CÂTEVA PROPRIETĂȚI ALE UNUI SPAȚIU RANDERS CUARTIC

Otilia LUNGU
Universitatea „Vasile Alecsandri" din Bacău (România)

It is well known that a Randers metric is a deformation of a Riemannian metric $\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ using a 1-form $\beta(x,y)=b_i(x)y^i$. In this paper we consider a deformation of a 4-th root metric (or a quartic metric) using the same 1-form $\beta(x,y)$. We call it a Randers quartic metric and we studie some of its properties.

1. Preliminarii

Fie M o varietate reală diferențiabilă, de dimensiune n şi (TM,τ,M) fibratul tangent al lui M. Într-o hartă locală (U,x^i) pe M, un vector tangent $y\in T_xM$, $x\in M$ are forma $y=y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}|_x$.

O metrică Finsler pe M este o funcție pozitivă $F:TM\to R_+$ cu proprietățile:

i) F este de clasă C^∞ pe $\tilde{TM}=TM-\{0\}$ şi continuă pe $TM-\tilde{TM}$;
ii) F este pozitiv omogenă de gradul I în raport cu y:

$$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y),\ \lambda>0\,; \tag{1.1}$$

iii) $\forall(x,y)\in\tilde{TM}$ forma biliniară simetrică $g_{ij}(x,y)$ este pozitivă şi nedegenerată, unde

$$g_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2}{\partial y^i\partial y^j}. \tag{1.2}$$

Perechea $F^n=(M,F)$ se numeşte *spațiu Finsler*, iar forma biliniară $g_{ij}(x,y)$ se numeşte *tensor fundamental al spațiului Finsler*.

Dacă $F(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$, unde $\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ este o metrică Riemanniană şi $\beta(x,y)=b_i(x)y^i$ este o 1-formă, atunci spațiul $F^n=(M,F=\alpha+\beta)$ se numeşte *spațiu Randers*.

Câmpurile tensoriale

$$C_{ijk}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}=\frac{1}{4}\frac{\partial^3F^2}{\partial y^i\partial y^j\partial y^k} \tag{1.3}$$

sunt componentele tensorului Cartan al spațiului Finsler, iar

$$h_{ij}=F\frac{\partial^2F}{\partial y^i\partial y^j}=g_{ij}-l_il_j\,, \tag{1.4}$$

se numeşte *metrica unghiulară a spațiului* F^n, unde $l_i=\dfrac{\partial F}{\partial y^i}$.

Pentru un vector $y=y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}|_x$ F induce un produs scalar g_y pe T_xM după cum urmează:

$$g_y(u,v)=g_{ij}(x,y)u^iv^j\,, \tag{1.5}$$

unde $u = u^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$ şi $v = v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$.

Un spray pe varietatea *M* este un câmp vectorial pe TM de forma

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{1.6}$$

unde $G^i = G^i(x,y)$ sunt funcții pozitive, omogene de grad doi în raport cu *y*:

$$G^i(x,\lambda y) = \lambda^2 G^i(x,y),\ \lambda > 0. \tag{1.7}$$

Orice metrică Finsler *F* induce un spray după relația

$$G^i(x,y) = \frac{1}{4} g^{il} \left\{ \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^m \partial y^l} y^m - \frac{\partial F^2}{\partial x^l} \right\}. \tag{1.8}$$

Curbura Riemann $R_y = R^i_k \dfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k$ este definită prin

$$R^i_k = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^m \partial y^k} y^m + 2G^m \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^m \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^m}\frac{\partial G^i}{\partial y^k} \tag{1.9}$$

şi notăm $R_{jk} = g_{ij} R^i_k$.

Pentru un plan tangent $P \subset T_x M$ şi un vector $y \in P$, definim curbura flag $K = K(P,y)$ prin expresia

$$K(P,y) = \frac{g_y(R_y(v),v)}{g_y(y,y)g_y(v,v) - (g_y(y,v))^2}, \tag{1.10}$$

unde $P = span\{y,v\}$.

Spunem că o metrică Finsler este de curbură scalară dacă pentru orice $y \in T_x M$ curbura flag $K = K(x,y)$ este o funcție scalară (*independentă de planul P*). Dacă $K = constant$, atunci spunem că *F* este de curbură flag constantă.

Teorema 1.1 [2] Un spațiu Finsler este de curbură scalară dacă şi numai dacă are loc una din următoarele relații

$$R_{ij} = F^2 K(x,y) h_{ij}; \tag{1.11}$$

$$R_{ijk} = h_{ik} K_j - h_{ij} K_k,\ K_j = \frac{1}{3} F^2 \frac{\partial K}{\partial y^j} + FKl_j. \tag{1.12}$$

2. Spațiu Finsler cuartic

Considerăm un spațiu Finsler $F^n = (M,F)$ care are metrica *F* de forma

$$F(x,y) = \sqrt[4]{a_{hijk}(x) y^h y^i y^j y^k}, \tag{2.1}$$

unde $a_{hijk}(x)$ sunt componentele unui câmp tensorial simetric de tip (0,4).

Numim acest spațiu *spațiu Finsler cuartic* şi îl notăm QF^n.

Pentru uşurința exprimării, vom nota de asemeni:

$$\begin{aligned} a_{hijk}(x) y^h &= F a_{ijk}(x,y); \\ a_{hijk}(x) y^h y^i &= F^2 a_{jk}(x,y); \\ a_{hijk}(x) y^h y^i y^j &= F^3 a_k(x,y). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Avem

$$l_i = a_i \tag{2.3}$$

şi

$$h_{ij} = 3\left(a_{ij} - a_i a_j\right). \tag{2.4}$$

Tensorul fundamental al spațiului QF^n este

$$g_{ij} = 3a_{ij} - 2a_i a_j. \tag{2.5}$$

Dacă notăm $g^{ij} = \left(g_{ij}\right)^{-1}$, atunci

$$g^{ij} = \frac{1}{3}\left(a^{ij} + 2a^i a^j\right), \tag{2.6}$$

unde $a^{ij} = \left(a_{ij}\right)^{-1}$ şi $a^i = a^{ir} a_r$.

Simbolii lui Cristoffel generalizați corespunzători metricii (2.1) sunt

$$\Gamma^s_{hijk} = \frac{1}{6} a^{sp}\left(\frac{\partial a_{ijkp}}{\partial x^h} + \frac{\partial a_{jkph}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{kphi}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{iphj}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{hijk}}{\partial x^p}\right), \tag{2.7}$$

iar componentele tensorului Cartan sunt

$$C_{ijk} = \frac{3}{F}\left(a_{ijk} - a_{ij}a_k - a_{jk}a_i - a_{ki}a_j + 2a_i a_j a_k\right). \tag{2.8}$$

Ținând seama de (2.5), avem

$$F^2 = g_{ij} y^i y^j = 3a_{ij} y^i y^j - 2a_i y^i a_j y^j. \tag{2.9}$$

Cum însă

$$a_i y^i = \frac{1}{F^3} a_{ijkh} y^j y^k y^h y^i = \frac{1}{F^3} F^4 = F,$$

rezultă că

$$F^2 = 3a_{ij} y^i y^j - 2F^2,$$

adică

$$F^2 = a_{ij} y^i y^j. \tag{2.10}$$

Din acest motiv, construim o conexiune Finsler [2], bazată pe a_{ij}, în locul tensorului fundamental g_{ij}.

Teorema 2.1 [2]. Într-un spațiu Finsler cuartic QF^n există o conexiune unică

$$C\Gamma = \left(G^i_j, F^i_{jk}, U^i_{jk}\right)$$

determinată de următoarele axiome:

a) $\nabla^h a_{ij} = 0$ ($C\Gamma$ este h-metrică);

b) $\nabla^v a_{ij} = 0$ ($C\Gamma$ este v-metrică);

c) $T^i_{jk} = F^i_{jk} - F^i_{kj} = 0$ ($C\Gamma$ este h-simetrică);

d) $S^i_{jk} = U^i_{jk} - U^i_{kj} = 0$ ($C\Gamma$ este v-simetrică);

e) $D^i_j = y^i\big|_j = 0$.

În plus, coeficienții săi sunt:

$$U^i_{jk} = C^i_{jk} + \frac{2}{3F}\left(a_{jk} - a_j a_k\right)a^i \tag{2.11}$$

şi

$$F_{jk}^{i}=a^{is}\left[f_{sjk}-\frac{1}{F}\left(G_{k}^{i}\left(a_{jsi}-a_{js}a_{i}\right)+G_{j}^{i}\left(a_{skj}-a_{sk}a_{j}\right)-G_{S}^{i}\left(a_{kjs}-a_{kj}a_{s}\right)\right)\right], \tag{2.12}$$

unde

$$f_{sjk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^{s}}-\frac{\partial a_{ks}}{\partial x^{j}}\right). \tag{2.13}$$

Este evident că dacă G_{j}^{i} sunt cunoscute, atunci se pot calcula şi F_{jk}^{i}.

Determinăm în cele ce urmează G_{j}^{i}.

Din (2.12) avem

$$a_{jr}F_{ik}^{r}=f_{ijk}-\frac{1}{F}\left[\left(a_{ijr}-a_{ij}a_{r}\right)G_{k}^{r}+\left(a_{jkr}-a_{jk}a_{r}\right)G_{i}^{r}-\left(a_{kir}-a_{ki}a_{r}\right)G_{j}^{r}\right]. \tag{2.14}$$

Înmulţind această expresie cu y^{k}, obţinem:

$$a_{jr}G_{i}^{r}=f_{ij0}-\frac{2}{F}\left[\left(a_{ijr}-a_{ij}a_{r}\right)G^{r}+\left(a_{jr}-a_{j}a_{r}\right)G_{i}^{r}-\left(a_{ir}-a_{i}a_{r}\right)G_{j}^{r}\right]. \tag{2.15}$$

Dacă înmulţim (2.15) cu y^{j}, rezultă

$$Fa_{r}G_{i}^{r}=f_{i00}, \tag{2.16}$$

sau, echivalent,

$$2Fa_{r}G^{r}=f_{000}. \tag{2.17}$$

Înmulţim acum (2.15) cu y^{i}, şi obţinem

$$6a_{jr}G^{r}=f_{0r0}+4a_{j}a_{r}G^{r}. \tag{2.18}$$

Înlocuind (2.17) în (2.18), rezultă

$$G^{r}=\frac{1}{6}a^{jr}f_{0r0}+\frac{f_{000}a^{r}}{3F}. \tag{2.19}$$

3. Spaţiu Finsler cuartic de curbură scalară

Teorema 3.1 Un spaţiu Finsler cuartic $QF^{n}=\left(M,F\right)$ cu $n\geq 3$ şi F de forma (2.1) este de curbură scalară dacă şi numai dacă are loc una din următoarele relaţii:

$$R_{ij}=3F^{2}K\left(x,y\right)\left(a_{ij}-a_{i}a_{j}\right); \tag{3.1}$$

$$R_{ijh}=3\left(a_{ih}K_{j}-a_{ij}K_{h}\right)-3a_{i}\left(a_{h}K_{j}-a_{j}K_{h}\right). \tag{3.2}$$

Demonstraţie: Înlocuim (2.4) în (1.11) şi (1.12) şi rezultă imediat concluzia.
Este evident că mulţimea metricelor cuartice conţine şi metricele Riemanniene.

Demonstrăm următoarea teoremă:

Teorema 3.2 Dacă un spaţiu Finsler cuartic $QF^{n}=\left(M,F\right)$ cu $n\geq 3$ şi F de forma (2.1) este de curbură scalară $K\left(x,y\right)$, atunci el este spaţiu Riemann de curbură constantă.

Demonstraţie: Din relaţiile (2.8) şi (3.2) rezultă

$$C_{hjm}R_{ki}^{m}+C_{jmk}R_{hi}^{m}+C_{kmh}R_{ji}^{m}=0.$$

Înmulțim aceasta cu y^h şi obținem

$$C_{0jm}R_{ki}^m + C_{jmk}R_i^m + C_{km0}R_{ji}^m = 0.$$

Avem însă că $C_{0jm} = C_{km0} = 0$. Rezultă

$$C_{jmk}R_i^m = 0,$$

sau

$$C_{jmk}R_{is} = 0.$$

Înlocuim (3.1) în această relație şi găsim că $C_{jmk} = 0$, deci QF^n este spațiu Riemann. În plus, QF^n are curbură scalară şi, conform lemei lui Schur, rezultă că QF^n are curbură constantă.

4. Spațiu Randers cuartic

Fie un spațiu Finsler cuartic $QF^n = (M, F)$ cu funcția fundamentală *F* data de (2.1) şi o 1-formă $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ pe TM.

Construim funcția

$$\tilde{F}(x, y) = F(x, y) + \beta(x, y),\ \forall (x, y) \in TM. \tag{4.1}$$

Presupunem că $\tilde{F} > 0$ pe o mulțime deschisă $U \subset TM - \{0\}$.

Spațiul $RQF^n = \left(M, \tilde{F}\right)$ îl vom numi *spațiu Randers cuartic*.

Avem

$$\tilde{l}_i = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^i} = a_i + b_i. \tag{4.2}$$

Cu notația

$$p = \frac{\tilde{F}}{F} = 1 + \frac{\beta}{F} \tag{4.3}$$

calculăm metrica unghiulară a spațiului RQF^n

$$\tilde{h}_{ij} = ph_{ij} = 3p\left(a_{ij} - a_i a_j\right) \tag{4.4}$$

şi apoi tensorul fundamental $\tilde{g}_{ij}$.

Propoziția 4.1 Câmpul tensorial $\tilde{g}_{ij}$ corespunzător funcției $\tilde{F}$ dintr-un spațiu Randers cuartic RQF^n este dat de

$$\tilde{g}_{ij} = pg_{ij} + b_i b_j + (1-p)a_i a_j + a_i b_j + a_j b_i, \tag{4.5}$$

sau, echivalent,

$$\tilde{g}_{ij} = \left(pg_{ij} + \tilde{l}_i \tilde{l}_j\right) - pa_i a_j \tag{4.6}$$

Demonstrație:
Din definiția tensorului fundamental al unui spațiu Finsler avem

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{F}^2}{\partial y^i \partial y^j} = \tilde{F}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^i}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^j}.$$

Ținând seama de relațiile (4.1)-(4.4), rezultă

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= ph_{ij} + \tilde{l}_i \tilde{l}_j \\ &= 3p\left(a_{ij} - a_i a_j\right) + \left(a_i + b_i\right)\left(a_j + b_j\right) \\ &= p\left(3a_{ij} - 2a_i a_j\right) - (p-1)a_i a_j + b_i b_j + a_i b_j + a_j b_i \\ &= pg_{ij} + (1-p)a_i a_j + b_i b_j + a_i b_j + a_j b_i.\end{aligned}$$

Prin calcul direct se obține

Propoziția 4.2 Câmpul tensorial contravariant $\tilde{g}^{ij} = \left(\tilde{g}_{ij}\right)^{-1}$ este de forma

$$\tilde{g}^{ij} = \frac{1}{p}g^{ij} + \frac{1}{p}\left(b^i a^j + b^j a^i\right) - \frac{\tilde{F}b^2(p-1) - \beta^2 p}{p\beta}a^i a^j, \tag{4.7}$$

unde $b^2 = g^{ij}b_i b_j$, $b^i = g^{ij}b_j$, $a^i = g^{ij}a_j$.

Propoziția 4.3 Într-un spațiu Randers cuartic RQF^n componentele tensorului Cartan $\tilde{C}_{ijk}$ sunt date de expresia

$$\tilde{C}_{ijk} = pC_{ijk} + \frac{1}{F^2}\alpha_{ijk} - \frac{2}{F}(p-1)h_{jk}a_i + \frac{2}{F}h_{kj}b_i, \tag{4.8}$$

unde $\alpha_{ijk} = \left(b_k F - \beta a_k\right)\left(g_{ij} - a_i a_j\right) + \left(b_j F - \beta a_j\right)\left(g_{ik} - a_i a_k\right) - \left(b_i F - \beta a_i\right)\left(g_{jk} - a_j a_k\right).$ (4.9)

Ținând seama de Teorema 1.1 precum şi de relația (4.4), obținem imediat

Propoziția 4.4 Un spațiu Randers cuartic RQF^n este de curbură scalară $\tilde{K}(x,y)$ dacă şi numai dacă are loc una din relațiile

$$\tilde{R}_{ij} = 3\frac{(F+\beta)^3}{F}\tilde{K}\left(a_{ij} - a_i a_j\right); \tag{4.10}$$

$$\tilde{R}_{ijk} = 3p\left[\left(a_{ik}\tilde{K}_j - a_{ij}\tilde{K}_k\right) - a_i\left(a_k \tilde{K}_j - a_j \tilde{K}_k\right)\right]. \tag{4.11}$$

Teorema 4.1 Fie $QF^n = (M,F)$ un spațiu Finsler cuartic de curbură sclară $K(x,y)$. Un spațiu Randers cuartic $RQF^n = \left(M, \tilde{F} = F + \beta\right)$ are aceeaşi curbură scalară $K(x,y)$ dacă şi numai dacă

$$\tilde{R}_{ij} = p\left(1 + 2\beta F^{-1} + \beta^2 F^{-2}\right)R_{ij}. \tag{4.12}$$

Demonstrație: Spațiul $RQF^n = \left(M, \tilde{F} = F + \beta \right)$ are curbura scalară $K(x,y)$ dacă şi numai dacă

$$\tilde{R}_{ij} = \tilde{F}^2 K \tilde{h}_{ij} \ ,$$

sau, echivalent,

$$\tilde{R}_{ij} = \left(F^2 + 2F\beta + \beta^2\right) Kp\, h_{ij} \ .$$

Ținem seama aici de faptul că spațiul $QF^n = (M, F)$ are curbura scalară K . Înlocuim (3.1) în expresia de mai sus şi gasim (4.12).

Referințe:

1. Lee I.Y, Jun D.G. Some Properties on Finsler Spaces with a Quartic Metric // Journal of the Chungcheong Math. Soc., 1999, vol.12, p.23-31.
2. Matsumoto M. Finsler Geometry in the 20-th Century. - In: Antonelli P.L. (ed), Handbook of Finsler Geometry, Kluwer Academic Publishers 2003, vol.I and II, p.557-966.
3. Miron R. General Randers Spaces. Lagrange and Finsler Geometry. Kluwer Academic Publishers, 1997, p.123-140.

Prezentat la 05.10.2009