = \overline{1,n}$, reprezintă simbolul Kronecker.

Notăm $\Delta_P(z) = \det(A_P(z))$. Din definiția determinantului și din cele menționate mai sus rezultă că $\Delta_P(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(\Delta_P(z)) \le n$.

Fie $D_P = \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta_P(z) \ne 0\}$. Avem $|\mathbb{C} \setminus D_P| \le \deg(\Delta_P(z)) \le n$. În plus, pentru $\forall z \in D_P$ matricea $A_P(z)$ este inversabilă.

Definim funcția $H_P : D_P \to M_n(\mathbb{C})$, $H_P(z) = (A_P(z))^{-1}$. Fie $H_{P,ij}(z)$, $i,j = \overline{1,n}$, elementele matricei $H_P(z)$. Conform metodei de inversare a matricelor, avem:

$$H_{P,ij}(z) = \frac{M_{P,ji}(z)}{\Delta_P(z)},\ i,j = \overline{1,n},$$

unde $M_{P,ij}(z) = (-1)^{i+j} R_{P,ij}(z)$, iar $R_{P,ij}(z)$ este matricea obținută din $A_P(z)$ prin eliminarea liniei i și coloanei j, $i,j = \overline{1,n}$. Deci, $M_{P,ji}(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(M_{P,ji}(z)) \le n-1$, $i,j = \overline{1,n}$.

Avem $\Delta_P(1) = \det(A_P(1)) = \det((A_{P,ij}(1))_{i,j=\overline{1,n}}) = \det((\delta_{ij} - p_{ij})_{i,j=\overline{1,n}})$. Deoarece $\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij} - p_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}\delta_{ij} - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \delta_{ii} - 1 = 0$, $i = \overline{1,n}$, rezultă că $\Delta_P(1) = 0$, adică $1 \in \mathbb{C} \setminus D_P$ și $\Delta_P(z) \vdots (z-1)$.

Notăm $m(z)$ − multiplicitatea rădăcinii z a polinomului $\Delta_P(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus D_P$. Deoarece $H_{P,ij}(z)$ este o fracție rațională cu numitorul $\Delta_P(z)$, atunci $H_{P,ij}(z)$ se descompune în mod unic sub forma:

$$H_{P,ij}(z) = Q_{ij}(z) + \sum_{y \in \mathbb{C}\setminus D_P} \sum_{k=1}^{m(y)} \frac{\alpha_{ijk}(y)}{(z-y)^k},\ i,j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

unde $\alpha_{ijk}(y) \in \mathbb{C}$, $\forall y \in \mathbb{C} \setminus D_P$, $k = \overline{1,m(y)}$, $i,j = \overline{1,n}$, iar polinomul $Q_{ij}(z) \in \mathbb{C}[z]$ are gradul $\deg(Q_{ij}(z)) = \deg(M_{P,ji}(z)) - \deg(\Delta_P(z))$, dacă $\deg(M_{P,ji}(z)) \ge \deg(\Delta_P(z))$, în caz contrar − $Q_{ij}(z) = 0$. Descompunerea obținută se transformă astfel:

$$H_{P,ij}(z) = Q_{ij}(z) + \sum_{y \in \mathbb{C}\setminus D_P} \sum_{k=1}^{m(y)} \frac{\left(-\frac{1}{y}\right)^k \alpha_{ijk}(y)}{\left(1 - \frac{1}{y}z\right)^k} = Q_{ij}(z) + \sum_{t=0}^{\infty} z^t \sum_{y \in \mathbb{C}\setminus D_P} \sum_{k=0}^{m(y)-1} \frac{t^k}{y^t} \beta_{ijk}(y) =$$

$$= W_{ij}(z) + \sum_{t=1+\deg(Q_{ij}(z))}^{\infty} z^t \sum_{y \in \mathbb{C}\setminus D_P} \sum_{k=0}^{m(y)-1} \frac{t^k}{y^t} \beta_{ijk}(y),\ i,j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

unde $\beta_{ijk}(y) \in \mathbb{C}$, $\forall y \in \mathbb{C} \setminus D_P$, $k = \overline{0, m(y)-1}$, $i, j = \overline{1,n}$, iar polinomul $W_{ij}(z) \in \mathbb{C}[z]$ are gradul $\deg(W_{ij}(z)) = \deg(Q_{ij}(z))$, $i, j = \overline{1,n}$.

Deoarece $\|P\| = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, atunci $\|zP\| = |z|\|P\| = |z|$. Fie $|z| < 1$.

Avem formula $H_P(z) = (I_n - zP)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} P^T z^t$, ceea ce implică:

$$H_{P,ij}(z) = \sum_{t=0}^{\infty} p_{ij}(t) z^t, \; i, j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Din relațiile $(5)-(6)$ şi din unicitatea funcției generatoare se obține:

$$p_{ij}(t) = \sum_{y \in \mathbb{C} \setminus D_P} \sum_{k=0}^{m(y)-1} \frac{t^k}{y^t} \beta_{ijk}(y), \forall t > \deg(Q_{ij}(z)), \; i, j = \overline{1,n}.$$

Deoarece $0 \le p_{ij}(t) \le 1$, $i, j = \overline{1,n}$, $\forall t \ge 0$, avem $|y| \ge 1$, $\forall y \in \mathbb{C} \setminus D_P$, $\beta_{ijk}(1) = 0$, $\forall k \ge 1$, ceea ce implică $\alpha_{ijk}(1) = 0$, $\forall k \ge 2$.

Fie $\Delta_P(z) = (z-1)^{m(1)} T_P(z)$. Relația (4) obține forma:

$$H_{P,ij}(z) = \frac{\alpha_{ij1}(1)}{z-1} + Q_{ij}(z) + \sum_{y \in (\mathbb{C} \setminus D_P) \setminus \{1\}} \sum_{k=1}^{m(y)} \frac{\alpha_{ijk}(y)}{(z-y)^k} = \frac{\alpha_{ij1}(1)}{z-1} + \frac{Y_{ij}(z)}{T_P(z)}, \; i, j = \overline{1,n},$$

unde $Y_{ij}(z) \in \mathbb{C}[z]$ şi

$$\deg(Y_{ij}(z)) = \deg(Q_{ij}(z)) + \deg(T_P(z)) = \deg(Q_{ij}(z)) + \deg(\Delta_P(z)) - m(1) =$$
$$= \deg(M_{P,ji}(z)) - m(1) \le n - 1 - m(1) \le n - 2, \; i, j = \overline{1,n}.$$

În continuare vom nota $Y(z) = (Y_{ij}(z))_{i,j=\overline{1,n}}$, $\alpha_1(1) = (\alpha_{ij1}(1))_{i,j=\overline{1,n}}$. Descompunerea matricei $H_P(z)$ obține forma:

$$H_P(z) = \frac{1}{z-1} \alpha_1(1) + \frac{1}{T_P(z)} Y(z). \tag{7}$$

În [1] s-a arătat că matricea probabilităților limită verifică relația:

$$P^* = -\alpha_1(1), \tag{8}$$

adică, matricea probabilităților limită este coeficientul de pe lângă $\frac{1}{1-z}$ în descompunerea dată mai sus a matricei $H_P(z) = (I_n - zP)^{-1}$. Din descompunerea (7) şi relația (8) se obține formula $P^* = \lim_{z \to 1} (1-z)(I_n - zP)^{-1}$ de determinare a matricei probabilităților limită P^*.

În continuare, se va construi un algoritm polinomial ce se va baza pe conceptele menționate mai sus.

3. Construcția algoritmului

3.1. Determinarea polinomului $\Delta_P(z)$

Considerăm polinomul caracteristic al matricei P, $K: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $K(z) = |P - zI_n| = \sum_{k=0}^{n} \nu_k z^k$. Coeficientul superior al polinomului $K(z)$ este $\nu_n = |-I_n| = (-1)^n \ne 0$. Deci, $\deg(K(z)) = n$ şi putem scrie polinomul $K(z)$ sub forma $K(z) = (-1)^n (z^n - \alpha_1 z^{n-1} - \alpha_2 z^{n-2} - \ldots - \alpha_n)$. Dacă vom nota $\alpha_0 = -1$, atunci cu uşurință se obține relația $\nu_k = (-1)^{n+1} \alpha_{n-k}$, $k = \overline{0,n}$.

În $[2,3]$ este indicată metoda lui Leverrier de determinare a coeficienților α_k, $k=\overline{1,n}$. Ea constă din următoarele etape:

1) Se determină matricele $P^k=(p_{ij}(k))_{i,j=\overline{1,n}}$, $k=\overline{1,n}$;
2) Se determină urmele acestor matrice: $s_k = tr\, P^k = \sum_{j=1}^{n} p_{jj}(k)$, $k=\overline{1,n}$;
3) Se determină coeficienții $\alpha_k = \frac{1}{k}\left(s_k - \sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j s_{k-j}\right)$, $k=\overline{1,n}$.

În continuare, vom determina coeficienții polinomului $\Delta_P(z)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k z^k$. Fie $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Vom avea următoarele transformări:

$$\Delta_P(z)=|I_n - zP| = (-z)^n\left|P-\frac{1}{z}I_n\right| = (-1)^n z^n K\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^n z^n \sum_{k=0}^{n}\nu_k\frac{1}{z^k} =$$

$$= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\nu_k z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\nu_{n-k}z^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n(-1)^{n+1}\alpha_k z^k = \sum_{k=0}^{n}(-\alpha_k)z^k.$$

Pentru $z=0$ avem $\Delta_P(0)=|I_n|=1=-\alpha_0=\sum_{k=0}^{n}(-\alpha_k)z^k$. Deci, $\Delta_P(z)=\sum_{k=0}^{n}(-\alpha_k)z^k$, $\forall z\in\mathbb{C}$. Obținem $\beta_k=-\alpha_k$, $k=\overline{0,n}$.

Determinăm formula recursivă pentru calculul coeficienților β_k, $k=\overline{0,n}$:

$$\beta_k = -\alpha_k = -\frac{1}{k}\left(s_k-\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j s_{k-j}\right) = -\frac{1}{k}\left(s_k+\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j s_{k-j}\right),\ k=\overline{1,n},\ \beta_0=-\alpha_0=1.$$

Algoritmul 1

Date de intrare: $P\in M_n(\mathbb{C})$;

Date de ieşire: β_k, $k=\overline{0,n}$, unde $\sum_{k=0}^{n}\beta_k z^k = \Delta_P(z)$;

1) Se determină matricele $P^k=(p_{ij}(k))_{i,j=\overline{1,n}}$, $k=\overline{1,n}$;

2) Se determină urmele acestor matrice: $s_k = tr\, P^k = \sum_{j=1}^{n} p_{jj}(k)$, $k=\overline{1,n}$;

3) *Se determină coeficienții:* $\beta_0=1$, $\beta_k = -\frac{1}{k}\left(s_k+\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j s_{k-j}\right)$, $k=\overline{1,n}$.

3.2. Determinarea matricei $H_P(z)$

Fie $\delta_P(z)=(z-1)T_P(z)$ şi $N=\deg(\delta_P(z))=n-(m(1)-1)$. După cum s-a arătat mai sus, matricea $H_P(z)$ poate fi scrisă sub forma $H_P(z)=\frac{1}{\delta_P(z)}\sum_{k=0}^{N-1}z^k x^{(k)}$, unde

$(z-1)^{m(1)-1}\sum_{k=0}^{N-1}z^k x_{ij}^{(k)} = M_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$. Vom avea $I_n=(I_n-zP)(I_n-zP)^{-1}$, ceea ce implică

$$\delta_P(z)I_n = (I_n - zP)\sum_{k=0}^{N-1}z^k x^{(k)} = \sum_{k=0}^{N-1}z^k x^{(k)} - \sum_{k=0}^{N-1}z^{k+1}(Px^{(k)}) =$$

$$= x^{(0)} + \sum_{k=1}^{N-1} z^k (x^{(k)} - Px^{(k-1)}) - z^n (Px^{(N-1)}) .$$

Fie $\delta_P(z) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k^* z^k$. Substituind în relația obținută anterior, obținem formulele de calcul ale matricelor $x^{(k)}$, $k = \overline{0, N-1}$:

$$x^{(0)} = \beta_0^* I_n , \; x^{(k)} = \beta_k^* I_n + Px^{(k-1)} , \; k = \overline{1, N-1} . \tag{9}$$

Deci, $H_P(z) = \left(\dfrac{V_{ij}(z)}{\delta_P(z)} \right)_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $V_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{ij}^{(k)} z^k , i, j = \overline{1, n}$.

3.3. Determinarea matricei P^*

Fie $T_P(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k z^k$, $Y(z) = \sum_{k=0}^{N-2} y^{(k)} z^k$, $y^* = \alpha_1(1)$. Conform relației (7), avem:

$$\frac{V_{ij}(z)}{\delta_P(z)} = H_{P,ij}(z) = \frac{y_{ij}^*}{z-1} + \frac{\sum_{k=0}^{N-2} y_{ij}^{(k)} z^k}{T_P(z)} , \; i, j = \overline{1, n} .$$

Obținem:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_{ij}^{(k)} z^k = V_{ij}(z) = y_{ij}^* T_P(z) + (z-1) \sum_{k=0}^{N-2} y_{ij}^{(k)} z^k =$$

$$= y_{ij}^* \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k z^k + \sum_{k=0}^{N-2} y_{ij}^{(k)} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{N-2} y_{ij}^{(k)} z^k = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k y_{ij}^* z^k + \sum_{k=1}^{N-1} y_{ij}^{(k-1)} z^k - \sum_{k=0}^{N-2} y_{ij}^{(k)} z^k =$$

$$= (\gamma_0 y_{ij}^* - y_{ij}^{(0)}) + \sum_{k=1}^{N-2} (\gamma_k y_{ij}^* + y_{ij}^{(k-1)} - y_{ij}^{(k)}) z^k + (\gamma_{N-1} y_{ij}^* + y_{ij}^{(N-2)}) z^{N-1}, \; i, j = \overline{1, n} .$$

Egalăm coeficienții de pe lângă puterile lui z . Obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(0)} = \gamma_0 y_{ij}^* - y_{ij}^{(0)}, \\ x_{ij}^{(k)} = \gamma_k y_{ij}^* + y_{ij}^{(k-1)} - y_{ij}^{(k)}, \; k = \overline{1, N-2}, \; i, j = \overline{1, n}, \\ x_{ij}^{(N-1)} = \gamma_{N-1} y_{ij}^* + y_{ij}^{(N-2)}, \end{cases}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} y_{ij}^{(0)} = \gamma_0 y_{ij}^* - x_{ij}^{(0)}, \\ y_{ij}^{(k)} = \gamma_k y_{ij}^* + y_{ij}^{(k-1)} - x_{ij}^{(k)}, \; k = \overline{1, N-2}, \; i, j = \overline{1, n}, \\ y_{ij}^{(N-2)} = -\gamma_{N-1} y_{ij}^* + x_{ij}^{(N-1)}. \end{cases}$$

Se observă că există coeficienții $u_{ij}^{(k)}, \; v_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}, \; k = \overline{0, N-2}, \; i, j = \overline{1, n}$, astfel încât

$$y_{ij}^{(k)} = u_{ij}^{(k)} y_{ij}^* + v_{ij}^{(k)}, \; k = \overline{0, N-2}, \; i, j = \overline{1, n} .$$

Din prima ecuație din sistem obținem $u_{ij}^{(0)} = \gamma_0, \; v_{ij}^{(0)} = -x_{ij}^{(0)}, \; i, j = \overline{1, n}$, iar din următoarele $N-2$ ecuații se obțin coeficienții $y_{ij}^{(k)}$, $k = \overline{1, N-2}, \; i, j = \overline{1, n}$:

$$y_{ij}^{(k)} = \gamma_k y_{ij}^* + y_{ij}^{(k-1)} - x_{ij}^{(k)} = \gamma_k y_{ij}^* + u_{ij}^{(k-1)} y_{ij}^* + v_{ij}^{(k-1)} - x_{ij}^{(k)} = (\gamma_k + u_{ij}^{(k-1)}) y_{ij}^* + (v_{ij}^{(k-1)} - x_{ij}^{(k)}) ,$$

ceea ce implică relațiile recurente

$$u_{ij}^{(k)} = u_{ij}^{(k-1)} + \gamma_k , \; v_{ij}^{(k)} = v_{ij}^{(k-1)} - x_{ij}^{(k)}, \; k = \overline{1, N-2}, \; i, j = \overline{1, n} .$$

Formulele directe de calcul al acestor coeficienți obțin forma:

$$u_{ij}^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \gamma_r \,,\; v_{ij}^{(k)} = -\sum_{r=0}^{k} x_{ij}^{(r)} \,,\; k = \overline{0, N-2},\; i, j = \overline{1, n} \,.$$

Substituind în ultima ecuație din sistem, se obține $u_{ij}^{(N-2)} y_{ij}^{*} + v_{ij}^{(N-2)} = -\gamma_{N-1} y_{ij}^{*} + x_{ij}^{(N-1)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; y_{ij}^{*} \sum_{r=0}^{N-1} \gamma_r = \sum_{r=0}^{N-1} x_{ij}^{(r)} \,,\; i, j = \overline{1, n} \;\Leftrightarrow\; y_{ij}^{*} = \frac{\sum_{r=0}^{N-1} x_{ij}^{(r)}}{\sum_{r=0}^{N-1} \gamma_r} = \frac{x_{ij}}{T_P(1)} \text{, unde } x_{ij} = \sum_{r=0}^{N-1} x_{ij}^{(r)} \,,\; i, j = \overline{1, n} \,.$$

Notând $X = (x_{ij})_{i, j = \overline{1, n}}$, se obține formula:

$$P^{*} = -\frac{1}{T_P(1)} X \,. \quad (10)$$

Am obținut următorul algoritm de determinare a matricei probabilităților limită P^{*}:

Algoritmul 2

Date de intrare: $P \in M_n(\mathbb{C})$;

Date de ieşire: $P^{*} \in M_n(\mathbb{C})$;

1) *Se determină coeficienții polinomului* $\Delta_P(z) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k z^k$ *aplicând Algoritmul 1;*
2) *Utilizând schema Horner, se divizează de* $m(1)$ *ori polinomul* $\Delta_P(z)$ *la* $z-1$*, obținând în final polinomul* $T_P(z)$ *ce verifică* $T_P(1) \neq 0$*. Totodată, se păstrează şi coeficienții* β_k^{*}*,* $k = \overline{0, N}$*, ai polinomului* $(z-1)T_P(z)$ *obținut după penultima divizare;*
3) *Se determină valoarea* $T_P(1)$*;*
4) *Se determină matricele* $x^{(k)}$*,* $k = \overline{0, N-1}$*, conform formulei* (9)*;*
5) *Se calculează matricea* $X = \sum_{k=0}^{N-1} x^{(k)}$*;*
6) *Se determină matricea* P^{*} *conform formulei* (10)*;*

Complexitatea acestui algoritm este $O(n^4)$.

Referințe:

1. Howard R.A. Dynamic Programming and Markov Processes, Wiley, 1960.
2. Helmberg G., Veltkamp G. On Faddeev–Leverrier's method for the computation of the characteristic polynomial of a matrix and of eigenvectors // Linear Algebra and its Applications. - 1993. - No185. - P.219-233.
3. Pațiuc V., Râbacova G., Secrieru I., Zolotarevschi V. Metode numerice în probleme diferențiale, integrale şi de valori proprii. - Chişinău, 2001.

Prezentat la 30.09.2009