REGULARIZAREA ŞI SOLUȚIONAREA UNOR ECUAȚII INTEGRALE SINGULARE

Oxana PALADI

Catedra Analiză Matematică şi Ecuații Diferențiale

In this study there are established relations between the solutions of singular integral equations and equations which are obtained as a result of their regularization and conditions that ensure equivalence of these equations. Is shown that the method developed posts in this job actually allows to solve equations with translations of the type Carleman. For this is natural to assume that the singular integral operator, that meet this equation, are satisfied the conditions of existence of regularized operator, meaning that the operator is noetherian.

Este bine cunoscut faptul că metodele elaborate până în prezent (inclusiv cele aproximative) de rezolvare a ecuațiilor integrale singulare complete sunt insuficiente. De aceea, deseori, de la ecuația singulară inițială se trece la una regularizată, adică la una de tip Fredholm. Această trecere este justificată prin faptul că ecuațiile de tip Fredholm sunt bine studiate şi, în plus, pentru ele sunt elaborate diverse metode efective de rezolvare. Pentru a realiza această trecere (reducere), de regulă, asupra ecuației integrale singulare sunt aplicate anumite transformări integrale şi/sau funcționale. Aceste transformări, în general, pot să ne conducă la apariția unor soluții străine, care nu satisfac ecuația inițială, sau la pierderea unor soluții. În consecință, ecuația obținută în urma transformărilor, în general, nu este echivalentă cu cea inițială. Echivalența a două ecuații înseamnă că ambele ecuații au unele şi aceleaşi soluții.

În această lucrare se stabilesc anumite relații dintre soluțiile unor ecuații integrale singulare şi ale ecuațiilor care se obțin în rezultatul regularizării lor, precum şi condițiile care asigură echivalența acestor ecuații. Se demonstrează că metoda elaborată în prezenta lucrare permite a rezolva efectiv unele ecuații cu translații de tip Carleman. Pentru aceasta, este firesc să presupunem că pentru operatorul integral singular, care corespunde ecuației date, sunt satisfăcute condițiile de existență a operatorului regularizator, adică operatorul respectiv este noetherian.

1. Regularizarea la stânga

Fie dată ecuația singulară completă

$$A\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_{\Gamma}k(\tau,t)d\tau = f(t)\ \ (a^2(t) - b^2(t) \neq 0,\ k \in C(\Gamma \times \Gamma)) \tag{1.1}$$

şi M un operator integral singular, care regularizează ecuația (1.1). Aplicând la stânga relației (1.1) operatorul M, obținem ecuația de tip Fredholm

$$MA\varphi = Mf\,. \tag{1.2}$$

Ecuația regularizată (1.2) (transformată din stânga) o scriem sub forma

$$M(A\varphi - f) = 0\,. \tag{1.2'}$$

Aşa cum operatorul M este liniar, orice soluție a ecuației (1.1) verifică şi ecuația ($1.2'$). Astfel, regularizarea la stânga nu ne conduce la pierderea unor soluții.

În cele ce urmează ne interesează dacă ecuațiile (1.1) şi $(1.2')$ sunt echivalente. Altfel spus, dacă soluțiile ecuației $(1.2')$ sunt şi soluții ale ecuației (1.1). Ne vom convinge imediat că această afirmație nu întotdeauna are loc. Pentru aceasta, considerăm ecuația singulară omogenă

$$M\psi = 0 \tag{1.3}$$

asociată operatorului regularizator M. Fie $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ sistemul complet de soluții al acestei ecuații. Considerând ecuația $(1.2')$ ca ecuație singulară de forma (1.3) cu funcția necunoscută $\psi = A\varphi - f$, obținem:

$$A\varphi - f = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\psi_k, \tag{1.4}$$

unde α_k sunt nişte constante arbitrare.

Astfel, ecuaţia regularizată este echivalentă nu cu ecuaţia iniţială, ci cu ecuaţia (1.4). Dacă asupra ecuaţiei (1.4) se acţionează cu operatorul M, atunci obţinem o ecuaţie de forma (1.2), în care α_k sunt arbitrare. La prima vedere, pare că ecuaţia (1.2) este echivalentă cu ecuaţia (1.4) pentru orice α_k. În realitate, aceasta va avea loc doar numai în cazul în care *ecuaţia* (1.4) *este normal rezolvabilă pentru orice* α_k. Pentru ca ecuaţia (1.4) să fie rezolvabilă, trebuie ca partea ei dreaptă să verifice anumite condiţii. Supunând expresia $f+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\psi_k$ acestor condiţii, obţinem că α_k $(k=1,2,...,n)$ trebuie să verifice un sistem de ecuaţii (liniare). Logic poate fi realizat unul din următoarele cazuri: 1) sistemul obţinut este verificat pentru orice valori ale lui α_k, 2) din acest sistem se obţin unele constante, celelalte căpătând valori arbitrare, sau, în sfârşit, 3) toate constantele α_k capătă valori bine determinate. Cu ajutorul unor exemple concrete se arată că aceste cazuri pot fi realizate (la detalii nu ne vom opri aici). Prin urmare, ecuaţia (1.1) este echivalentă cu ecuaţia (1.4), în care α_k sunt arbitrare sau constante bine determinate. Dacă, de exemplu, ecuaţia (1.4) este rezolvabilă numai pentru $\alpha_k=0,\ k=1,...,n$, atunci ecuaţia (1.2) este echivalentă cu (1.1) şi regularizarea este echivalentă. În particular, dacă $KerM=\{0\}$, atunci partea dreaptă a ecuaţiei (1.4) este identic egală cu zero şi regularizarea în mod necesar este echivalentă. Pentru $IndA\geq 0$ un astfel de operator M există, deoarece în acest caz $IndM\leq 0$ şi, în consecinţă, $KerM=\{0\}$. Reamintim că în cazul unui opertor integral singular noetherian unul din numerele $\dim KerA$, $\dim KerA^*$, este egal cu zero.

2. Regularizarea la dreapta

Fie
$$A\varphi=f \tag{2.1}$$
ecuaţia iniţială şi
$$AM\psi=f \tag{2.2}$$
ecuaţia regularizată, care se obţine din (2.1) prin substituţia
$$M\psi=\varphi. \tag{2.3}$$

Dacă ψ_0 este o soluţie oarecare a ecuaţiei (2.2), atunci din relaţia (2.3) obţinem soluţia corespunzătoare
$$\varphi_0=M\psi_0$$
a ecuaţiei iniţiale (2.1). Am stabilit astfel că în rezultatul regularizării la dreapta soluţii străine nu apar. Reciproc, fie $\tilde{\varphi}_0$ o soluţie a ecuaţiei iniţiale (2.1). Atunci, soluţia ecuaţiei regularizate (2.2) poate fi obţinută ca soluţia ecuaţiei singulare neomogene
$$M\psi=\tilde{\varphi}_0,$$
care, însă, în general, poate să nu fie rezolvabilă.

Prin urmare, regularizarea la dreapta poate să ne conducă la pierderea unor soluţii. O astfel de pierdere nu va avea loc doar în cazul în care ecuaţia (2.3) este rezolvabilă pentru orice parte dreaptă. În acest caz, operatorul M va fi un regularizator echivalent la dreapta.

Teorema 2.1. *Ecuaţiile (2.1) şi (2.2) sunt echivalente, dacă şi numai dacă* $KerM=\{0\}$.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $MA\varphi=0$, atunci $A\varphi=h$, unde $h\in KerM$. Presupunem că ecuaţiile (1.1) şi (1.2) sunt echivalente, atunci ori $KerM=\{0\}$, ori $\dim KerM>0$ şi $KerM\cap \operatorname{Im}A=\{0\}$. Ultima relaţie este cu neputinţă, deoarece în acest caz ecuaţiile $A\varphi=y$, $(y\in KerM)$ şi $MA\varphi=My=0$ nu sunt echivalente. Reciproc, dacă $KerM=\{0\}$, atunci, evident, ecuaţiile (1.1) şi (1.2) sunt echivalente.

Teorema 2.2. *Ecuaţia integrală singulară* $A\varphi=f$ *admite o regularizare echivalentă pentru orice parte dreaptă* f, *dacă şi numai dacă*

$$IndA \geq 0. \tag{2.4}$$

Demonstrație. Fie operatorul M un regularizator echivalent pentru operatorul A, atunci el este inversabil la stânga şi din relația $IndM = \dim KerM - \dim KerM^{\bullet}$ rezultă că $IndM \leq 0$. Aşa cum $IndMA = IndM + IndA = 0$, obținem că $IndA \geq 0$. Fie condiția (2.4) verificată şi M_1 un regularizator pentru operatorul A, atunci M_1 este noetherian şi $IndM_1 + IndA = 0$. Prin urmare, $IndM_1 \leq 0$. Utilizând ultima relație şi faptul că M_1 este noetherian, operatorul M_1 poate fi reprezentat (*a se vedea* [1]) sub forma $M_1 = M + T$, unde M este inversabil la stânga, iar T este un operator compact. Este evident că M este un regularizator echivalent pentru A. Teorema este demonstrată.

3. Cazul în care operatorul A nu admite o regularizare echivalentă

Considerăm cazul în care operatorul noetherian A *nu admite o regularizare echivalentă.*

În acest caz,

$$IndA < 0.$$

Fie operatorul M_1 regularizatorul lui A. Aşa cum $IndM_1 > 0$, operatorul M_1, fiind şi noetherian, poate fi reprezentat (*a se vedea* [1]) sub forma $M_1 = M + T$, unde M este inversabil la dreapta, iar T este compact. Operatorul M de asemenea este un regularizator pentru A şi, în plus, toate soluțiile ecuației

$$Ax = y \quad (y \in \operatorname{Im} A) \tag{3.1}$$

pot fi reprezentate sub forma $x = Mz$, unde z parcurge toate soluțiile ecuației $AMz = y$.

4. Regularizarea operatorilor integrali singulari

Teorema 4.1*. Fie Γ un contur de tip Leapunov închis şi $a, b \in C(\Gamma)$. Operatorul $A = aP + bQ + T$ (a se vedea [2]) admite o regularizare în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$, dacă şi numai dacă sunt verificate condițiile*

$$a(t) \neq 0 \;\; \text{şi} \;\; b(t) \neq 0 \quad t \in \Gamma. \tag{4.1}$$

Fie condițiile (4.1) verificate, atunci $IndA = -indab^{-1}$ şi operatorul

$$M = a^{-1}P + b^{-1}Q \tag{4.2}$$

este un regularizator pentru operatorul A.

Demonstrație. Fie condițiile (4.1) verificate, atunci [2] operatorul $A_0 = aP + bQ$ este noetherian, unilateral inversabil şi $Ind(aP + bQ) = -indab^{-1}$. Prin urmare, operatorul A admite o regularizare şi $IndA = -indab^{-1}$. Aşa cum operatorul $ShI - hS$ este compact în $L_p(\Gamma, \rho)$ pentru orice funcție continuă $h(t)$, deducem că operatorul $M = a^{-1}P + b^{-1}Q$ este regularizator pentru A.

Rămâne de demonstrat că dacă condițiile (4.1) nu sunt verificate, atunci operatorul $aP + bQ$ nu este noetherian, adică operatorul A nu admite o regularizare. Prin reducere la absurd, admitem că $A_0 = aP + bQ$ este noetherian, în timp ce una din condițiile (4.1) nu este verificată. Pentru operatorul A_0 există un număr $\delta > 0$, încât pentru orice operator B, care verifică inegalitatea

$$\|A_0 - B\| < \delta \tag{4.3}$$

este de asemenea noetherian şi

$$IndB = IndA_0. \tag{4.4}$$

Aproximăm funcțiile a şi b cu funcții raționale r_1 şi r_2, încât

$$\|A_0 - (r_1P + r_2Q)\| = \|aP + bQ - (r_1P + r_2Q)\| < \delta \tag{4.5}$$

şi cel puțin una din funcțiile r_1, r_2 să se anuleze pe conturul Γ. Presupunem, de exemplu, că $r_1(t_0) = 0$. Scriem funcția r_1 sub forma $r_1(t) = (t - t_0)\, r_3(t)$, unde r_3 este de asemenea o funcție rațională. Atunci:

$$r_1 P + r_2 Q = (r_3 P + r_2 Q)((t - t_0)P + Q) \tag{4.6}$$

şi, totodată, are loc şi egalitatea

$$r_1 P + r_2 Q = ((t - t_0)P + Q)(r_3 P + r_2 Q) + T_1, \tag{4.7}$$

unde T_1 este un operator compact. Operatorul $r_1 P + r_2 Q$, în baza relației (4.5) şi ipotezei făcute, admite o regularizare. Din relațiile (4.6) şi (4.7) rezultă că operatorul $(t - t_0)P + Q$ admite o regularizare şi, prin urmare, este noetherian. Pentru $\lambda \in G^-$ operatorul $(t - t_0)P + Q$ este inversabil, iar pentru $\lambda \in G^+$ operatorul $(t - t_0)P + Q$ este inversabil la stânga şi $Ind((t - t_0)P + Q) = -1$. Aşadar, am obținut că în orice vecinătate a operatorului $(t - t_0)P + Q$ există operatori cu indici diferiți, ceea ce este imposibil. Teorema este demonstrată.

Din teoremele 2.2 şi 4.1 rezultă următoarele două corolare:

Corolarul 4. 1. *Fie* $IndA = -ind ab^{-1} \geq 0$*, atunci ecuațiile*

$$A\varphi = f \text{ şi } MA\varphi = Mf$$

sunt echivalente pentru orice parte dreaptă $f \in L_p(\Gamma, \rho)$.

Corolarul 4.2. *Dacă* $IndA = -ind ab^{-1} < 0$*, atunci toate soluțiile ecuației* $A\varphi = f$ *pot fi obținute cu ajutorul formulei* $\varphi = M\psi$*, unde* ψ *descrie toate soluțiile ecuației* $MA\psi = f$.

Observația 4.1. *Dacă operatorul* $A = aP + bQ + T$ *se scrie sub forma* $A = cI + dS + T$*, unde* $c = a + b,\ d = a - b,\ I = P + Q,\ S = P - Q$*, atunci condițiile (4.1) sunt echivalente cu condițiile*

$$c^2(t) - d^2(t) \neq 0, \tag{4.1'}$$

iar operatorul regularizator M *are forma*

$$M = \frac{c}{c^2 - d^2} I - \frac{d}{c^2 - d^2} S. \tag{4.2'}$$

Reamintim (*a se vedea* [2]) , că orice funcție continuă $a(t)$ şi diferită de zero pe conturul Γ poate fi reprezentată sub forma

$$a(t) = a_-(t)\, t^{\kappa} a_+(t), \tag{4.8}$$

unde κ este un număr întreg, iar funcțiile a_- şi a_+ posedă următoarele proprietăți:

1) $a_-, a_-^{-1} \in L_p^-(\Gamma)$ şi $a_+, a_+^{-1} \in L_p^+(\Gamma)$ pentru orice $p\,(1 < p < \infty)$;

2) operatorul $a_+^{-1} P a_-^{-1} I$ este mărginit în spațiul $L_p(\Gamma)$ pentru orice $p\,(1 < p < \infty)$.

În această definiție se presupune că punctul $z = 0$ aparține domeniului G^+. Reprezentarea (4.8) poartă denumirea de *factorizare generalizată* a funcției $a(t)$.

Teorema 4.2. *Fie funcțiile* $a(t)$ *şi* $b(t)$ *verifică condițiile (4.1) ,* $\kappa = ind\,\dfrac{a}{b}$ *şi*

$$\frac{a(t)}{b(t)} = c(t) = c_-(t)\, t^{\kappa} c_+(t) \tag{4.9}$$

reprezintă factorizarea generalizată a funcției $\dfrac{a(t)}{b(t)}$*. Operatorul* $A_0 = aP + bQ$ *este inversabil la stânga pentru* $\kappa \geq 0$*, iar pentru* $\kappa \leq 0$ *este inversabil la dreapta. În ambele cazuri avem:*

$$(aP + bQ)^{-1} = (t^{-\kappa} P + Q)(c_+^{-1} P c_-^{-1} I + a b^{-1} t^{-\kappa} c_+^{-1} Q c_-^{-1} I) b^{-1} I . \tag{4.10}$$

Pentru $\kappa < 0$ *avem:*

$$Ker(aP + bQ) = \mathfrak{L}\left\{g(t), tg(t), ..., t^{-\kappa-1}\right\},\ \text{unde}\ g(t) = c_+^{-1}(t) - c_-(t) t^{\kappa}. \tag{4.11}$$

Pentru $\kappa > 0$ *avem:*

$$Co\ker(aP + bQ) = \mathfrak{L}\left\{b(t)\, c_-(t),\ tb(t)\, c_-(t), ...,\ t^{\kappa-1} b(t)\, c_-(t)\right\}. \tag{4.12}$$

Dacă $\kappa > 0$, atunci ecuația $aP\varphi + bQ\varphi = f$ este rezolvabilă, dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condițiile

$$\int_{\Gamma} f(t)t^{-j}b^{-1}(t)\,c_{-}^{-1}(t)dt = 0 \quad (j = 1,2,...,\kappa). \tag{4.13}$$

Demonstrație. Fie $\kappa = 0$. Vom demonstra că operatorul $A_0 = aP + bQ$ este inversabil şi

$$A_0^{-1} = (c_{+}^{-1}Pc_{-}^{-1}I + a\,b^{-1}c_{+}^{-1}Q\,c_{-}^{-1}I)b^{-1}I. \tag{4.14}$$

Aşa cum operatorul $c_{+}^{-1}Q\,c_{-}^{-1}I = a^{-1}bI - c_{+}^{-1}P\,c_{-}^{-1}I$ este mărginit, rezultă că şi operatorul definit de relația (4.14) este mărginit în $L_p(\Gamma)$. Operatorul A_0^{-1} poate fi scris şi sub forma

$$A_0^{-1} = (c_{+}^{-1}Pc_{-}^{-1}I + c_{-}Q\,c_{-}^{-1}I)b^{-1}I. \tag{4.14'}$$

Fie r orice funcție rațională din $C(\Gamma)$, atunci

$$(c_{+}^{-1}Pc_{-}^{-1}I + c_{-}Q\,c_{-}^{-1}I)b^{-1}(aP + bQ)r = (c_{+}^{-1}P + c_{-}Q)(c_{+}r_{+} + c_{-}r_{-}).$$

Aşa cum $c_{+}r_{+} \in L_p^{+}(\Gamma)$ şi $c_{-}r_{-} \in L_p^{-}(\Gamma)$, rezultă că

$$(c_{+}^{-1}Pc_{-}^{-1}I + c_{-}Q\,c_{-}^{-1}I)b^{-1}(aP + bQ)r = r.$$

De aici rezultă că $A_0^{-1}A_0r = r$, adică operatorul definit de relația (4.14) este inversul lui A_0.

Pentru $\kappa > 0$ operatorul $A_0 = aP + bQ$ poate fi reprezentat sub forma

$$A_0 = b(ct^{-\kappa}P + Q)(t^{\kappa}P + Q).$$

În baza celor deja demonstrate, operatorul A_0^{-1}, definit de egalitatea (4.14'), este inversul la stânga pentru A_0.

Fie $\kappa < 0$, atunci operatorul

$$B = b(ct^{-\kappa}P + Q) = A_0(t^{\kappa}P + Q)$$

este inversabil şi inversul lui se exprimă prin relația (4.14). Atunci, din ultima egalitate rezultă că operatorul A_0 este inversabil la stânga şi inversul respectiv este dat de egalitatea (4.10).

Pentru orice funcție rațională $r \in C(\Gamma)$ are loc egalitatea

$$b^{-1}c_{-}^{-1}(aP + BQ)(c_{+}^{-1}P + c_{-}Q)r = (t^{\kappa}P + Q)r.$$

Din ultima relație rezultă că pentru $\kappa < 0$ are loc egalitatea

$$Ker(aP + bQ) = (c_{+}^{-1}P + c_{-}Q)Ker(t^{\kappa}P + Q),$$

care poate fi scrisă şi astfel:

$$Ker(aP + bQ) = \mathfrak{L}\{g(t), tg(t),...,t^{-\kappa-1}\}, \text{ unde } g(t) = c_{+}^{-1}(t) - c_{-}(t)t^{\kappa}.$$

Fie $\kappa > 0$. Construim o bază în $KerA^{\bullet}$. Pentru aceasta, reamintim (*a se vedea* [2]), că are loc egalitatea $A^{\bullet} = H(PbI + QaI)H$, unde H este operatorul definit de relația $(H\varphi)(t) = \overline{h(t)\varphi(t)}$, $|h(t)| = 1$. Considerăm funcțiile $y_j = H(c_{-}^{-1}b^{-1}t^{-j})$ $(j = 1,2,...,\kappa)$. Atunci, $HA^{\bullet}y_j = (Pb + Qa)c_{-}^{-1}b^{-1}t^{-j} = Pc_{-}^{-1}t^{-j} + Qc_{+}t^{\kappa-j} = 0$. Prin urmare, $\mathfrak{L}\{y_1, y_2,..., y_{\kappa}\} \subset KerA^{\bullet}$. Ținând seama şi de faptul că $\dim KerA^{\bullet} = \kappa$, obținem egalitatea

$$\mathfrak{L}\{y_1, y_2,..., y_{\kappa}\} = KerA^{\bullet}.$$

Operatorul A este normal rezolvabil, de aceea $f \in \operatorname{Im} A$, dacă şi numai dacă $f \in L_p(\Gamma)$ şi

$$\int_{\Gamma} f(t)\overline{y_j(t)}|dt| = 0 \quad (j = 1,2,...,\kappa). \tag{4.15}$$

Aşa cum $\overline{y_j(t)}|dt| = hb^{-1}c_{-}^{-1}t^{-1}|dt| = b^{-1}c_{-}^{-1}t^{-1}dt$, atunci condițiile (4.13) şi (4.15) coincid. Teorema este demonstrată.

Rezultate similare au loc şi pentru operatorii de forma $PaI + QbI$. Pentru a le formula, vom demonstra două teoreme care stabilesc (a se *vedea* [2]) relații dintre proprietățile legate de rezolvabilitatea operatorilor $A = aP + bQ$ şi $B = PaI + QbI$ pentru orice coeficienți $a, b \in L_{\infty}(\Gamma)$, cu condiția că $a^{-1}, b^{-1} \in L_{\infty}(\Gamma)$.

Mulțimea funcțiilor care posedă aceste proprietăți se notează prin $GL_\infty(\Gamma)$.

Teorema 4.3. *Fie $a,b \in GL_\infty(\Gamma)$. Există doi operatori inversabili C și D, încât*

$$C(aP+bQ)D = PaI + QbI. \tag{4.16}$$

Demonstrație. Evident că operatorul $A = aP + bQ$ poate fi exprimat sub forma

$$A = b(ab^{-1}P + Q) = b(Pab^{-1}P + Q)(I + Qab^{-1}P). \tag{4.17}$$

O egalitate similară are loc şi pentru operatorul B

$$B = (Pab^{-1}I + Q)bI = (Pab^{-1}Q + I)(Pab^{-1}P + Q)bI. \tag{4.18}$$

Aşa cum operatorii bI, $I + Qab^{-1}P$, $I + Pab^{-1}Q$ sunt inversabili,

$$(I + Qab^{-1}P)^{-1} = I - Qab^{-1}P \text{ şi } (I + Pab^{-1}Q)^{-1} = I - Pab^{-1}Q,$$

atunci din relațiile (4.17) şi (4.18) rezultă egalitatea

$$Pab^{-1}P + Q = b^{-1}(aP + bQ)(I - Qab^{-1}P) = (I - Pab^{-1}Q)(PaI + QbI)b^{-1}I. \tag{4.19}$$

Din ultima egalitate obținem:

$$(I + Pab^{-1}Q)b^{-1}(aP + bQ)(I - Qab^{-1}P)bI = PaI + QbI. \tag{4.20}$$

Egalitatea (4.20) demonstrează teorema cu $C = (I + Pab^{-1}Q)b^{-1}I$ şi $D = (I - Qab^{-1}P)bI$.

Corolarul 4.3. *Fie $a,b \in GL_\infty(\Gamma)$. Operatorul $aP + bQ$ este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma)$, dacă și numai dacă operatorul $PaI + QbI$ este noetherian în acelaşi spațiu $L_p(\Gamma)$. Operatorul $aP + bQ$ admite o regularizare în $L_p(\Gamma)$, dacă și numai dacă operatorul $PaI + QbI$ admite o regularizare în spațiul $L_p(\Gamma)$. În plus, au loc egalitățile*

$$\dim Ker(aP + bQ) = \dim Ker(PaI + QbI)$$

și

$$\dim Co\ker(PaI + QbI) = \dim Co\ker(aP + bQ).$$

Teorema 4.4. *Fie $a,b \in GL_\infty(\Gamma)$. Operatorul $A = aP + bQ$, care acționează în spațiul $L_p(\Gamma)$, este legat de operatorul $B = a^{-1}P + b^{-1}Q$, care acționează în spațiul $L_q(\Gamma)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, prin relația*

$$A^\bullet = C_1BD_1, \tag{4.21}$$

unde

$$C_1 = HC,\ D_1 = DabH$$

și H este operatorul inversabil $H\varphi = \overline{h(t)\varphi(t)}$.

Într-adevăr, avem:

$$A^\bullet = H(PaI + QbI)H \tag{4.22}$$

şi relația (4.21) reprezintă o consecință din egalitățile (4.16) şi (4.22).

Din relația (4.21) mai rezultă

Corolarul 4.4. *Operatorul $A = aP + bQ$ $(a,b \in GL_\infty(\Gamma))$ este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma)$, dacă și numai dacă operatorul $B = a^{-1}P + b^{-1}Q$ este noetherian în spațiul $L_q(\Gamma)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.*

Dacă operatoriul $A = aP + bQ$ admite o regularizare în spațiul $L_p(\Gamma)$, atunci operatorul $B = a^{-1}P + b^{-1}Q$ admite o regularizare în $L_q(\Gamma)$. Au loc egalitățile

$$\dim Ker(aP + bQ)\,|_{L_p(\Gamma)} = \dim Co\ker(a^{-1}P + b^{-1}Q)\,|_{L_q(\Gamma)}.$$

Cu ajutorul teoremelor 4.3 şi 4.4 se demonstrează uşor că pentru operatorul $PaI + QbI$ $(a,b \in C(\Gamma))$ are loc o teoremă similară cu teorema 4.4. Ea se deosebeşte de teorema 4.4 prin faptul că formulele (4.11), (4.12) şi condițiile (4.13) se înlocuiesc, respectiv, prin următoarele:

$$Ker(PaI + QbI) = \mathfrak{L}\left\{b^{-1}(t)c_+(t),\ tb^{-1}(t)c_+(t),\dots,\ t^{-\kappa-1}b^{-1}(t)c_+(t)\right\}\mathfrak{L}\left\{g(t), tg(t),\dots, t^{-\kappa-1}\right\},$$

$$Co\ker(PaI + QbI) = \mathfrak{L}\left\{g(t), tg(t),\dots, t^{\kappa-1}\right\},\ \textit{unde}\ \ g(t) = c_-^{-1}(t) - c_+(t)t^\kappa,$$

$$\int_{\Gamma} f(t)(c_-^{-1}(t) - c_+ t^{\kappa}) t^{-j}\, dt = 0, \quad (j = 1,2,...,\kappa).$$

5. Exemple de operatori integrali singulari unilaterali inversabili

Fie

$$A_n = (t-\lambda)^n P + Q, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \tag{5.1}$$

Pentru orice număr natural n au loc egalitățile

$$A_n = A_1^n, \qquad A_{-n} A_n = I. \tag{5.2}$$

Pentru $\lambda \in G^-$ factorii în egalitatea a doua din (5.2) pot fi schimbați cu locurile, iar pentru $\lambda \in G^+$ nu avem voie să-i schimbăm, deoarece operatorul A_1 nu este inversabil la dreapta. În acest caz se deduce cu uşurință că

$$\operatorname{Im} A_1 = \{ f \in L_p(\Gamma, \rho) \mid Pf = 0 \}, \quad Ker A_{-1} = \mathfrak{L}\{ 1 - (t-\lambda)^{-1} \}, \lambda \in G^+, \tag{5.3}$$

iar în cazul general

$$Ker A_{-n} = \mathfrak{L}\{ (t-\lambda)^{n-1} - (t-\lambda)^{-1}, (t-\lambda)^{n-2} - (t-\lambda)^{-2}, ..., 1 - (t-\lambda)^{-n} \}, n = 1,2,..., \lambda \in G^+. \tag{5.4}$$

Ultima egalitate se obține fără dificultăți, dacă soluția ecuației $A_{-n}\varphi = 0$ se caută sub forma

$$P\varphi = a_0 + a_1(t-\lambda) + ... + a_{n-1}(t-\lambda)^{n-1} + a_n (t-\lambda)^n \varphi_+(t), \tag{5.5}$$

unde $a_j \in \mathbb{C}$ şi $\varphi_+ \in \operatorname{Im} P$.

Rezultatele finale referitoare la operatorii de forma (5.1) le formulăm în următoarea teoremă.

Teorema 5.1. *Operatorul* $A_n = (t-\lambda)^n P + Q$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, *este inversabil pentru* $\lambda \in G^-$ *şi inversabil la stânga pentru* $\lambda \in G^+$. *În ambele cazuri* $A_n^{-1} = A_{-n}$.

Pentru $n = 1,2,...$ *au loc egalitățile*

$$A_n = A_1^n \ \text{și} \ Ker A_{-n} = \mathfrak{L}\{ (t-\lambda)^{n-1} - (t-\lambda)^{-1}, (t-\lambda)^{n-2} - (t-\lambda)^{-2}, ..., 1 - (t-\lambda)^{-n} \}, \lambda \in G^+.$$

În particular,

$$\dim Ker A_{-n} = n \ \text{și} \ \dim Co\ker A_n = n, \quad n = 1,2,..., \lambda \in G^+.$$

Dacă $\lambda \in \Gamma$, *atunci operatorul* $A_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ *nu este inversabil nici la dreapta, nici la stânga.*

Referințe:

1. Никольский С.М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Известия АН ССР, том 7, №3, 1943, с.147-166.
2. Gohberg,I., Krupnik N. Introduction to the theory of one-dimensional singular integral operators. Vols.I and II. - Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1992.

Prezentat la 25.03.2010