STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2010, nr.2(32)

ASUPRA REZOLVABILITĂȚII UNOR ECUAȚII INTEGRALE SINGULARE COMPLETE

Vasile NEAGU, Oxana PALADI, Ion PANCENCO*, Galina VORNICESCU*

Catedra Analiză Matematică şi Ecuații Diferențiale
**Universitatea de Stat din Tiraspol*

In this paper the decision problem for singular integral equations with perturbed compact operators is studied.

În această lucrare este abordată problema rezolvării unor ecuații integrale singulare care conțin termeni compacți. Fiecărui operator A, determinat de partea stângă a ecuației date, conform unei reguli descrise în această lucrare, i se pune în corespondență un operator matriceal $\widetilde{A}$ cu proprietatea că ambii operatori A şi $\widetilde{A}$ sunt sau nu sunt inversabili în spațiile respective. Astfel, rezolvabilitatea ecuației date se reduce la o problemă similară pentru un sistem de ecuații, care se dovedeşte a fi un sistem de ecuații integrale singulare „*obişnuite*”, fără termeni compacți. Sistemul de ecuații integrale singulare obținut se rezolvă prin metoda factorizării coeficienților, elaborată în [1]. Metoda expusă în această lucrare se bazează pe rezultatele lucrării lui I.Gohberg şi N.Krupnik [2] şi ea poate fi aplicată la rezolvarea diferitelor clase de ecuații funcționale cu operatori compuşi, care se încadrează în schema generală elaborată în [2].

1. Rezolvarea unor ecuații integrale singulare perturbate

Notăm prin $L(B)$ algebra Banach generată de operatorii liniari şi continui, definiți pe spațiul Banach B cu valori în B, iar prin $GL(\mathsf{B})$ grupul de operatori inversabili în $L(B)$. Pentru început vom formula următorul rezultat [2].

Teorema 1.1. *Fie* $A_{ij} \in L(B)$ $j-1,2,...,n; i=1,2,...,N$ *şi*

$$A=\sum_{j=1}^{n} A_{j1}A_{j2}...A_{jN} \quad , \tag{1.1}$$

atunci are loc următoarea relație:

$$\begin{Vmatrix} Z & X \\ Y & O \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I_{n(N+1)} & 0 \\ H & I \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_{n(N+1)} & 0 \\ 0 & A \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Z & X \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \tag{1.2}$$

unde Z *este matricea pătrată de ordinul* $n(N+1)$,

$$Z=\begin{Vmatrix} I_n & B_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & I_n & B_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & B_N \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & I_n \end{Vmatrix},$$

I_1 *este operatorul unitate definit în spațiul* $\boldsymbol{B}^n$,

$$B_J=\begin{Vmatrix} A_{1j} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & A_{2j} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & A_{nj} \end{Vmatrix},$$

$I = I_1$, *şi* X, Y, H *sunt, respectiv, operatorii:*

$$X = \left\| \begin{matrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ -I \\ . \\ . \\ . \\ -I \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{matrix}}\right\} nN \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} -I \\ . \\ . \\ . \\ -I \end{matrix}}\right\} n \end{matrix}, \quad Y = \left\| \underbrace{I,...,I,}_{n} \underbrace{0,0,...,0}_{nN} \right\|.$$

$$H = \left\| M_0, M_1, ..., M_N \right\|, \quad M_0 = \left\| \underbrace{I,...,I}_{n} \right\|, \; M_j = \left\| A_{11}\, A_{12}...A_{1j}, A_{21}A_{22}...A_{2j}, ..., A_{n1}A_{n2}...A_{nj} \right\| \; (j = 1, ..., N).$$

Demonstrația este evidentă.

Corolarul 1.1. *Operatorul* $A = \sum_{j=1}^{n} A_{j1}A_{j2}...A_{jN}$ *este inversabil în spațiul* B *dacă şi numai dacă operatorul*

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} Z & X \\ Y & O \end{matrix} \right\| \tag{1.3}$$

este inversabil în spațiul $\mathsf{B}^{n(N+1)+1}$.

Corolarul 1.2. *Fie* $A_0, B_k, C_k \in L(\mathsf{B})$ $(k = 1, ..., n)$ şi

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} I & 0 & ... & 0 & C_1 \\ 0 & I & ... & 0 & C_2 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & I & C_n \\ B_1 & B_2 & ... & .B_n & A_0 \end{matrix} \right\| . \tag{1.4}$$

În aceste condiții are loc următoarea implicație:

$$\widetilde{A} \in GL(\boldsymbol{B}^{n+1}) \Leftrightarrow A = A_0 - \sum_{k=1}^{n} B_k C_k \in GL(\boldsymbol{B}).$$

Într-adevăr, mai întâi să remarcăm că este adevărată următoarea egalitate:

$$A_0 - \sum_{k=1}^{n} B_k C_k = \det \widetilde{A}.$$

Prin calcule directe se verifică următoarea relație:

$$\left\| \begin{matrix} I & 0 ... 0 & C_1 \\ 0 & I ... 0 & C_2 \\ . & . \; ... \; . & . \\ 0 & 0 ... I & C_n \\ B_1 & B_2 ... B_n & A_0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} I & 0 ... 0 & 0 \\ 0 & I ... 0 & 0 \\ . & . \; ... \; . & . \\ 0 & 0 ... I & 0 \\ B_1 & B_2 ... B_n & I \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} I & 0 ... & 0 & C_1 \\ 0 & I ... & 0 & C_2 \\ . & . \; ... & . & . \\ 0 & 0 ... & I & C_n \\ 0 & 0 \; ... & 0 & A_0 - \Delta \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} I & 0 ... 0 & C_1 \\ 0 & I ... 0 & C_2 \\ . & . \; ... \; . & . \\ 0 & 0 ... I & C_n \\ 0 & 0 \; ... \; 0 & I \end{matrix} \right\|, \tag{1.5}$$

unde $\Delta = \sum_{m=1}^{n} B_m C_m$. Aşa cum factorii extremi din partea dreaptă a egalității (1.5) sunt operatori inversabili în $\boldsymbol{B}^{n+1}$, atunci $\widetilde{A} \in GL(\boldsymbol{B}^{n+1}) \Leftrightarrow A_0 - \Delta \in GL(\boldsymbol{B})$.

Corolarul 1.3. *Dacă vectorul* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1})(\in \boldsymbol{B}^{n+1})$ *este o soluție a ecuației* $\widetilde{A}\varphi = \widetilde{\psi}$ *cu partea dreaptă* $\widetilde{\psi} = (0,0,\ldots 0,\psi)$*, atunci* $A\varphi_{n+1} = \psi$ *. Adică, coordonata de pe locul* $n+1$ *a soluției ecuației* $\widetilde{A}\varphi = \widetilde{\psi}$ *cu* $\widetilde{\psi} = (0,0,\ldots 0,\psi)$ *este soluție a ecuației* $Af = \psi$ *. În plus, aceste soluții epuizează toate soluțiile ecuației* $Af = \psi$ *.*

Într-adevăr, în baza egalității (1.4), ecuația $\widetilde{A}\varphi = \widetilde{\psi}$ este echivalentă cu sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \varphi_1 + C_1\varphi_{n+1} = 0 \\ \varphi_2 + C_2\varphi_{n+1} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n + C_n\varphi_{n+1} = 0 \\ \qquad A\varphi_{n+1} = \psi \end{cases} \tag{1.6}$$

De aici rezultă afirmația corolarului 3.

Vom aplica teorema 1.1 şi corolarul 1.3 la rezolvarea unor ecuații integrale singulare perturbate cu operatori compacți. Astfel de ecuații se mai numesc *ecuații integrale singulare complete* (*a se vedea* [3]). Este cunoscut faptul că ecuațiile integrale singulare pot fi rezolvate în cazuri destul de rare. Această problemă este şi mai complicată (*a se vedea* [1]) în cazul sistemelor de ecuații singulare şi este legată cu problema factorizării matricelor de funcții şi cu rezolvarea problemei corespunzătoare de tip Riemann. Ținând seama de aceste considerente, vom studia ecuații care se reduc la sisteme de ecuații, ai căror coeficienți pot fi factorizați în mod efectiv.

Fie $\Gamma = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$. În spațiul $\boldsymbol{B} = \mathrm{L_p}(\Gamma)$ $(p > 1)$ considerăm ecuația

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\tau^3 - t^3}{(\tau - t)^2}\varphi(\tau)d\tau = \psi(t) \ . \tag{1.7}$$

Părții stângi a egalității (1.7) îi corespunde un operator A, care poate fi scris sub forma:

$$(A\varphi)(t) = \frac{3t^2}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + (T\varphi)(t) \ ,$$

unde

$$(T\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (\tau + 2t)\varphi(\tau)\,d\tau \ .$$

Operatorul T este compact în $L_p(\Gamma)$, fiind un operator integral cu nucleul continuu. În cazul studiului proprietăților noetheriene şi indicelui operatorului A operatorul T poate fi neglijat, adică operatorul T nu influențează proprietățile noetheriene ale operatorului A. Aceasta însă nu mai are loc in cazul problemei inversabilității operatorului A sau rezolvării ecuației $A\varphi = \psi$. Fie

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (\tau - t)^{-1}\varphi(\tau)d\tau \ , \quad (B\varphi)(t) = t\varphi(t) \ , \tag{1.8}$$

atunci operatorul A poate fi transcris sub forma:

$$A = SB^2 + BSB + B^2S \ ,$$

iar respectivul operator $\widetilde{A}$, definit de egalitatea (1.3), pentru operatorul A are forma:

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} I & 0 & B^2 \\ 0 & I & B \\ -S & -BS & B^2S \end{Vmatrix} \cdot$$

În virtutea corolarului 3, orice soluție a ecuației (1.7) poate fi obținută ca ultima coordonată, φ_3, a soluției ecuației $\widetilde{A}\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi}$ $(\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \widetilde{\psi} = (0,0,\psi))$. Operatorul $\widetilde{A}$ reprezintă un operator integral singular cu coeficienți matriceali:

$$\widetilde{A}=\left\|\begin{array}{ccc}1&0&t^2\\0&1&t\\-1&-t&t^2\end{array}\right\|P+\left\|\begin{array}{ccc}1&0&t^2\\0&1&t\\1&t&-t^2\end{array}\right\|Q=\left\|\begin{array}{ccc}1&0&t^2\\0&1&t\\1&t&-t^2\end{array}\right\|\left(\frac{1}{3}\left\|\begin{array}{ccc}1&-2t&2t^2\\-2/t&1&2t\\2/t^2&2/t&1\end{array}\right\|P+Q\right),$$

unde $P=\frac{1}{2}diag(I+S)$ şi $Q=\frac{1}{2}diag(I-S)$. Pentru inversarea operatorilor de forma $H=aP+bQ$, unde a şi b sunt matrice de funcţii continue cu condiţiile $\det a\neq 0$, $\det b\neq 0$, este necesar (*a se vedea* [1]) de a factoriza matricea $c=b^{-1}a$. Aceasta înseamnă că c se reprezintă sub forma

$$c=c_-\cdot diag(t^{\kappa_1},t^{\kappa_2},...,t^{\kappa_n})\cdot c_+,$$

unde c_+ (c_-) sunt matrice de funcţii cu elemente analitice în domeniile $F^+=\{z\,|\,|z|<1\}$ $(F^-=\{z\,|\,|z|>1\})$, iar $\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n$ sunt numere întregi, numite *indici parţiali ai operatorului* H. În funcţie de numerele $\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n$, operatorul H este inversabil, inversabil la stânga sau la dreapta. În particular, dacă toate numerele $\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n$ sunt pozitive, atunci operatorul H este inversabil la stânga, dacă toate sunt negative, atunci H este inversabil la dreapta şi, în sfârşit, dacă toate sunt egale cu zero, atunci H este inversabil. Vom aplica aceste rezultate pentru inversarea operatorului $\widetilde{A}$. Coeficientul pe lângă P din operatorul $\widetilde{A}$ este o matrice care poate fi factorizată:

$$\frac{1}{3}\left\|\begin{array}{ccc}1&-2t&2t^2\\-2/t&1&2t\\2/t^2&2/t&1\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{ccc}1&0&0\\-2/t&1&0\\2/t^2&-2/t&1\end{array}\right\|\left\|\begin{array}{ccc}1/3&-2t/3&2t^2/3\\0&-1&2t\\0&0&3\end{array}\right\|=c_-\cdot c_+.$$

Aşa cum indicii parţiali în această factorizare sunt egali cu zero, atunci operatorul $\widetilde{A}$ este inversabil în $\boldsymbol{B}^3$ şi inversul său este determinat de relaţia:

$$\widetilde{A}^{-1}=\left(\left\|\begin{array}{ccc}1/3&-2t/3&2t^2/3\\0&-1&2t\\0&0&3\end{array}\right\|^{-1}P+\left\|\begin{array}{ccc}1&0&0\\-2t^{-1}&1&0\\2t^{-2}&-2t^{-1}&1\end{array}\right\|Q\right)\left\|\begin{array}{ccc}1&0&0\\-2t^{-1}&1&0\\2t^{-2}&-2t^{-1}&1\end{array}\right\|^{-1}\left\|\begin{array}{ccc}1&0&t^2\\0&1&t\\1&t&t^2\end{array}\right\|=$$

$$=\left(\left\|\begin{array}{ccc}3&-2t&2t^2/3\\0&-1&2t/3\\0&0&1/3\end{array}\right\|P+\left\|\begin{array}{ccc}1&0&0\\-2t^{-1}&1&0\\2t^{-2}&-2t^{-1}&1\end{array}\right\|Q\right)\left\|\begin{array}{ccc}2/3&-t/3&1/3\\t^{-1}&0&t^{-1}\\t^{-2}&t^{-1}&t^{-2}\end{array}\right\|$$

Conform schemei din colorarul 1.3, pentru inversarea operatorului A obţinem:

$$\widetilde{A}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\psi\end{pmatrix}=\left\|\begin{array}{ccc}3P+Q&-2tP&\frac{2t^2}{3}P\\-\frac{2}{t}Q&-P+Q&\frac{2t}{3}P\\\frac{2}{t^2}Q&-\frac{2}{t}Q&\frac{1}{3}P+Q\end{array}\right\|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\psi\\\frac{1}{t}\psi\\\frac{1}{t^2}\psi\end{pmatrix},$$

prin urmare,

$$A^{-1}\psi=\left\|\begin{array}{ccc}\frac{2}{t^2}Q&-\frac{2}{t}Q&\frac{1}{3}P+Q\end{array}\right\|\begin{pmatrix}3^{-1}\psi\\t^{-1}\psi\\t^{-2}\psi\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{3}SB^{-2}+B^{-1}SB-\frac{1}{3}B^{-2}S\right)\psi\cdot$$

Aşadar, ecuaţia (1.7) este univoc rezolvabilă şi soluţia ei se determină din relaţia:

$$\varphi(t)=\frac{1}{3\pi i}\int_{\Gamma}\frac{3\tau^3t-\tau^2-t^2}{\tau^2t^2(\tau-t)}\psi(\tau)d\tau. \quad (1.9)$$

Mai considerăm şi următoarele două ecuații:

$$\frac{t^2+1}{t}\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tau t-1}{\tau(\tau-t)}\varphi(\tau)d\tau=\psi(t) \tag{1.10}$$

şi

$$\frac{t^2+1}{t}f(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1-\tau t}{\tau(\tau-t)}f(\tau)d\tau=\psi(t)\ . \tag{1.11}$$

Notăm prin A şi C operatorii determinați de relațiile (1.10) şi, respectiv, (1.11). Se verifică uşor că şi în aceste cazuri operatorii A şi C diferă de operatorii integrali singulari caracteristici printr-un termen compact, adică ecuațiile (1.10) şi (1.11) reprezintă ecuații integrale singulare complete. Folosind notațiile (1.8) de la exemplul precedent, operatorii A şi C pot fi scrişi sub forma:

$$A=B+B^{-1}+BS-SB^{-1},$$
$$C=B+B^{-1}+SB^{-1}-BS\ .$$

Aşa cum $S^{\bullet}=S$ şi $B^{\bullet}=B^{-1}$, obținem $C=A^{*}$. Atunci, în calitate de operatori $\widetilde{A}$ şi $\widetilde{C}$, care figurează în corolarul 1.2, pot fi luați următorii operatori:

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix} I & B^{-1} \\ S & B+B^{-1}+BS \end{Vmatrix},\qquad \widetilde{C}=\begin{Vmatrix} I & B^{-1} \\ -S & B+B^{-1}-BS \end{Vmatrix}\ .$$

Operatorii $\widetilde{A}$ şi $\widetilde{C}$ (ca şi în cazul ecuației precedente) reprezintă operatori integrali singulari caracteristici cu coeficienți matriceali:

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix} 1 & t^{-1} \\ -1 & t^{-1} \end{Vmatrix}\left(\begin{Vmatrix} 0 & -t \\ t & 1+t^2 \end{Vmatrix}P+Q\right),\quad \widetilde{C}=\begin{Vmatrix} 1 & t^{-1} \\ 1 & 2t+t^{-1} \end{Vmatrix}\left(\begin{Vmatrix} 1+t^{-2} & t^{-1} \\ -t^{-1} & 0 \end{Vmatrix}P+Q\right).$$

Însă, spre deosebire de cazul precedent, coeficienții matriceali ai operatorului P au indici parțiali diferiți de zero. În cazul operatorului $\widetilde{A}$ indicele este egal cu 2, iar în cazul operatorului $\widetilde{C}$ el este egal cu -2. Aceasta rezultă din factorizarea coeficientului operatorului P:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -t \\ t & 1+t^2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -t^{-1} & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{Vmatrix},\qquad \begin{Vmatrix} 1+t^{-2} & t^{-1} \\ -t^{-1} & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} t^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{Vmatrix}.$$

În virtutea rezultatelor referitoare la sisteme de ecuații integrale singulare (*a se vedea* [1]), operatorul $\widetilde{A}$ este inversabil la stânga, $\dim\ker\widetilde{A}=0$ şi $\dim co\ker\widetilde{A}=2$, iar $\widetilde{C}$ este inversabil la dreapta, $\dim\ker\widetilde{C}=2$ şi $\dim co\ker\widetilde{C}=0$. De aici, în baza teoremei 1.1, rezultă că operatorul A este inversabil la stânga, iar C este inversabil la dreapta. Soluția generală a ecuației $\widetilde{C}\varphi=0$ are forma (*a se vedea* [1]):

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(1-t^{-1}-t^{-2})\\ \beta(1-t+t^{-1})\end{pmatrix},$$

iar soluția particulară

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ (t^2P+Q)t^{-1}\psi(t)\end{pmatrix}.$$

Aşadar, ecuația (1.11) este rezolvabilă pentru orice parte dreaptă şi soluția ei generală are forma:

$$f(t)=\beta(1-t+t^{-1})+\frac{t^2+1}{2t}\psi(t)+\frac{t^2-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)},$$

unde $\beta\in\mathbb{C}$. Ecuația (1.10) este rezolvabilă nu pentru orice parte dreaptă. Se demonstrează că operatorul C ($C^{*}=A$) este inversabil la stânga, deci, este şi normal rezolvabil. Prin urmare, ecuația $C\varphi=\psi$ este rezolvabilă dacă şi numai dacă partea dreaptă ψ este ortogonală la soluțiile ecuației $C\varphi=0$, adică

$$\int_{\Gamma}(1-t+t^{-1})\psi(t)dt=0\ . \tag{1.12}$$

Dacă această condiție este verificată, atunci ecuația (1.10) are o singură soluție, care se determină din formula:

$$\varphi(t) = \frac{t+1}{4t}\psi(t) + \frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tau + t + \tau t - \tau^2 t}{\tau^2 t(\tau - t)}\psi(\tau)d\tau. \quad (1.13)$$

Această soluție se obține folosind schema dată de corolarul 1.2 și de corolarul 1.3. La detalii nu ne oprim aici.

2. Condiții de inversabilitate a operatorilor singulari în $L_p(R,\rho)$

Notăm prin $CP(\overline{R})$ mulțimea tuturor funcțiilor a continue la stânga pe axa reală R, care posedă un număr finit, $t_1, t_2, ..., t_n$, de puncte de discontinuitate de genul întâi pe R și limite finite $a(+\infty)$ și $a(-\infty)$. Prin $L_p(R,\rho)$ notăm spațiul L_p pe axa reală cu ponderea

$$\rho(t) = (1+t^2)^{\beta/2}\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k},$$

unde $t_1, t_2, ..., t_n \in R$, $-1 < \beta_k < p-1$, $1 < p < \infty$ și

$$-1 < \sum_{k=1}^{n}\beta_k + \beta < p-1.$$

Fie $a \in CP(\overline{R})$ și $a_{p,\rho}(t,\mu)$ (*a se vedea* [2]) funcția definită pe mulțimea $\overline{R}\times[0,1]$ prin relația

$$a_{p,\rho}(t,\mu) = a(t+0)f(t,\mu) + a(t-0)(1-f(t,\mu)) \quad \textit{pentru} \quad t \in R,\ 0 \le \mu \le 1 \ \textit{și}$$

$$a_{p,\rho}(\infty,\mu) = a(-\infty)f_\delta(\mu) + a(+\infty)(1-f_\delta(\mu)) \quad (0 \le \mu \le 1),$$

unde $\delta = 2\pi(p-1-\beta-\sum_{k=1}^{n}\beta_k)/p$, iar funcțiile $f(t,\mu)$ și $f_\delta(\mu)$ sunt definite de egalitățile (*a se vedea* [4]):

$$f(t,\mu) = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta\mu}{\sin\theta}\exp(i\theta(\mu-1)) \ (\theta = \pi - \delta(t)) & \textit{pentru} \ \ 0 < \delta(t) < 2\pi, \delta(t) \ne \pi, \\ \mu & \textit{pentru} \ \ \delta(t) = \pi, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\delta(t) = \frac{2\pi(1+\beta(t))}{p}, \ \ \beta(t) = \begin{cases} \beta_k, \textit{pentru} & t = t_k, \\ 0, \ \textit{pentru} & t \ne t_k. \end{cases} \ \textit{și} \ \ f_\delta(\mu) = f(\infty,\mu), \ \ \delta = \delta(\infty).$$

Mulțimea valorilor funcției $a_{p,\rho}(t,\mu)$ este închisă și este alcătuită din mulțimea valorilor funcției $a(t)$ în reuniune cu o mulțime de arce de cerc (sau segmente de dreaptă) care unesc punctele $a(t_k+0)$ cu $a(t_k-0)$ și $a(-\infty)$ cu $a(+\infty)$. Dacă $a_{p,\rho}(t,\mu) \ne 0$, atunci funcția $a(t)$ se numește $\{p,\rho\}$ nesingulară, iar numărul de rotații ale curbei $a_{p,\rho}(t,\mu)$ în jurul punctului $z=0$ se numește *indicele funcției* $a(t)$ și se notează prin $ind a_{p,\rho}$.

În spațiul $L_p(R,\rho)$ considerăm ecuația integrală singulară

$$(A\varphi)(t) \equiv c(t)\varphi(t) + \frac{d(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t) \quad c(t), d(t) \in CP(R). \quad (2.2)$$

Dacă introducem notațiile $a = c + d$, $b = c - d$, $P = \frac{1}{2}(I+S)$, $Q = \frac{1}{2}(I-S)$, unde

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad (2.3)$$

atunci operatorul A, definit de partea stângă de egalitatea (2.2), se transcrie în felul următor:

$$A = aP + bQ. \quad (2.4)$$

Teorema 2.1. *Operatorul A este inversabil, inversabil la stânga sau la dreapta, dacă și numai dacă funcțiile a și b verifică condițiile*

$$\begin{aligned} &a(t+0)b(t)f(t,\mu)+a(t)b(t+0)(1-f(t,\mu))\neq 0 \quad (t\in R,\ \ 0\le\mu\le 1),\\ &a(-\infty)b(+\infty)f_\delta(\mu)+a(+\infty)b(-\infty)(1-f_\delta(\mu))\neq 0\ ,\ (0\le\mu\le 1). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Fie condițiile (2.5) îndeplinite și $\kappa = inda_{p,\rho}$, *atunci pentru* $\kappa \ge 0$ *operatorul* A *este inversabil la stânga, pentru* $\kappa \le 0$ *operatorul* A *este inversabil la dreapta. Dacă* $\kappa < 0$, *atunci* $\dim KerA = -\kappa$, *dacă* $\kappa > 0$, *atunci* $\dim Co\ker A = \kappa$.

Vom aplica teorema 2.1 pentru a stabili condițiile de inversabilitate pentru operatorul

$$(S_+\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\ t\in R^+ \tag{2.6}$$

în spațiul $L_p(R^+)$. Această problemă este echivalentă cu problema inversabilității în spațiul $L_p(R)$ al operatorului $A = aP + Q$, unde $a(t) = -1$ pentru $t > 0$ și $a(t) = 1$ pentru $t < 0$. Aplicăm condițiile (2.5). Prima condiție înseamnă că $2f(0,\mu)-1\neq 0$. Așa cum $f(0,\mu) = f_{2\pi/p}(\mu)$, atunci mulțimea valorilor funcției $2f(0,\mu)-1$ reprezintă un arc de cerc (pentru $p\neq 2$) sau un segment de dreaptă (pentru $p = 2$) care unește punctele -1 și 1. De aici rezultă că $2f(0,\mu)-1\neq 0$ pentru $p\neq 2$ și $2f(0,\frac{1}{2})-1 = 0$ pentru $p = 2$. Prin urmare, prima condiție din teorema 2.1 este verificată, dacă și numai dacă $p\neq 2$. Așadar, operatorul S_+ este inversabil la stânga sau la dreapta, dacă și numai dacă $p\neq 2$.

Teorema 2.1 poate fi aplicată și la determinarea spectrului operatorului S_+ în spațiul $L_p(R^+, t^\beta)$, $(-1<\beta<p-1)$. Inversabilitatea operatorului $S_+ - \lambda I$ în spațiul $L_p(R^+, t^\beta)$ este echivalentă cu inversabilitatea în spațiul $L_p(R, |t|^\beta)$ a operatorului $A = aP + bQ$, unde:

$$a(t) = \begin{cases} 1-\lambda, & pentru\ t>0,\\ 1, & pentru\ t<0,\end{cases} \qquad b(t) = \begin{cases} -1-\lambda, & pentru\ t>0,\\ 1, & pentru\ t<0\end{cases}.$$

Vom determina toate valorile parametrului λ pentru care condițiile (2.5) din teorema 2.1 nu sunt îndeplinite. Pentru $0<t<+\infty$ aceasta înseamnă că $(1-\lambda)(1+\lambda) = 0;$ pentru $t = 0$ obținem curba $\lambda = 2f(0,\mu)-1$, iar pentru $t=\infty$ curba $\lambda = 1-2f_\delta(\mu)$. Așa cum $\delta = 2\pi - 2\pi(1+\beta)/p = 2\pi - \delta(0)$, rezultă că aceste două curbe coincid. Așadar, condițiile (2.5) din teorema 2.1 nu sunt verificate numai pentru $\lambda\in l(-1,1;\ 2\pi(1+\beta)/p)$. Deoarece complementara G a acestei curbe este o mulțime conexă și în baza teoremei 2.1 operatorul A este inversabil la stânga sau la dreapta pentru toate valorile $\lambda\in G$, atunci operatorul A este inversabil pentru toate valorile $\lambda\in G$. În concluzie obținem: *spectrul operatorului* S_+ *în spațiul* $L_p(R^+, t^\beta)$ *coincide cu curba* $l(-1,1;\ 2\pi(1+\beta)/p)$.

3. Inversabilitatea operatorului integral singular cu nucleu Cauchy în $L_p(R^+, t^\beta)$

În spațiul $L_p(R, |t|^\beta)$ considerăm operatorul integral singular $A = cI + dS$, unde

$$c(t) = \begin{cases} c_1, & pentru \quad -\infty<t<0,\\ c_2, & pentru \quad 0<t<+\infty,\end{cases} \quad d(t) = \begin{cases} d_1, & pentru \quad -\infty<t<0,\\ d_2, & pentru \quad 0<t<+\infty,\end{cases} \quad (c_1,c_2,d_1,d_2\in \mathbb{C}).$$

Cu ajutorul relațiilor (2.5) ușor se determină că operatorul A este inversabil, dacă și numai dacă arcul (sau segmentul) $l((c_2+d_2)(c_1-d_1),(c_1+d_1)(c_2-d_2);\ 2\pi(1+\beta)/p)$ nu trece prin punctul $z = 0$. Dacă acest arc trece prin punctul $z = 0$, atunci operatorul A nu este normal rezolvabil. În cazul în care operatorul A este inversabil, se poate stabili o formulă pentru A^{-1}. În acest scop vom descrie o metodă de inversare, bazată pe transformări integrale.

Fie $\nu : L_p\left(\Gamma_\alpha, |t|^\beta\right) \to L_p\left(R^+, x^\beta\right) + L_p\left(R^+, x^\beta\right)$ aplicația definită de egalitatea

$$(\nu\varphi)(x) = (\varphi(x), \varphi(-x)) \ (x \geq 0).$$

Operatorul $\nu A \nu^{-1}$ în spațiul $L_p^2\left(R^+, x^\beta\right)$ poate fi scris sub formă de matrice de operatori:

$$\nu A \nu^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}, \tag{3.1}$$

unde $A_{ij} \in L\left(L_p\left(R^+, x^\beta\right)\right)$. Să determinăm forma explicită a operatorilor A_{ij}. Fie $\varphi \in L_p\left(\Gamma_\alpha, |t|^\beta\right)$ şi $A\varphi = \psi$. Ultima egalitate poate fi scrisă sub forma:

$$c_2\varphi(t) + \frac{d_2}{\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{d_2}{\pi i}\int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \psi(t),\ (t > 0),$$

$$c_1\varphi(t) + \frac{d_1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}d\tau + \frac{d_1}{\pi i}\int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}d\tau = \psi(-t), (t > 0).$$

Cu ajutorul operatorilor

$$(S_+\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\ t \in R^+\ ,\quad (N\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}d\tau$$

egalitățile de mai sus pot fi transcrise sub forma

$$\begin{cases} c_2\varphi_1 + d_2 S_+\varphi_1 - d_2 N\varphi_2 = \psi_1 \\ d_1 N\varphi_1 + c_1 S\varphi_2 - d_1 S_+\varphi_2 = \psi_2 \end{cases},$$

unde $\psi_1 = \psi(t)$, $\psi_2 = \psi(-t)$ $(t \geq 0)$. Astfel,

$$\nu A \nu^{-1} = \begin{pmatrix} c_2 I + d_2 S_+ & -d_2 N \\ c_1 N & c_1 I - d_1 S_+ \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

În cele ce urmează, fie $W : L_p\left(R^+, t^\beta\right) \to L_p\left(R^+, t^{-1}\right)$ operatorul, definit prin relația

$$(W\varphi)(t) = t^\gamma \varphi(t)\ \left(\gamma = \frac{1+\beta}{p}\right),$$

atunci

$$\|W\varphi\|^p_{L_p\left(R^+, t^{-1}\right)} = \int_0^\infty \left|t^\gamma\varphi(t)\right|^p t^{-1}dt = \int_0^\infty |\varphi(t)|^p t^\beta dt = \|\varphi\|^p_{L_p\left(R^+, t^\beta\right)}.$$

Aşadar, operatorul W transformă izometric spațiul $L_p\left(R^+, t^\beta\right)$ pe spațiul $L_p\left(R^+, t^{-1}\right)$. Vom calcula WS_+W^{-1} şi WNW^{-1}. Avem:

$$\left(WS_+W^{-1}\varphi\right)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi(\tau)t^\gamma}{(\tau - t)t^\gamma}d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \varphi(\tau)\frac{\left(t\tau^{-1}\right)^\gamma}{1 - t\tau^{-1}}\frac{d\tau}{\tau}, \tag{3.3}$$

$$\left(WNW^{-1}\varphi\right)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi(\tau)t^\gamma}{(\tau + t)\tau^\gamma}d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \varphi(\tau)\frac{\left(t\tau^{-1}\right)^\gamma}{1 + t\tau^{-1}}\frac{d\tau}{\tau}. \tag{3.4}$$

Dacă concepem semiaxa pozitivă R^+ ca un grup abelian (în raport cu operația de multiplicare) cu măsura Haar $\frac{d\tau}{\tau}$ ([6] p.133), atunci integralele din partea dreaptă a egalităților (3.3) şi (3.4) reprezintă convoluțiile:

$$\left(WS_+W^{-1}\psi\right)(t) = \frac{1}{\pi i}\frac{t^\gamma}{1 - t} * \quad \psi(t),\ \left(WNW^{-1}\psi\right)(t) = \frac{1}{\pi i}\frac{t^\gamma}{1 + t} * \quad \psi(t).$$

Fie F transformata Fourier pe grupul R^+ (*a se vedea* [6], capitolul IV)

$$(F\psi)(\xi) = \int_0^\infty \psi(t)\, e^{-i\xi} \frac{dt}{t} \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

Menționăm că în cazul grupului multiplicativ rolul transformatei Fourier îl are transformata Mellin. Notăm cu $s(\xi)$, $n(\xi)$ şi $m(\xi)$, respectiv, transformatele Fourier ale funcțiilor $\frac{1}{\pi i}\frac{t^\gamma}{1-t}$ şi $\frac{1}{\pi i}\frac{t^\gamma}{1+}$ şi cu H operatorul $H = FW\nu$. Atunci operatorul HAH^{-1} reprezintă un operator de multiplicare la matricea de funcții

$$\begin{pmatrix} c_2 + d_2 s(\xi) & -d_2 m(\xi) \\ d_1 n(\xi) & c_1 - d_1 s(\xi) \end{pmatrix}.$$

Prin calculele directe obținem:

$$n(\xi) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma - i\xi - i}}{1+t}\, d\tau = \frac{2e^{\pi(\xi + i\gamma)}}{e^{\pi(\xi+i\gamma)} - 1}.$$

Pentru determinarea funcției $s(\xi)$ ne vom folosi de faptul că $S^2 = I$ şi că

$$HS\ H^{-1} = \begin{pmatrix} s(\xi) & -n(\xi) \\ n(\xi) & -s(\xi) \end{pmatrix}.$$

Atunci,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2(\xi) - n^2(\xi) & 0 \\ 0 & s^2(\xi) - n^2(\xi) \end{pmatrix}$$

şi, prin urmare,

$$s^2(\xi) = 1 + n^2(\xi). \tag{3.5}$$

Am remarcat deja că spectrul operatorului S_+ în spațiul $L_p(R^+, x^\beta)$ coincide cu arcul $l(-1,1;2\pi\gamma)$. Deoarece mulțimea valorilor funcției $s(\xi)$ se află în spectrul operatorului S_+, atunci

$$\operatorname{Im} s(\xi) > 0 \ \textit{pentru}\ \gamma > 1/2 \ \textit{şi}\ \operatorname{Im} s(\xi) < 0 \ \textit{pentru}\ \gamma < 1/2. \tag{3.6}$$

Condițiile (3.5) şi (3.6) în mod univoc determină funcția $s(\xi)$. În final obținem:

$$s(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} + 1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} - 1}.$$

Notăm $s(\xi)$ cu z, atunci:

$$n(\xi) = \sqrt{z^2 - 1}. \tag{3.7}$$

Ramura acestei funcții se alege astfel încât pentru $z = -i\,ctg(\pi\gamma/2)$ ea să capete valoarea $\frac{-i}{\sin \pi\gamma}$. Prin urmare, operatorul RAR^{-1} reprezintă un operator de multiplicare cu matricea de funcții

$$A(z) = \begin{pmatrix} c_2 + d_2 z & -d_2\sqrt{z^2-1} \\ d_1\sqrt{z^2-1} & c_1 - d_1 z \end{pmatrix},$$

unde variabila $z\,(= s(\xi))$ parcurge arcul $l(-1,1;2\pi\gamma)$. Aşadar, are loc următoarea teoremă.

Teorema 3.1. *Spectrul operatorului* $A = cI + dS_+$ *coincide cu mulțimea* λ *care verifică relația* $\det(A(z) - \lambda E) = 0$, *unde* E *este matricea unitate de ordinul doi:*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(A(z) - \lambda E) = 0\}. \tag{3.8}$$

Vom aplica rezultatele teoremei 3.1 pentru a determina formula inversului operatorului S_+. În punctul precedent s-a demonstrat că operatorul S_+ este inversabil în spațiul $L_p(R^+)$ $(1 < p < +\infty)$, dacă şi numai dacă $p \neq 2$. Fie $R = FV$, unde F transformata Fourier, $(V\psi)(t) = t^{1/p}\psi(t)$, $\psi \in L_p(R^+)$, $h = S_+\psi$ şi $\hat{\psi} = R\psi$. Atunci, $RS_+R^{-1}\hat{\psi} = \hat{h}$ şi, în baza celor demonstrate, $s(\xi)\hat{\psi}(\xi) = \hat{h}(\xi)$. Aşadar,

$$\hat{h}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma-i/2)}+1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma-i/2)}-1}\hat{\psi}(\xi) \quad pentru\ \ p > 2\ \ și$$

$$\hat{h}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma+i/2)}+1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma+i/2)}-1}\hat{\psi}(\xi) \quad pentru\ \ p < 2\ .$$

Efectuăm transformata inversă Fourier, ţinând cont de faptul că $(Vf)(t) = t^{1/p} f(t)$. Fie $2 < p < +\infty$, atunci

$$t^{1/p} h(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} \psi(\tau)\tau^{1/p} \frac{(t\tau^{-1})^{1/p-1/2}}{1-t\tau^{-1}}\frac{d\tau}{\tau},$$

şi, prin urmare,

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\tau}{t}}\frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau .$$

De aici, pentru $p > 2$, obținem:

$$(S_+^{-1}\psi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\tau}{t}}\frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau . \tag{3.9}$$

Pentru $1 < p < 2$, în mod similar obținem:

$$(S_+^{-1}\psi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{\tau}}\frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau . \tag{3.10}$$

Menționăm, că operatorul, definit de partea dreaptă a egalității (3.9), este inversul pentru S_+ şi în spațiul $L_p(R^+, x^\beta)$, pentru $2(1+\beta) < p$, iar operatorul, definit de partea dreaptă a egalității (3.10), este inversul pentru S_+, pentru $2(1+\beta) > p$. Pentru $2(1+\beta) = p$ operatorul S_+ nu este inversabil nici la stânga şi nici la dreapta.

Studiul inversabilității unor clase de operatori integrali singulari cu translații de tip Carleman şi a operatorilor care conțin conjugare complexă va fi prezent în alte publicații ale autorilor.

Referințe:

1. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. - Москва: Наука, 1970.
2. Gohberg I.C., Krupnik N.Ja. Banach algebras generated by singular integral operators // Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai 5. Hilbert space operators, Tihany (Hungary), 1970, p.240-263.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - Москва: Наука, 1968.
4. Neagu V. Algebre Banach generate de operatori integrali singulari. - Chişinău: CEP USM, 2005.
5. Gohberg,I., Krupnik N. Introduction to the theory of one-dimensional singular integral operators, vols.I and II. - Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1992.
6. Гельфанд И.М., Райков В.А., Шилов Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. - Москва: Физматгиз, 1959.

Prezentat la 20.01.2010