STUDIA UNIVERSITATIS
Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2010, nr.2(32)

PRINCIPII DE ECHILIBRU PARETO-NASH-STACKELBERG

Victoria LOZAN, Valeriu UNGUREANU

Catedra Matematică Aplicată

We consider the problem of determining the set of Pareto-Nash-Stackelberg equilibria in strategic games. The main results are formulated and explained. A procedure for the equilibrium set determining is presented. It is applied to solve illustration examples, especially for solving the problem of finding Pareto-Nash-Stackelberg equilibria of four player bi-criteria games through constructing the intersection of the graphs of efficient respond applications.

În lucrare se cercetează noțiunile de echilibru Pareto-Stackelberg şi Pareto-Nash-Stackelberg prin detalierea/particularizarea tezelor teoretice din [1-8]. Se expun succint problema şi rezultatele teoretice de bază, apoi ele sunt aplicate la rezolvarea jocurilor bicriteriale prin metoda construirii intersecției graficelor aplicațiilor de tip cel mai bun răspuns [3].

Echilibrul Pareto-Stackelberg

Definim jocul noncooperatist:

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{N}, \{\mathbf{X}_p\}_{p\in\mathbf{N}}, \{f_p^i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{m_p}, p\in\mathbf{N} \right\rangle,$$

unde:

- $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ este mulțimea jucătorilor,
- $\mathbf{X}_p \subseteq \mathbf{R}^{k_p}$ este mulțimea de strategii ale jucătorului $p \in \mathbf{N}$,
- $k_p < +\infty,\ p \in \mathbf{N}$,
- $\{f_p^i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{m_p}$ sunt funcțiile de câştig ale jucătorului *p* definite pe produsul cartezian $\mathbf{X} = \bigtimes_{p\in N} \mathbf{X}_p$, $\mathbf{f}_p(\mathbf{x})$ – vector-funcția de cost a jucătorul *p*,
$$\mathbf{f}_p(\mathbf{x}) = \left(f_p^1(\mathbf{x}), f_p^2(\mathbf{x}), \ldots, f_p^{m_p}(\mathbf{x})\right).$$

Elementele $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{X}$ sunt numite rezultate ale jocului (situații).

Fiecare jucător individual are de rezolvat o problemă de optimizare multicriterială, adică din mulțimea sa de strategii va selecta strategiile eficiente. Mulțimile de strategii eficiente le vom nota prin **ef X**$_{\mathbf{p}}$, $p = \overline{1,n}$.

Presupunem că jucătorii fac mişcările sale ierarhic:

- primul jucător alege strategia sa $x_1 \in \mathbf{X}_1$ şi o comunică jucătorului doi,
- jucătorul doi alege strategia sa $x_2 \in \mathbf{X}_2$ şi comunică x_1, x_2 jucătorului trei,
- şi aşa mai departe
- ultimul, al n-lea jucător, selectează strategia sa $x_n \in \mathbf{X}_n$, după observarea mişcărilor $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ale jucătorilor precedenți.

În final, în baza rezultatului $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ obținut/cumulat, fiecare jucător îşi calculează valorile funcțiilor sale de cost.

Fără a pierde din generalitate, **presupunem că toți jucătorii îşi maximizează valorile funcțiilor de cost.**

Prin inducție, în ordine inversă, fiecare jucător $n, n-1, \ldots, 2$ calculează valoarile aplicațiilor sale de tip eficient şi primul jucător calculează mulțimea strategiilor sale eficiente:

$$\mathbf{B_n}(x_1, .., x_{n-1}) = \underset{y_n \in \mathbf{X_n}}{Arg\max}\, \mathbf{f}_n(x_1, .., x_{n-1}, y_n),$$

$$\mathbf{B_{n\text{-}1}}(x_1, .., x_{n-2}) = \underset{y_{n-1}, y_n : (x_1, .., x_{n-2}, y_{n-1}, y_n) \in Gr_n}{Arg\max}\, \mathbf{f}_{n\text{-}1}(x_1, .., x_{n-2}, y_{n-1}, y_n),$$

. . .

$$\mathbf{B_2}(x_1) = \underset{y_2,\ldots,y_n:(x_1,y_2,\ldots,y_n)\in Gr_3}{Arg\max} \mathbf{f}_2(x_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in Gr_2}{Arg\max} \mathbf{f}_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

unde:

$$Gr_n = \left\{\mathbf{x}\in\mathbf{X} : x_1 \in \mathbf{X_1}, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{X_{n-1}}, x_n \in \mathbf{B_n}(x_1, \ldots, x_{n-1})\right\},$$

$$Gr_{n-1} = \left\{\mathbf{x}\in Gr_n : x_1 \in \mathbf{X_1}, \ldots, x_{n-2} \in \mathbf{X_{n-2}}, (x_{n-1}, x_n) \in \mathbf{B_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-2})\right\},$$

. . .

$$Gr_2 = \left\{\mathbf{x}\in Gr_3 : x_1 \in \mathbf{X_1}, (x_2, .., x_n) \in \mathbf{B_2}(x_1)\right\}.$$

Evident, $Gr_2 \subseteq Gr_3 \subseteq \cdots \subseteq Gr_n$.

Remarcă. Prin $\mathbf{B}_p$, $p = \overline{2,n}$ notăm mulțimile de *răspunsuri eficiente* ale jucătorilor.

Definiție. *Orice soluție* $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathbf{X}}$ *a jocului se numeşte echilibru Pareto-Stackelberg.*

Teorema 5.1. *Pentru orice joc ierarhic finit mulțimea* $\hat{\mathbf{X}}$ *de echilibre Pareto-Stackelberg este nevidă.*
Demonstrația este evidentă.

Exemplul 1. Se consideră diadic bicriterial cu matricele funcțiilor de câştig:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4{,}3 & 7{,}7 \\ 6{,}6 & 8{,}4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5{,}-1 & 2{,}4 \\ 4{,}3 & 6{,}2 \end{bmatrix}.$$

Primul jucător alege primul şi jucătorul doi alege ultimul.

Primul trebuie să determină graficul Gr_2 pentru jucătorul doi. Elementele grafice eficiente sunt marcate în paranteze unghiulare.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5{,}-1 & \langle 2{,}4 \rangle \\ \langle 4{,}3 \rangle & \langle 6{,}2 \rangle \end{bmatrix}.$$

Primul jucător îşi determină graficul Gr_1 (mulțimea de echilibre Pareto-Stachelberg) în baza graficului Gr_2. Elementele eficiente respective sunt marcate în paranteze unghiulare duble.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4{,}3 & \langle\langle 7{,}7 \rangle\rangle \\ 6{,}6 & \langle\langle 8{,}4 \rangle\rangle \end{bmatrix}.$$

Jocul constă din două echilibre tare Pareto-Stackelberg (1, 2) şi (2, 2) cu valorile funcțiilor câştig ((7, 7), (2, 4)) şi ((8, 4), (6, 2)), respectiv. Să remarcăm că soluțiile (1,2) şi (2,2) sunt şi echilibre Pareto-Nash.

Teorema 5.2. *Dacă orice mulțime de strategii* $\mathbf{X}_p \subset \mathbf{R}^{k_p}$, $p = \overline{1,n}$ *este compactă şi orice funcție de cost* $f_p^i(x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_n), i = \overline{1, m_p}$ $p = \overline{1,n}$ *este continuă în* $(x_p, \ldots, x_n)$ *pe* $\mathbf{X}_p \times \cdots \times \mathbf{X}_n$ *pentu orice* $x_1 \in \mathbf{X}_1$, ..., $x_{p-1} \in \mathbf{X}_{p-1}$ *fixate, atunci mulțimea de echilibre Pareto- Stackelberg* $\hat{\mathbf{X}}$ *este nevidă.*

Demonstrația rezultă din teorema Weierstrass.

Teorema 5.3. *Dacă orice mulțime de strategii* $\mathbf{X}_p \subset \mathbf{R}^{k_p}$, $p = \overline{1,n}$ *este convexă şi orice funcție de cost* $f_p^i(x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m_p}$, $p = \overline{1,n}$ *este strict convexă pe* $\mathbf{X}_p \times \cdots \times \mathbf{X}_n$ *pentu orice* $x_1 \in \mathbf{X}_1$, ..., $x_{p-1} \in \mathbf{X}_{p-1}$ *fixate, atunci jocul are un singur echilibru Pareto-Stackelberg.*

Demonstrația rezultă din proprietăților funcțiilor strict convexe.

Echilibrul Pareto-Nash-Stackelberg

Definim jocul noncooperatist:

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{N}_l, \left\{\mathbf{X_p^l}\right\}_{l\in\mathbf{S}, p\in\mathbf{N_l}}, \left\{f_{p_i}^l(\mathbf{x})\right\}_{i=1}^{m_p}, l \in \mathbf{S}, p \in \mathbf{N_l} \right\rangle,$$

unde:

- $\mathbf{S} = \{1, 2, ..., s\}$ este mulțimea de etape,
- $\mathbf{N_l} = \{1, 2, ..., n_l\}$ este mulțimea jucătorilor de la etapa (nivel) $l \in \mathbf{S}$,
- $\mathbf{X_p^l} \subseteq \mathbf{R}^{k^l p}$ este mulțimea de strategii ale jucătorului $p \in \mathbf{N_l}$ de la etapa $l \in \mathbf{S}$,
- $s < +\infty,\ n_l < +\infty,\ l \in \mathbf{S}$,
- $\left\{ f_{p_i}^l(\mathbf{x}) \right\}_{i=1}^{m_p}$ sunt funcțiile de câștig ale jucătorului p de la etapa l definită pe produsul cartezian $\mathbf{X} = \underset{p \in \mathbf{N_l}, l \in \mathbf{S}}{\times} \mathbf{X}_p^l$, $\mathbf{f}_p^l(\mathbf{x})$ – vector-funcția de cost a jucătorul p,

$$\mathbf{f}_p^l(\mathbf{x}) = \left(f_{p_1}^l(\mathbf{x}), f_{p_2}^l(\mathbf{x}), ..., f_{p_{m_p}}^l(\mathbf{x}) \right).$$

Elementele $\mathbf{x} = \left(x_1^1, x_2^1, ..., x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_{n_2}^2, ..., x_1^s, x_2^s, ..., x_{n_s}^s \right) \in \mathbf{X}$ sunt numite *rezultate ale jocului* (situații). Fiecare jucător are de rezolvat solitar o problemă de optimizare multicriterială, adică din mulțimile sale de strategii va selecta strategiile eficiente. Mulțimile de strategii eficiente le vom nota prin **ef** $\mathbf{X}_p^l$ $l = \overline{1, s}$, $p = \overline{1, n}$.

Presupunem că jucătorii fac mişcările sale ierarhic:

- la prima etapă toți jucătorii *1, 2, ..., n₁* selectează strategiile lor $x_1^1 \in \mathbf{X_1^1}$, $x_2^1 \in \mathbf{X_2^1}$, ..., $x_{n_1}^1 \in \mathbf{X_{n_1}^1}$ simultant şi sunt comunicate la etapa a doua jucătorilor *1, 2, ..., n_2*,
- la etapa a doua jucătorii *1, 2, ..., n_2* selectează simultan strategiile lor $x_1^2 \in \mathbf{X_1^2}$, $x_2^2 \in \mathbf{X_2^2}$, ..., $x_{n_2}^2 \in \mathbf{X_{n_2}^2}$ şi comunică rezultatul etapei a treia jucătorilor *1, 2, ..., n_3*,

ş.a.m.d.

- la etapa *s* jucătorii *1, 2, ..., n_s* selectează simultan strategiile lor eficiente $x_1^s \in \mathbf{X_1^s}$, $x_2^s \in \mathbf{X_2^s}$, ..., $x_{n_s}^s \in \mathbf{X_{n_s}^s}$
  până la ultima etapă.

În final, în baza soluției $\mathbf{x} = \left(x_1^1, x_2^1, ..., x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_{n_2}^2, ..., x_1^s, x_2^s, ..., x_{n_s}^s \right)$ obținute/cumulate, fiecare jucător calculează valorile funcților sale de cost.

Fără a pierde din generalitate, **presupunem că toți jucătorii îşi maximizează valorile funcțiilor de cost**. Este rezonabil de a calcula valorile aplicațiilor de tip eficient prin inducție în ordine inversă în acelaşi mod ca şi la echilibrul Pareto-Stackelberg.

Prin inducție inversă, jucătorii *1, 2, ..., n_l, $l = s, s\text{-}1, ..., 2, 1$,* selectează strategiile lor de echilibru:

$$\mathbf{B_p^s}\left(x^1, ..., x^{s-1}, x_{-p}^s\right) = \underset{y_p^s \in \mathbf{X_p^s}}{Arg\max}\, \mathbf{f}_p^s\left(x^1, ..., x^{s-1}, y_p^s \,\|\, x_{-p}^s\right),\ p \in \mathbf{N_s},\ \mathbf{PNSE^s} = \bigcap_{p \in \mathbf{N_s}} Gr_p^s,$$

$$\mathbf{B_p^{s-1}}\left(x^1, ..., x^{s-2}, x_{-p}^{s-1}\right) = \underset{\substack{y_p^{s-1}, y^s: \\ \left(x^1, ..., x^{s-2}, y_p^{s-1} \| x_{-p}^{s-1}, y^s\right) \in \mathbf{PNSE^s}}}{Arg\max} \mathbf{f}_p^{s-1}\left(x^1, ..., x^{s-2}, y_p^{s-1} \,\|\, x_{-p}^{s-1}, y^s\right),\ p \in \mathbf{N_{s-1}},$$

$$\mathbf{PNSE^{s-1}} = \bigcap_{p \in \mathbf{N_{s-1}}} Gr_p^{s-1},$$

$$\mathbf{B_p^{s-2}}\left(x^1, ..., x^{s-3}, x_{-p}^{s-2}\right) = \underset{\substack{y_p^{s-2} y^{s-1}, y^s: \\ \left(x^1, ..., x^{s-3}, y_p^{s-2} \| x_{-p}^{s-2}, y^{s-1}, y^s\right) \in \mathbf{PNSE^{s-1}}}}{Arg\max} \mathbf{f}_p^{s-2}\left(x^1, ..., x^{s-3}, y_p^{s-2} \,\|\, x_{-p}^{s-2}, y^{s-1}, y^s\right),\ p \in \mathbf{N_{s-2}},$$

$$\mathbf{PNSE^{s-2}} = \bigcap_{p \in \mathbf{N_{s-2}}} Gr_p^{s-2},$$

. . .

$$\mathbf{B}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{1}}\left(x_{-p}^{1}\right)=\underset{y_p^1,y^2,\dots,y^s:\left(y_p^1\|x_{-p}^1,y^2,\dots,y^s\right)\in\mathbf{PNSE^2}}{Arg\max}\mathbf{f}_p^1\left(y_p^1\|x_{-p}^1,y^2,\dots,y^s\right),\ p\in\mathbf{N_1},\ \mathbf{PNSE^1}=\bigcap_{p\in\mathbf{N_1}}Gr_p^1,$$

unde:

$$Gr_p^s=\left\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}:\ \begin{array}{l}x^l\in\mathbf{X^l},\quad l=\overline{1,s-1},\\ x_{-p}^s\in\mathbf{X_{-p}^s}\\ x_p^s\in\mathbf{B_p^s}\left(x^1,\dots,x^{s-1},x_{-p}^s\right)\end{array}\right\},\ p\in\mathbf{N_s},$$

$$Gr_p^{s-1}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbf{PNSE^s}:\ \begin{array}{l}x^l\in\mathbf{X^l},\quad l=\overline{1,s-2},\\ x_{-p}^{s-1}\in\mathbf{X_{-p}^{s-1}}\\ x_p^{s-1}\in\mathbf{B_p^{s-1}}\left(x^1,\dots,x^{s-2},x_{-p}^{s-1}\right)\end{array}\right\},\ p\in\mathbf{N_{s-1}},$$

. . .

$$Gr_p^1=\left\{\mathbf{x}\in\mathbf{PNSE^2}:\ \begin{array}{l}x_{-p}^1\in\mathbf{X_{-p}^1}\\ x_p^1\in\mathbf{B_p^1}\left(x_{-p}^1\right)\end{array}\right\},\ p\in\mathbf{N_1}.$$

Evident, $\mathbf{PNSE^1}\subseteq\mathbf{PNSE^2}\subseteq\cdots\subseteq\mathbf{PNSE^s}$.

Remarcă: Prin $\mathbf{B_p^l}$, $p\in\mathbf{N_l}$, $l=\overline{1,s}$ notăm mulțimile de *răspunsuri eficiente* ale jucătorilor.

Definiție. *Orice element din* $\mathbf{PNSE^1}$ *se numeşte echilibru Pareto-Nash-Stackelberg multi-etape.*

Dacă s = 1 şi $n_1>1$, atunci orice echilibru Pareto-Nash-Stackelberg este echilibru Pareto-Nash. Dacă $s>1$ şi $n_1=n_2=\dots=n_s=1$, atunci orice echilibru este echilibru de tip Pareto-Stackelberg. Astfel, noțiunea de ecihilibru Pareto-Nash-Stackelberg generalizează noțiunile de echilibru Pareto-Stackelberg şi Pareto-Nash.

Exemplul 2. Considerăm jocul bicriterial cu două strategii a patru jucători 2 × 2 × 2 × 2 cu matricele funcțiilor de câştig:

$$a_{11**}=\begin{bmatrix}5,6 & 3,4\\ 1,3 & 7,2\end{bmatrix},\quad a_{12**}=\begin{bmatrix}3,4 & 2,5\\ -1,3 & 4,2\end{bmatrix},\quad a_{21**}=\begin{bmatrix}5,1 & 3,2\\ 6,3 & 1,4\end{bmatrix},\quad a_{22**}=\begin{bmatrix}2,4 & 5,1\\ 3,6 & 7,5\end{bmatrix},$$

$$b_{11**}=\begin{bmatrix}3,6 & 4,1\\ 5,-2 & 6,5\end{bmatrix},\quad b_{12**}=\begin{bmatrix}5,3 & 3,4\\ 2,4 & 5,6\end{bmatrix},\quad b_{21**}=\begin{bmatrix}6,4 & 5,2\\ 4,4 & 2,3\end{bmatrix},\quad b_{22**}=\begin{bmatrix}4,3 & 7,7\\ 6,6 & 8,4\end{bmatrix},$$

$$c_{11**}=\begin{bmatrix}\langle 3,2\rangle & \langle 2,3\rangle\\ 1,3 & 1,2\end{bmatrix},\ c_{12**}=\begin{bmatrix}\langle 7,8\rangle & \langle 3,3\rangle\\ 5,1 & 3,9\end{bmatrix},\ c_{21**}=\begin{bmatrix}\langle 5,6\rangle & \langle 8,4\rangle\\ \langle 6,5\rangle & \langle 4,9\rangle\end{bmatrix},\ c_{22**}=\begin{bmatrix}5,-1 & 2,3\\ \langle 4,3\rangle & \langle 5,2\rangle\end{bmatrix},$$

$$d_{11**}=\begin{bmatrix}1,3 & \langle 2,5\rangle\\ 3,-2 & \langle 4,4\rangle\end{bmatrix},\ d_{12**}=\begin{bmatrix}6,4 & 3,-1\\ \langle 2,5\rangle & \langle 7,4\rangle\end{bmatrix},\ d_{21**}=\begin{bmatrix}4,5 & \langle -1,7\rangle\\ 3,2 & \langle 5,6\rangle\end{bmatrix},\ d_{22**}=\begin{bmatrix}-1,3 & \langle 2,6\rangle\\ \langle 7,1\rangle & \langle 4,5\rangle\end{bmatrix}.$$

La etapa de inducție inversă, al treilea şi al patrulea jucători, aleg strategiile lor la etapa a doua, primul şi al doilea jucători – la prima etapă.

Elementele din Gr_3^2, Gr_4^2 sunt marcate în matrice cu paranteze unghiulare.

Evident, $\mathbf{PNSE^2}$ constă din cinci elemente: (1, 1, 1, 2), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 2), (2, 2, 2, 1) şi (2, 2, 2, 2).

La prima etapa, primul jucător şi al doilea trebuie să joace având jocul matriceal cu matricele:

$$a_{**11}=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet\end{bmatrix},\ a_{**12}=\begin{bmatrix}\langle\langle 3,4\rangle\rangle & \bullet\\ 3,2 & \bullet\end{bmatrix},\quad a_{**21}=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet\\ \bullet & \langle\langle 3,6\rangle\rangle\end{bmatrix},\quad a_{**22}=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet\\ 1,4 & \langle\langle 7,5\rangle\rangle\end{bmatrix},$$

$$b_{**11}=\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix},\quad b_{**12}=\begin{bmatrix} 4{,}1 & \bullet \\ \langle\langle 5{,}2\rangle\rangle & \bullet \end{bmatrix},\quad b_{**21}=\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \langle\langle 6{,}6\rangle\rangle \end{bmatrix},\quad b_{**22}=\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ 2{,}3 & \langle\langle 8{,}4\rangle\rangle \end{bmatrix}.$$

Elementele din Gr_1^1, Gr_2^1 sunt marcate în matrice cu două paranteze unghiulare.

PNSE[1] conține două elemente (2, 2, 2, 1) şi (2, 2, 2, 2), care şi sunt echilibele Pareto-Nash-Stackelberg ale jocului, cu câştigurile ((3, 6), (6, 6), (4, 3), (7, 1)) şi ((7, 5), (8, 4), (5, 2), (4, 5)), corespunzătoare.

Bibliografie:

1. Sagaidac M.,Ungureanu V. Cercetări operaționale. - Chişinău: CEP USM, 2004.
2. Ungureanu V. Solution principles for simultaneous and sequential games mixture // ROMAI Journal, Vol.4, No.1, 2008, p.225-242.
3. Ungureanu V. Nash equilibrium set computing in finite extended games // Computer Science Journal of Moldova, 2006, Vol.14, No.3 (42), p.345-365.
4. Von Stackelberg H. Marktform und Gleichgewicht. - Vienna: Springer Verlag, 1934.
5. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - Москва: Наука, 1982.
6. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. - Москва: Наука, 1985.
7. Podinovskii V.V. and Nogin V.D. Pareto-optimal solutions of the multi-criteria problems. - Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
8. Leitmann G. On Generalized Stackelberg Strategies // Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.26, 1978, p.637-648.

Prezentat la 21.12.2009