CURBURI ÎN SPAȚII FINSLER

Otilia LUNGU

Universitatea „Vasile Alecsandri" din Bacău (România)

The aim of this paper is to expose some curvature properties of the Finsler spaces.

1. Preliminarii

Considerăm dată o varietate reală diferențiabilă *M*, de dimensiune *n* şi (TM, τ, M) fibratul tangent al lui *M*. Într-o hartă locală (U, x^i) pe *M*, un vector tangent $y \in T_x M$, $x \in M$ are forma $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$.

O metrică Finsler pe *M* este o funcție pozitivă $F : TM \to R_+$ cu proprietățile:

i) *F* este de clasă C^∞ pe $\tilde{TM} = TM - \{0\}$ şi continuă pe $TM - \tilde{TM}$;

ii) *F* este pozitiv omogenă de gradul I în raport cu *y*:

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y),\ \lambda > 0; \tag{1.1}$$

iii) $\forall (x, y) \in \tilde{TM}$ forma biliniară simetrică $g_{ij}(x, y)$ este pozitivă şi nedegenerată, unde

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}. \tag{1.2}$$

Perechea $F^n = (M, F)$ se numeşte *spațiu Finsler*, iar forma biliniară $g_{ij}(x, y)$ se numeşte *tensor fundamental al spațiului Finsler*.

Funcțiile reale

$$N^i_j(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^i_{00}}{\partial y^j}, \tag{1.3}$$

cu $\gamma^i_{00} = \gamma^i_{jk}(x, y) y^j y^k$, sunt coeficienții unei conexiuni neliniare care depinde numai de funcția fundamentală $F(x, y)$ a spațiului Finsler F^n, numită *conexiune neliniară Cartan.*

Conexiunea metrică Cartan $C\Gamma = (N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk})$ are tensorii de curbură dați de relațiile

$$\begin{aligned} R_h{}^i{}_{jk} &= \frac{\delta F^i_{hj}}{\delta x^k} - \frac{\delta F^i_{hk}}{\delta x^j} + F^i_{sk} F^s_{hj} - F^i_{sj} F^s_{hk} + C^i_{hs} R^s_{jk} \\ P_h{}^i{}_{jk} &= \frac{\partial F^i_{hj}}{\partial y^k} - C^i_{hk|j} + C_h{}^i{}_s P^s_{jk} \\ S_h{}^i{}_{jk} &= \frac{\partial C^i_{hj}}{\partial y^k} - \frac{\partial C^i_{hk}}{\partial y^j} + C^s_{hj} C^i_{sk} - C^s_{hk} C^i_{sj}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Conexiunea Berwald $B\Gamma\left(N^i_j, \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}, 0\right)$ are tensorul hh-curbură

$$H^i_{hjk} = R^i_{hjk} - C^i_{hr} R^r_{jk} + \left\{P^i_{hj|k} + P^i_{kr} P^r_{jh} - P^i_{hk|j} - P^i_{jr} P^r_{kh}\right\}. \tag{1.5}$$

Tensorii de curbură ai conexiunii Chern-Rund $CR\Gamma\left(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i\right)$ sunt

$$\begin{aligned} K_{jkl}^i &= \frac{\delta F_{jl}^i}{\delta x^k} - \frac{\delta F_{jk}^i}{\delta x^l} + F_{hk}^i F_{jl}^h - F_{hl}^i F_{jk}^h \\ P_{jkl}^i &= \frac{\partial F_{jk}^i}{\partial y^l} \\ S_{jkl}^i &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

iar tensorul hh-curbură I_{hjk}^i corespunzător conexiunii Hashiguchi $H\Gamma\left(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i\right)$ este

$$I_{hjk}^i = R_{hjk}^i + \left\{P_{jh|k}^i + P_{kr}^i P_{jh}^r - P_{kh|j}^i - P_{jr}^i P_{kh}^r\right\}. \tag{1.7}$$

Pentru un plan tangent $P \subset T_x M$ şi un vector $y \in P$, definim curbura flag $K = K(P, y)$ prin expresia

$$K(P, y) = \frac{g_y\left(R_y(v), v\right)}{g_y(y, y) g_y(v, v) - \left(g_y(y, v)\right)^2}, \tag{1.8}$$

unde $P = span\{y, v\}$.

Spunem că o metrică Finsler este de curbură scalară dacă pentru orice $y \in T_x M$ curbura flag $K = K(x, y)$ este o funcție scalară (independentă de planul *P*). Dacă K = *constant*, atunci spunem că *F* este de curbură flag constantă.

Fie un spațiu Finsler F^n cu conexiunea Berwald sau Hashiguchi. Tensorul Σ dat de

$$\Sigma_{hijk} = H_{hijk} + H_{ihjk} + 2C_{hir} R_{jk}^r \tag{1.9}$$

se numeşte *tensor de curbură stretch* al spațiului F^n.

2. Spații Finsler cu proprietatea de egalitate a tensorilor de curbură

În [4] Shibata dă următoarea caracterizare

Teorema 2.1 Dacă un spațiu Finsler F^n, $n \geq 3$ are curbură scalară nenulă şi tensorul său de curbură stretch Σ este identic nul, atunci F^n este un spațiu Riemann de curbură constantă.

Folosind acest rezultat, putem enunța [3]:

Teorema 2.2 Dacă într-un spațiu Finsler $F^n = (M, F)$ de curbură scalară, tensorul h-curbură al conexiunii Chern-Rund $CR\Gamma$ este egal cu tensorul h-curbură al conexiunii Berwald $B\Gamma$, atunci F^n este un spațiu Riemann de curbură constantă.

Demonstrație: Din egalitatea celor doi tensori de curbură se obține că

$$P_{hj|k}^i + P_{kr}^i P_{jh}^r - P_{hk|j}^i - P_{jr}^i P_{kh}^r = 0.$$

Prin urmare, avem:

$$P_{kr}^i P_{jh}^r - P_{jr}^i P_{kh}^r = 0 \text{ şi } P_{hj|k}^i - P_{hk|j}^i = 0.$$

Ultima relație conduce la concluzia că tensorul stretch se anulează, deci, conform Teoremei 2.1, spațiul F^n este un spațiu Riemann de curbură constantă.

Cu o demonstrație similară se obține

Teorema 2.3 Dacă $F^n = (M, F)$ este un spațiu Finsler de curbură scalară şi tensorii h-curbură corespunzători conexiunilor Cartan şi Hashiguchi sunt egali, atunci F^n este un spațiu Riemann de curbură constantă.

Teorema 2.4 Dacă $F^n = (M, F)$ este un spațiu Finsler de curbură scalară $K(x, y)$ şi tensorii h-curbură corespunzători conexiunilor Berwald şi Hashiguchi sunt egali, atunci F^n este un spațiu Riemann de curbură constantă.

Demonstrație: Din egalitatea celor doi tensori de curbură se obține că

$$C^i_{hr} R^r_{jk} = 0$$

şi, cum F^n este de curbură scalară, rezultă:

$$\left(Kl_j + \frac{1}{3}K_j\right)C_{hik} - \left(Kl_k + \frac{1}{3}K_k\right)C_{hij} = 0.$$

Prin urmare,

$$KC_{hik} = 0 \text{ şi } K_j C_{hik} - K_k C_{hij} = 0.$$

De aici avem că $C_{hik} = 0$, adică F^n este un spațiu Riemann de curbură constantă.

În concluzie putem enunța

Teorema 2.5 Fie $F^n = (M, F)$ un spațiu Finsler de curbură scalară $K(x, y)$. Dacă tensorul hh-curbură al conexiunii Chern-Rund $CR\Gamma$ este egal cu tensorul hh-curbură al conexiunii Berwald $B\Gamma$, sau dacă tensorii hh-curbură corespunzători conexiunilor Cartan şi Hashiguchi sunt egali, sau dacă tensorii hh-curbură corespunzători conexiunilor Berwald şi Hashiguchi sunt egali, atunci F^n este un spațiu Einstein.

Demonstrația este imediată ținându-se seama de rezultatele din teoremele 2.2, 2.3, 2.4 şi de faptul că dacă un spațiu Riemann este de curbură constantă, atunci este spațiu Einstein.

3. O caracterizare a spațiilor Einstein generalizate de curbură constantă

Considerăm în cele ce urmează o metrică Finsler *F*, pentru care $R_{ij} = (n-1)\lambda(x, y)g_{ij}$, unde $\lambda(x, y)$ este o funcție scalară pe $TM - \{0\}$.Vom numi o astfel de metrică *metrică Einstein* generalizată, iar spațiul $F^n = (M, F)$ il vom numi *spațiu Einstein generalizat.*

Teorema 3.1 [2] Dacă $F^n = (M, F), n \geq 4$, este un spațiu Finsler de curbură scalară *K* cu *F* o metrică Einstein generalizată, pentru care $R_{ij} = (n-1)\lambda(x, y)g_{ij}$, atunci $\lambda(x, y)$ este constantă şi F^n este de curbură flag constantă, $K = \lambda$.

Demonstrație: Pentru conexiunea Cartan are loc următoarea identitate de tip Bianchi:

$$R^h_{kij} = \frac{\partial R^h_{ij}}{\partial y^k} + R^r_{ij} C^h_{rk} + \left\{L^h_{ir} L^r_{jk} + L^h_{jk|i} - (i/j)\right\},$$

unde am folosit notația $L^i_{jk} = P^i_{0jk}$.

Rezultă

$$R_{ki} = \frac{\partial R^r_{ir}}{\partial y^k} + R^r_{is} C^s_{rk} + \left\{L^s_{ir} L^r_{sk} + L^r_{ik|r} - I_{r|0} L^r_{ik} + I_{k|0|i}\right\}.$$

Dacă F^n este de curbură scalară $K(x, y)$, din Teorema 2.1 avem:

$$R_{ikl} = K(x, y)h_{ikl} + \frac{1}{3}\left(h_{ik}K_{;l} - h_{il}K_{;k}\right),$$

sau, echivalent

$$R^i_{jk} = h^i_k\left(\frac{1}{3}F^2 K_{;j} + Ky^j\right) - h^i_j\left(\frac{1}{3}F^2 K_{;k} + Ky^k\right).$$

De aici

$$R^r_{ir} = \frac{1}{3}(n-2)F^2 \frac{\partial K}{\partial y^i} + (n-1)Ky^i$$

şi

$$\frac{\partial R^r_{ir}}{\partial y^k} = \frac{2}{3}(n-2)F\frac{\partial F}{\partial y^k}\frac{\partial F}{\partial y^i} + \frac{1}{3}(n-2)F^2\frac{\partial^2 K}{\partial y^i \partial y^k} + (n-1)\frac{\partial K}{\partial y^k}y_i + (n-1)Kg_{ik}.$$

În plus,

$$R^r_{is}C^s_{rk} = \frac{1}{3}F^2\left(I_k\frac{\partial K}{\partial y^i} - C^r_{ik}\frac{\partial K}{\partial y^r}\right) + KI_k y_i.$$

Înlocuim (3.14) şi (3.15) în (3.12):

$$R_{ki} - (n-1)Kg_{ik} = \frac{2}{3}(n-2)\frac{\partial K}{\partial y^i}y_k + \frac{1}{3}(n-2)F^2\frac{\partial^2 K}{\partial y^i \partial y^k} + (n-1)\frac{\partial K}{\partial y^k}y_i$$
$$+\frac{1}{3}F^2\left(I_k\frac{\partial K}{\partial y^i} - C^r_{ik}\frac{\partial K}{\partial y^r}\right) + KI_k y_i$$
$$+\left\{L^s_{ir}L^r_{sk} + L^r_{ik|r} - I_{r|0}L^r_{ik} + I_{k|0|i}\right\}$$

Contractăm (3.16) cu y^i şi y^k şi găsim:

$$\left\{R_{ki} - (n-1)Kg_{ik}\right\}y^i y^k = 0.$$

Însă, avem:

$$R_{ij} = (n-1)\lambda(x,y)g_{ij}.$$

Rezultă că $\lambda = K$.
În plus,

$$\frac{1}{3}(n-2)F^2\frac{\partial K}{\partial y^i} = 0$$

implică $\frac{\partial K}{\partial y^i} = 0$, deci *K* este constantă.

Este cunoscut [1] următorul rezultat:

Teorema 3.2 Fie (M,F) o varietate Finsler conexă şi compactă de curbură flag constantă λ.

i) Dacă $\lambda < 0$, atunci (M,F) este Riemanniană.

ii) Dacă $\lambda = 0$, atunci (M,F) este local Minkowski.

Din Teoremele 3.1 şi 3.2 obținem următoarea concluzie:

Teorema 3.3 Fie (M,F) o varietate Finsler n-dimensională $(n \geq 4)$, conexă şi compactă. Presupunem că (M,F) are curbură flag scalară şi *F* este o metrică Einstein generalizată, pentru care $R_{ij} = (n-1)\lambda(x,y)g_{ij}$.

i) Dacă $\lambda(x,y) < 0$, atunci (M,F) este varietate Riemanniană.

ii) Dacă $\lambda(x,y) = 0$, atunci (M,F) este local Minkowski.

Referințe:

1. Akbar H–Zadeh. Sur les espaces de Finsler a courbures sectionnelles constants // Bull. Acad. Roy. Bel. Cl, sci, 5e Serie-Tome LXXXIV, 1988, p.281-322.
2. Yang G., Cheng X. On Generalized Einstein Metrics in Finsler Geometry // Publ. Math. Debrecen, 2009, no.74/1-2, p.1-15.
3. Sinha B.B., Matharoo A.S. On the Equality of Tensors in Special Finsler Spaces // Indian J. Pure Appl. Math, 1986, no.17(3), p.308-317 .
4. Shibata C. On the Curvature Tensor R_{hijk} of the Finsler Spaces of Scalar Curvature // Tensor, 1978, N.S., 32, p.311-317.

Prezentat la 23.02.2010