ASUPRA COMPACITĂȚII UNOR OPERATORI INTEGRALI SINGULARI ÎN SPAȚII CU PONDERI

Oxana PALADI

Catedra Analiză Matematică şi Ecuaţii Diferenţiale

The operators such as $aP-PaI$, $aQ-QaI$ and integral operators with weak singularities are studied in the work. It is proven that the operators $aP-PaI$ and $aQ-QaI$ are totally continuous (or compact) in spaces with weights in one and only one case, when the function $a(t)$ is continuous on the contour of integration. As a corollary, it is shown that the factor-algebra generated by singular operators with piecewise continuous coefficients is not comutative and the symbol on that algebra is a matrix-function.

Fie Γ un contur compus format din n curbe închise $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ de tip Leapunov pe porţiuni, care au un singur punct comun t_0. Notăm prin F_Γ^+ domeniul mărginit de conturul Γ. Vom presupune că domeniile $F_j^+ (= F_{\Gamma_j}^+)$ nu au puncte comune şi la ocolirea punctului t_0 împotriva mişcării acelor de ceasornic domeniul F_{j+1}^+ urmează după domeniul F_j^+ $(j = 1,2,...,n-1)$. Orientăm conturul Γ astfel încât, parcurgând curba Γ_j, domeniul F_j^+ să rămână la stânga.

În Figura 1 este reprezentat un astfel de contur Γ pentru $n = 4$.

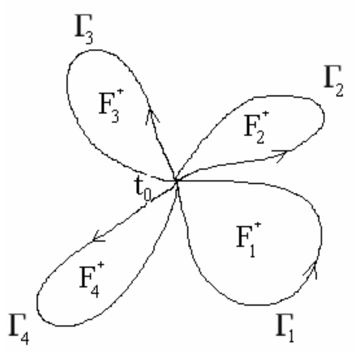

Fig.1.

Notăm prin $CP(\Gamma)$ mulţimea tuturor funcţiilor $a(t)$ continue în orice punct $t \in \Gamma$, cu excepţia punctului t_0, în care există limitele finite $a_j(t_0+0)$ şi $a_j(t_0-0)$ $(j = 1,2,...,n)$ atunci când t tinde către t_0 pe curba Γ_j dinspre şi, respectiv, spre punctul t_0. Prin $CP_+(\Gamma)$ notăm mulţimea funcţiilor $f(t)$ din $CP(\Gamma)$, pentru care $f_j(t_0+0) = f_j(t_0-0)\,(j = 1,2,...n)$, iar prin $CP_-(\Gamma)$ mulţimea funcţiilor $f(t)$ din $CP(\Gamma)$, pentru care $f_j(t_0+0) = f_{j+1}(t_0-0)\,(j = 1,2,...n-1)$ şi $f_n(t_0+0) = f_1(t_0-0)$. Intersecţia $C_+P(\Gamma) \cap C_-P(\Gamma)$ coincide cu mulţimea $C(\Gamma)$ de funcţii continue pe Γ.

Fie $\rho(t) = \prod_{k=0}^{n} |t-t_k|^{\beta_k}$, unde $t_0, t_1, t_2, ..., t_m$ sunt puncte diferite pe Γ şi β_k sunt numere reale, care verifică condiţiile $-1 < \beta_k < p-1,\ k = 0,1,2,...,m.$ Conform rezultatelor lui S.Mihlin ([1], (*a se vedea* şi [2]), pentru orice funcţie $a \in C(\Gamma)$ operatorii $aP-PaI$ şi $aQ-QaI$ sunt compacţi în spaţiul $L_p(\Gamma, \rho)$. Operatorii (proectorii) integrali singulari F.Riesz P şi Q sunt definiţi de egalităţile:

$$P = \frac{1}{2}(I+S),\ Q = \frac{1}{2}(I-S), \tag{1}$$

unde S este operatorul integral cu nucleul Cauchy,

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau . \tag{2}$$

În studiul ecuațiilor integrale singulare cu nucleu Cauchy deseori apare necesitatea de a considera operatori de forma

$$(T_a\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{a(\tau) - a(t)}{\tau - t} \varphi(\tau)\, d\tau \ (t \in \Gamma), \tag{3}$$

unde $a(t)$ este o funcție cunoscută definită pe Γ.

Teorema 1. *Fie* Γ *un contur compus și* $a \in CP(\Gamma)$. *Operatorul* $T_a = aS - SaI$ *este compact în spațiul* $L_p(\Gamma, \rho)$, *dacă și numai dacă* $a \in C(\Gamma)$.

Demonstrație. Suficiența. Dacă funcția a este un polinom sau o funcție rațională, atunci teorema este evidentă. În acest caz operatorul T_a este de rang finit.

Fie a orice funcție continuă pe Γ. Atunci există un șir $\{a_n(t)\}$ de polinoame (dacă Γ este deschis) sau de funcții raționale (dacă Γ este închis) cu polurile în afara conturului Γ, care converge uniform către funcția a, $\max\limits_{t \in \Gamma}|a_n(t) - a(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Așa cum

$$\left\| T_a - T_{a_n} \right\|_{L_p(\Gamma,\rho)} \le 2 \max_{t \in \Gamma} | a(t) - a_n(t) | \, \| S \|_{L_p(\Gamma,\rho)} ,$$

rezultă că operatorul T_a este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

Înainte de a demonstra necesitatea teoremei, vom considera două exemple. Vom arăta că dacă $h \in CP_+(\Gamma)$ sau $h \in CP_-(\Gamma)$, atunci, în general, operatorul $T_h = hS - ShI$ nu este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

Exemplul 1. Fie conturul Γ reprezentat în Figura 2

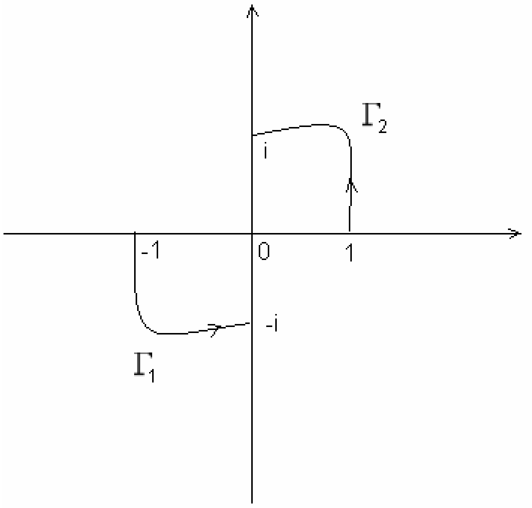

Fig.2.

În calitate de funcție $h(t)$ considerăm funcția caracteristică a curbei Γ_2 :

$$h(t) = \begin{cases} 0, \text{dacă } t \in \Gamma_1, \\ 1, \text{dacă } t \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{4}$$

Evident, funcția $h(t)$ aparține mulțimii $CP_+(\Gamma)$. Admitem că operatorul $T_h = hS - ShI$ este compact. Fie $\chi(t)$ funcția caracteristică a segmentului $[-1, 0]$ și $A = \chi(t)T_h$. Vom demonstra că operatorul A nu este compact și, astfel, vom obține o contradicție.

În spaţiul $L_2(\Gamma)$ considerăm şirul normat de funcţii, definite de egalitatea:

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n}\,,\text{dacă t}\in\left[0,\frac{1}{n}\right],\\ 0,\text{dacă t}\in\Gamma\setminus\left[0,\frac{1}{n}\right].\end{cases}$$

Vom demonstra că din şirul $\psi_n(t)=A\varphi_n$ nu se poate de extras un subşir convergent. Să evaluăm normele $\|\psi_n\|$ în spaţiul $L_p(\Gamma)$ $(1<p<2)$. Avem:

$$\|\psi_n\|_{L_p}^p=\int_\Gamma|(A\varphi_n)(t)|^p\,|dt|=\int_{-1}^{0}\left|\frac{1}{\pi\ i}\int_\Gamma\frac{h(\tau)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)d\tau-\frac{1}{\pi\ i}\int_\Gamma\frac{h(t)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)d\tau\right|^p|dt|\le$$
$$\le\frac{2^p}{\pi^p}\left(\int_{-1}^{0}\left|\int_\Gamma\frac{h(\tau)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)d\tau\right|^p|dt|+\int_{-1}^{0}\left|h(t)\int_\Gamma\frac{\varphi_n(\tau)}{\tau-t}d\tau\right|^p|dt|\right)=\frac{2^p}{\pi^p}\int_{-1}^{0}\left|\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{n}}{\tau-t}d\tau\right|^p|dt|\le n^{\frac{p-2}{2}}\int_{-\infty}^{0}\left|\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\right|^p dt. \tag{5}$$

Aşadar, $\|\psi_n\|\to 0$ în $L_p(\Gamma)$ $(1<p<2)$. De aici rezultă că dacă în spaţiul $L_2(\Gamma)$ şirul $\psi_n(t)=A\varphi_n$ ar conţine un subşir convergent $\psi_{n_k}(t)$, atunci $\psi_{n_k}(t)\to 0$. Aceasta însă este cu neputinţă, deoarece

$$\|\psi_n\|_{L_2}^2=\int_{-1}^{0}\left|\frac{1}{\pi\ i}\int_\Gamma\frac{h(\tau)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)d\tau-\frac{1}{\pi\ i}\int_\Gamma\frac{h(t)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)d\tau\right|^2|dt|=\int_{-1}^{0}\left|\frac{1}{\pi\ i}\int_0^{1/n}\frac{h(t)}{\tau-t}\sqrt{n}d\tau\right|^2|dt|=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{0}\left|\ln\left|\frac{1-t}{t}\right|\right|^2 dt. \tag{6}$$

Exemplul 2. Fie Γ acelaşi contur de la exemplul 1. Prin $h(t)$ notăm o funcţie continuă în orice punct $t\in\Gamma\setminus\{0\}$, care mai verifică următoarele condiţii: $h(t)=0$ pentru $t\in[i,0]\in\Gamma_2$, $h(t)=1$ pentru $t\in[0,1]\in\Gamma$, există $h_1(0+0)=0$ şi $h_1(0-0)=1$.

Aşa cum $h_1(0-0)=h_2(0+0)=1$ şi $h_1(0+0)=h_2(0-0)=0$, rezultă că $h\in CP_-(\Gamma)$.

Considerăm în $L_p(\Gamma)$ mulţimea de funcţii $\{\varphi_n(t)\}$ definită în felul următor:

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}0, & pentru\quad t\in\Gamma\setminus\left[0,{}^1\!/_n\right]\\ n^{1/p}, & pentru\quad t\in\left[0,{}^1\!/_n\right],\end{cases}$$

Este evident că $\|\varphi_n\|_{L_p}=1$. Fie $\chi(t)$ funcţia caracteristică a segmentului $[i,0]\in\Gamma_2$ şi $A=\chi(t)T_a$. Vom demonstra că operatorul A nu este compact în $L_p(\Gamma)$. Avem:

$$\Phi_n(t)=(A\varphi_n)(t)=\frac{\chi(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{h(\tau)-h(t)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)\,d\tau=\frac{\chi(t)}{\pi i}n^{1/p}\left(\int_0^{1/n}\frac{h(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-h(t)\int_0^{1/n}\frac{d\tau}{\tau-t}\right)=$$
$$=\frac{\chi(t)}{\pi i}n^{1/p}\int_0^{1/n}\frac{1}{\tau-t}\,d\tau=\frac{n^{1/p}}{\pi i}\chi(t)Ln\frac{1-nt}{nt}.$$

Pentru orice $\sigma>0$ $(0<\sigma<1)$ vom avea:

$$\int_\Gamma|\ \Phi_n(t+i\sigma)\ -\ \Phi_n(t)\ |^p|dt|=\int_{[i,0]}|\ \Phi_n(t+i\sigma)\ -\ \Phi_n(t)\ |^p|dt|=\int_0^1|\ \Phi_n(it+i\sigma)\ -\ \Phi_n(it)\ |^p\,dt\ge$$
$$\ge\int_{1-\sigma/2}^{1}|\ \Phi_n(it+i\sigma)\ -\ \Phi_n(it)\ |^p\,dt=\int_{1-\sigma/2}^{1}|\ \Phi_n(it)\ |^p\,dt\ge\frac{n}{\pi}\int_{1-\sigma/2}^{1}\left|\ \ln\frac{1+t^2}{t}\ \right|^p dt. \tag{7}$$

Aşa cum $\frac{1+t^2}{t} \geq 2$ pentru $t \in \left[1-\frac{\sigma}{2},1\right]$, atunci $\ln\frac{1+t^2}{t} \geq \ln 2$ şi din inegalitatea (7) obținem:

$$\int_{\Gamma} |\Phi_n(t+i\sigma)-\Phi_n(t)|^p |dt| \geq \frac{n\sigma}{2\pi}\ln 2. \tag{8}$$

Acum luăm $\sigma = \frac{2\pi}{n}, n > 4,$ şi inegalitatea (8) devine

$$\int_{\Gamma} |\Phi_n(t+i\sigma)-\Phi_n(t)|^p |dt| \geq \ln 2. \tag{9}$$

Aşadar, în baza criteriului M.Riess despre compacitatea mulțimilor de funcții în L_p, mulțimea de funcții $\{\Phi_n(t)\}$ nu este compactă în $L_p(\Gamma)$ şi de aceea operatorul $T_a = aS - SaI$ nu este compact în $L_p(\Gamma)$.

Folosind acest exemplu, vom demonstra necesitatea teoremei 1. Fie $a \in CP(\Gamma)$ şi admitem că operatorul T_a este compact în $L_p(\Gamma)$. Fără a diminua generalitatea, vom presupune că conturul Γ este cel de la exemplul 1 şi $a_1(0+0) \neq a_1(0-0)$. Fie $\omega = a_1(0+0)-a_1(0-0)$ şi considerăm funcția

$$b(t)=\begin{cases} a(t)-\omega h(t), \, pentru \;\; t \in \Gamma_1 \setminus \{0\}, \\ a_1(t_0+0), \; pentrut \quad t \in \Gamma_2, \end{cases}$$

unde h este funcția definită de la exemplul 2. Avem $b_2(0+0)=b_2(0-0)=a_1(0+0)$, $b_1(0+0)=a_1(0+0)-\omega h_1(0+0)=a_1(0+0)$ şi $b_1(0-0)=a_1(0-0)-\omega h_1(0-0)=a_1(0-0)$. Aşadar, funcția $b(t)$ este continuă pe Γ şi, în virtutea celor deja demonstrate, operatorul T_b este compact în $L_p(\Gamma)$. Din egalitatea $\chi_1 T_b \chi_1 = \chi_1 T_a \chi_1 - \omega\chi_1 T_h \chi_1$, unde χ_1 este funcția caracteristică a curbei Γ_1, şi din faptul că operatorul T_a este compact rezultă că operatorul $\chi_1 T_h \chi_1$ este compact în $L_p(\Gamma_1)$. Atunci, operatorul $H_\lambda = \chi_1 T_h \chi_1 - \lambda I$ este noetherien în $L_p(\Gamma_1)$ pentru orice $\lambda \neq 0$, adică simbolul lui, $H_\lambda(t,\mu)$, trebuie să fie nedegenerat pentru orice $\lambda \neq 0, \mu \in [0,1]$ şi orice $t \in \Gamma_1$. Scriem simbolul (*a se vedea* [3]) acestui operator în punctul t_0.

$$H_\lambda(t_0,\mu) = \begin{Vmatrix} -\lambda & 2\xi(\mu) \\ -2\xi(\mu) & -\lambda \end{Vmatrix},$$

unde $\xi(\mu)=\sqrt{f(\mu)(1-f(\mu))}$ şi $f(\mu) = \begin{cases} \frac{\sin\theta\mu}{\sin\theta} e^{i\theta(\mu-1)} & ,\text{pentru} \quad p \neq 2 \\ \mu & ,\text{pentru} \quad p = 2. \end{cases}$

Observăm că $\det H_\lambda(t_0,\mu)=\lambda^2-4f(\mu)(1-f(\mu))$ şi $\det H_\lambda(t_0,\mu)=0$ pentru $\lambda=2\sqrt{f(\mu)(1-f(\mu))}$. Contrazicerea obținută demonstrează că operatorul T_a nu este compact în $L_p(\Gamma)$. Teorema rămâne adevărată şi în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$, demonstrația se face în mod similar.

Fie $k(\tau,t)$ o funcție măsurabilă pe $\Gamma \times \Gamma$ cu singularitate slabă:

$$|k(\tau,t)| \leq c|\tau-t|^{-\mu}, \; c = const, \; 0 < \mu < 1.$$

Este cunoscut că operatorul integral, definit de relația

$$(T\varphi)(t) = \int_{\Gamma} k(\tau,t)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

este compact în spațiul $L_p(\Gamma)$. O afirmație similară are loc şi în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$, unde $\rho(t) = \prod_{k=0}^{n} |t-t_k|^{\beta_k}$.

Teorema 2. *Fie numerele* $p, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ *verifică condițiile:*

$$1 < p < +\infty, \quad -1 < \beta_k < p-1, \quad k = 0,1,2,...,m,$$

atunci operatorul integral (10) este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demonstrație. Se verifică uşor că operatorul T este compact în $L_p(\Gamma, \rho)$ dacă şi numai dacă operatorul $K = h^{-1}ThI$, unde $h(t) = \prod_{k=0}^{n} |t - t_k|^{\alpha_k}$, $\alpha_k = \beta_k / p$, este compact în spațiul $L_p(\Gamma)$. Fie:

$$k_n(\tau, t) = \begin{cases} k(\tau, t), \, pentru \ |\tau - t| \geq 1/n, \\ 0 \ , \ pentru \ |\tau - t| < 1/n. \end{cases}$$

Notăm prin A, A_n şi K_n următorii operatori integrali:

$$(A\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \left(h^{-1}(t) k(\tau, t) h(\tau) - k(\tau, t) \right) \varphi(\tau) \, d\tau ,$$

$$(A_n\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \left(h^{-1}(t) k_n(\tau, t) h(\tau) - k_n(\tau, t) \right) \varphi(\tau) \, d\tau ,$$

$$(K_n\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \left(h^{-1}(t) k_n(\tau, t) h(\tau) \right) \varphi(\tau) \, d\tau .$$

Aşa cum $h \in L_q(\Gamma), h^{-1} \in L_p(\Gamma)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ şi funcția $k_n(\tau, t)$ este mărginită, atunci

$$\int_{\Gamma} |dt| \left(\int_{\Gamma} |h^{-1}(t) k_n(\tau, t) h(\tau)|^q |d\tau| \right)^{p-1} < +\infty ,$$

şi, prin urmare, operatorul K_n este compact în $L_p(\Gamma)$. De aici rezultă continuitatea completă în $L_p(\Gamma)$ a operatorului A_n. Vom demonstra că $\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$. Fie $M_n = A - A_n$ şi $m_n(\tau, t)$ nucleul operatorului M_n. Din teorema lui B.Hvedelidze despre continuitatea operatorului integral singular cu nucleul Cauchy în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ rezultă continuitatea operatorului

$$(B\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \left| \frac{h^{-1}(\tau) h(t)}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - t} \right| |\varphi(\tau)| \, |d\tau| .$$

Notăm prin $b(\tau, t)$ nucleul acestui operator. Aşa cum $|m_n(\tau, t) \leq cn^{\mu-1} b(\tau, t)|$, rezultă:

$$\|M_n\| \leq c \, n^{\mu-1} \|B\| \ \text{ şi } \ \|M_n\| \to 0 \ \text{ pentru } \ n \to \infty.$$

Aşadar, am demonstrat că operatorul A este compact în spațiul $L_p(\Gamma)$. Prin urmare, şi operatorul K este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$. Teorema este demonstrată.

Teorema 3. *Fie* Γ *un contur simplu şi închis de tip Leapunov, iar* $t = \beta(z)$ *o funcție care transformă în mod conform discul unitate în domeniul* D^+ *mărginit de conturul* Γ, *atunci funcția*

$$k(\xi, z) = \frac{\beta'(z)}{\beta(z) - \beta(\xi)} - \frac{1}{\xi - z} (|\xi| = 1, \ |z| \leq 1)$$

are singularitate slabă pe conturul $\Gamma_0 = \{\xi \, | \, |\xi| = 1\}$.

Demonstrație. Fie $z,\xi \in \Gamma_0\,; z=e^{i\theta_1}\,, \xi=e^{i\theta_0}$ şi, de exemplu, $\theta_0<\theta_1$. Putem considera că $\theta_1-\theta_0\le\dfrac{\pi}{2}$.

Fie $u=e^{i\theta}\,(\theta_0\le\theta\le\theta_1)$ şi $r=|u-\xi|$, atunci $|du|=d\theta=(\cos\theta/2)^{-1}\,dr\le\sqrt{2}\,dr$. Aşa cum conturul Γ este de tip Leapunov, derivata $\beta'(z)$ verifică condițiile lui Holder cu un exponent $\alpha\,(0<\alpha<1)$, adică

$$|\beta'(u)-\beta'(\xi)|\le c\,|u-\xi|^{\alpha}=c\,r^{\alpha}\,,c=const.$$

Prin urmare,

$$|\beta(z)-\beta(\xi)-\beta'(\xi)(z-\xi)|=\left|\int_{\gamma}(\beta'(u)-\beta'(\xi))du\right|\le c\int_0^{|z-\xi|}r^{\alpha}\sqrt{2}\,dr=c_1|z-\xi|^{\alpha+1}, \tag{11}$$

unde γ este arcul de cerc, care uneşte punctele z şi ξ. O evaluare similară de forma (11) se obține şi pentru punctele z, $|z|<1$, dacă punem $u=\lambda z+(1-\lambda)\xi\;\;(0\le\lambda\le1)$ şi în calitate de γ vom lua segmentul de dreapta, care uneşte punctele z şi ξ. Deoarece transformarea β este conformă, atunci este îndeplinită condiția $\beta'(\xi)\ne0\;\;(\xi\in\Gamma_0)$ şi, în consecință,

$$\left|\frac{\beta(\xi)-\beta(z)}{\xi-z}\right|\ge c_2>0\;. \tag{12}$$

Din inegalitățile (11) şi (12) obținem:

$$|k(\xi,z)|=\left|\frac{\beta'(z)}{\beta(z)-\beta(\xi)}-\frac{1}{\xi-z}\right|=\frac{|\beta'(z)(\xi-z)-\beta(z)-\beta(\xi)|}{|(\beta(z)-\beta(\xi))(\xi-z)|}\le\frac{c_1|\xi-z|^{\alpha+1}}{c_2|\xi-z|^{2}}=c_3|\xi-z|^{\alpha-1}. \tag{13}$$

Teorema este demonstrată.

Fie Γ_1 şi Γ_2 două linii formate dintr-un număr finit de curbe închise şi deschise fără puncte de autointersecție şi $\beta:\Gamma_1\to\Gamma_2\,, z=\beta(t)$, o funcție bijectivă. Notăm prin S_1 şi S_2 operatorii integrali singulari Cauchy pe aceste linii:

$$(S_1\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\,,t\in L_1\,,\qquad (S_2\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\,,t\in L_2\;,$$

care acționează în spațiile $L_p(\Gamma_1,\rho_1)$ şi, respectiv, în $L_p(\Gamma_2,\rho_2)$, unde $\rho_1(t)=\prod_{k=0}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$ şi $\rho_2(z)=\prod_{k=0}^{n}|z-z_k|^{\beta_k}$, $z_k=\beta(t_k)$, iar prin B notăm operatorul liniar, inversabil şi mărginit din $L_p(\Gamma_1,\rho_1)$ în $L_p(\Gamma_2,\rho_2)$ definit de relația $(B\varphi)(z)=\varphi(\beta^{-1}(z))$.

Teorema 4. *Fie funcția* $\alpha\,,\alpha=\beta^{-1}$, *posedă derivată* α' *care verifică condițiile lui Holder pe* $\Gamma_2:|\alpha'(z_1)-\alpha'(z_1)|\le c|z_1-z_2|^{\mu}\,,c=const,\;0<\mu<1$, *şi este diferită de zero pe* Γ_2, *atunci operatorul* S_2 *poate fi exprimat sub forma*

$$S_2=BS_1B^{-1}+T\,,$$

unde T *este un compact în* $L_p(\Gamma_2,\rho_2)$.

Demonstrație. Fie r o funcție rațională pe Γ_2, $\varphi=B^{-1}r$ şi $T=S_2-BS_1B^{-1}$, atunci

$$(Tr)(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{r(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(z)}.$$

În ultima integrală este justificat schimbul de variabilă $\tau = \alpha(z)$ (*a se vedea* [4]) şi, în rezultat, se obține:

$$(Tr)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{\alpha'(\xi)}{\alpha(\xi) - \alpha(z)} \right) r(\xi) d\xi .$$

Din teorema 3 rezultă că nucleul acestui operator are singularitate slabă pe Γ_2, şi, în baza teoremei 2, este compact. Teorema este demonstrată.

Referințe:

1. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения // УМН, 1948, т.3, вып.3, с.29-112.
2. Gohberg,I., Krupnik N. Introduction to the theory of one-dimensional singular integral operators. - Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1992.
3. Neagu V. Algebre Banach generate de operatori integrali singulari. - Chişinău: CEP USM, 2005.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - Москва: Наука, 1968.

Prezentat la 28.09.2009