STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2021, nr.2(142)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.3-16

CZU: 512.54 **DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.5094499**

UNELE ASPECTE ALE TEORIEI GRUPURILOR DISCRETE DE SIMETRII GENERALIZATE ÎN SENS „FIZIC”

Alexandru LUNGU

Universitatea de Stat din Moldova

În acest articol sunt adunate și analizate din același punct de vedere atât noțiunile, cât și bazele teoriilor generale ale grupurilor de simetrii generalizate recent în sens „fizic”, care au fost elaborate de autor și raportate la conferințe științifice în diferite perioade de timp și au fost publicate parțial în diverse reviste științifice. Sunt comentate și analizate noțiunile noi de structuri algebrice generale, care au fost introduse de autor în procesul de elaborare a teoriei generale a generalizărilor recente în sens „fizic” ale simetriei clasice. Rezultatele științifice principale cunoscute ale autorului despre grupurile de $\bar{P}$-simetrie, W_p-simetrie și W_q-simetrie sunt sistematizate, analizate și completate cu fapte noi.
Cuvinte-cheie: *matematică, geometrie discretă, cristalografie matematică, grupuri, simetrii generalizate.*

SOME ASPECTS OF THE THEORY OF DISCRETE GROUPS OF GENERALISED SYMMETRIES IN THE "PHYSICAL" SENSE

In this article are gathered and analysed from the same point of view both the notions and the bases of the general theories of groups of symmetries recently generalized in the "physical" sense, which were elaborated by the author and reported to scientific conferences at different periods of time, and partially published in various scientific journals. The new notions of general algebraic structures are commented and analysed, and these were introduced by the author in the process of elaborating the general theory of recent generalisations in the "physical" sense of classical symmetry. The main known scientific results of the author about the groups of $\bar{P}$-symmetry, W_p-symmetry and W_q-symmetry are systematized, analysed and supplemented with new facts.
Keywords: *mathematics, discrete geometry, mathematical crystallography, groups, generalised symmetry.*

Introducere

Teoria grupurilor s-a impus de mai mult timp ca un instrument foarte eficient de cercetare a unora dintre cele mai dificile probleme din fizică şi matematică, inclusiv din științele exacte și naturale. Teoria grupurilor discrete de simetrie clasică a atins la momentul actual o înflorire completă şi a pătruns adânc în diferite domenii ale ştiinţelor naturii, în tehnică şi artă, ieşind departe de cadrul cristalografiei clasice. Necesităţile domeniilor tot mai largi de aplicaţii ale acestei teorii au dat naștere la un torent de generalizări ale ei în jumătatea a doua a secolului XX. Dezvoltarea rapidă a metodelor teoriei grupurilor, stimulată de descoperiri noi, a transformat conţinutul teoriei grupurilor de simetrie clasică şi a lansat-o la un nivel calitativ nou. Trecerea de la grupurile cristalografice de simetrie clasică la grupurile cristalografice de antisimetrie sau la cele ale simetriei de colorație și de alte simetrii generalizate în sens „fizic” a deschis posibilităţi şi orizonturi noi atât în domeniile aplicaţiilor lor în diferite ramuri ale ştiinţelor naturale, cât şi în însăşi teoria generală a grupurilor.

Scopul acestei lucrări este: 1) de a aduna, a sistematiza și a descrie din același punct de vedere noțiunile noi de structuri algebrice generale, introduse și analizate de autor în procesul de elaborare a metodelor de deducere a grupurilor de diferite tipuri ale generalizărilor recente; 2) de a analiza unele proprietăți mai esențiale ale acestor structuri algebrice noi; 3) de a descrie esența genaralizărilor recente ale simetriei clasice sub formă de P-simetrie [1], $\bar{P}$-simetrie [2], W_p-simetrie [3] și W_q-simetrie [4] din același punct de vedere; 4) de a analiza și a comenta diferite niveluri de clasificare a P-simetriilor concrete și unele aplicații ale grupurilor de P-simetrie [5-10]; 5) de a compara și a descrie diferite metode concrete de deducere a grupurilor de tipuri diferite ale generalizărilor sub forma de $\bar{P}$-simetrie [11-14], W_p-simetrie [15-19] și W_q-simetrie [20-25]; 5) de a comenta unele rezultate concrete de deducere a grupurilor de simetrii generalizate menționate din grupurile cristalografice de diferite categorii [19, 26-32].

1. Asupra clasificării *P*-simetriilor concrete

Noțiunea de P-simetrie (cvazisimetrie) a fost întrodusă de prof.univ. A.M. Zamorzaev în anul 1967 [1]. Teoria generală a grupurilor de P-simetrie (inclusiv clasificarea lor pe tipuri, elaborarea metodelor generale de deducere din grupurile date iniţial P şi G, elaborarea diferitor niveluri de clasificare a înseşi P-simetriilor, deducerea concretă a grupurilor de anumite tipuri diferite pentru unele P-simetrii concrete din unele categorii de grupuri cristalografice G în calitate de grupuri generatoare, de asemenea, aplicarea grupurilor de anumite P-simetrii concrete la descrierea grupurilor multidimensionale de simetrie de anumite categorii) au constituit obiectul de studiu pe parcursul a patru decenii pentru unii membri ai Şcolii ştiinţifice de geometrie discretă şi cristalografie matematică fondate de A.Zamorzaev (*a se vedea* bibliografia din [5,7] și sursa [26]). Vom analiza succint esența noțiunii de transformare a P–simetriei și unele aspecte de clasificare a P-simetriilor concrete.

Se dă o mulțime de „indici"-calități $N = \{1,2, \ldots, m\}$, formată din calități de aceeași natură scalară (diferite culori, valori diferite ale temperaturii, diferite valori ale densității și altele). Fiecărui punct al unei figuri geometrice i se atribuie cel puţin un „indice" k din N şi se fixează un grup tranzitiv P de substituții ale acestor „indici". Fiecare transformare de P–simetrie se descompune în mod natural în două componente independente, şi anume – transformarea de simetrie clasică g şi substituţia p a „indicilor", care este din grupul dat de substituții. Mulţimea transformărilor de P-simetrie ale figurii „indexate" formează un grup $G^{(P)}$ cu operaţia de înmulţire pe componente. Componentele geometrice g ale transformărilor din $G^{(P)}$ formează un grup G, numit grupul generator pentru $G^{(P)}$, iar substituțiile-componente p formează subgrupul P_1 din grupul de definire P. Dacă P_1=P, atunci grupul $G^{(P)}$ se numeşte grup de P-simetrie completă, iar dacă $e < P_1 < P$, atunci $G^{(P)}$ se numeşte grup de P-simetrie incompletă (în acest caz grupul $G^{(P)}$ poate fi considerat ca grup de P_1-simetrie completă). Vom menţiona că pentru $P_1 = e$ grupul $G^{(P)}$ coincide cu grupul generator G.

Fie $G^{(P)}$ un grup de P-simetrie completă. Atunci $H = G^{(P)} \cap S$ este subgrupul de simetrie din $G^{(P)}$, iar $Q = G^{(P)} \cap P$ este subgrupul de transformări P-identice. Grupul $G^{(P)}$ se numeşte major pentru $Q = P$ (în acest caz $H = G$ şi $G^{(P)} = G \times P$), minor pentru $Q = e$ (atunci $G^{(P)} \cong G$) şi mijlociu pentru $e < Q < P$. Grupurile P-simetriei incomplete în mod analogic se clasifică în semimajore, semiminore şi semimijlocii.

Teorema principală a *P*-simetriei: Orice grup $G^{(P)}$ de P-simetrie completă poate fi dedus din grupul său generator G şi din grupul de definire P găsind în G şi P aşa divizori normali H şi Q, încât există izomorfismul grupurilor-factor G/H și P/Q, înmulţind între dânsele clasele de resturi ce corespund conform izomorfismului menţionat şi considerând reuniunea produselor obținute [5]. Vom remarca că pentru $Q = e$ (grupul $G^{(P)}$ este minor, adică un grup propriu colorat) $G/H \cong P$, deoarece grupul G se aplică omomorf pe grupul P, iar nucleul omomorfismului este H. Dacă grupul P se înlocuişte cu orice subgrup netrivial al său, atunci pe aceeaşi cale se pot obține şi grupurile P-simetriilor incomplete.

Deoarece asupra grupului de definire a P-simetriei nu se pun niciun fel de restricţii, apoi P-simetria cuprinde în sine toate acele generalizări ale simetriei clasice la care legea de schimbare a calităţilor-„indici" se combină direct cu transformarea geometrică ce acţionează numai asupra punctelor şi nu depinde de poziţia lor. Vom enumera simetriile generalizate cunoscute ce se obțin ca cazuri particulare ale P-simetriei: 1) $P \cong C_2$ – antisimetria Şubnikov, definită de grupul $P = \{(1,2)\}$; 2) $P \cong C_2^{(1)} \times \ldots \times C_2^{(l)}$ $(m = 2^l,\ l \geq 2)$ – antisimetria *l*-multiplă; 3) $P \cong C_m$ $(m > 2)$ – simetria de coloraţie Belov (sau *m*-simetria), care se defineşte de grupul ciclic $P = \{(1,2,\ldots,m)\}$; 4) $P \cong D_{m_1}$ $(m = 2m_1,\ m_1 > 2)$ – antisimetria de coloraţie Polya ce corespunde grupului $P = \{(1,2,\ldots,m_1))(\overline{m_1}\ldots,\bar{2},\bar{1}),(1,\bar{1})(2,\bar{2})\ldots(m_1,\overline{m_1})\}$ cu $2m_1$ calităţi ce se transformă (m_1 calităţi „pozitive" i şi m_1 calităţi „negative" $\bar{\imath}$) sau $(m_1/-$simetria; 5) $P \cong C_{m_1} \times C_2$ $(m = 2m_1,\ m_1 > 2)$ – antisimetria de coloraţie Neronova-Belov (sau $(p_1, 2 -$ simetria); 6) $P \cong C_{m_1} \times C_2^{(1)} \times \ldots \times C_2^{(l)}$ $(m = m_1 \cdot 2^l,\ m_1 > 2,\ l \geq 2)$ – antisimetria multiplă de coloraţie (sau $(m_1, 2, \ldots, 2 -$ simetria); 7) $P \cong D_{m_1} \times C_2^{(1)} \times \ldots \times C_2^{(l)}$ $(m = 2m_1 \cdot 2^l,\ m_1 > 2,\ l \geq 1)$ sau $(p_1/) -$ antisimetria multiplă; 8) Grupul P admite reprezentările ireductibile exacte – criptosimetria simplă Niggli-Wondratschek; 9) $P = P_1 \times \ldots \times P_l$, unde fiecare P_i $(i = 2,\ldots,l)$ admite reprezentările ireductibile exacte – criptosimetria multiplă Niggli-Wondratschek.

În calitate de schemă geometrică a unei P-simetrii se ia un aşa poligon sau poliedru (cu vârfurile numerotate cu „indicii" din mulţimea N) al cărui grup de simetrie clasică generează direct grupul P de substituţii al vârfurilor numerotate. Unele dintre P-simetriile concrete enumerate mai sus au schemă geometrică simplă. De exemplu, antisimetria simplă, *m*-simetria şi (*m/*)-simetria sunt ilustrate de substituţiile vârfurilor numerotate ale segmentului, ale poligonului regulat orientat cu *m* laturi şi, respectiv, ale poligonului simiregulat cu *2m* unghiuri egale.

Au fost elaborate 3 niveluri de clasificare a *P*-simetriilor concrete: 1) abstract; 2) abstracto-concret; 3) geometric. Se numește cristalografică acea *P*-simetrie al cărei grup de definire *P* este tranzitiv și izomorf unui grup de categoria G_{30} (grupuri punctuale cristalografice tridimensionale). Amintim că cele 32 de grupuri cristalografice tridimensionale se împart în 18 clase față de relația de izomorfism. La nivelul abstract *P*-simetria şi P'-simetria sunt echivalente dacă grupurile P şi P' sunt izomorfe. Aşa o clasificare a *P*-simetriilor în principiu nu poate lua în considerare proprietăţile specifice ale substituţiilor grupurilor de definire şi numărul calităţilor transformate. Dacă ne vom mărgini numai la *P*-simetriile cristalografice la nivelul de clasificare abstract, atunci se vor obține numai 18 *P*-simetrii cristalografice diferite, inclusiv simetria clasică.

La nivelul abstracto-concret din grupurile de categoria G_{30} se deduc un şir întreg de *P*-simetrii cristalografice, dar multe dintre ele sunt echivalente între ele. *P*-simetria se numește echivalentă cu P'-simetria dacă sunt verificate condițiile: 1) grupurile de definire sunt tranzitive și izomorfe, 2) ambele grupuri de definire au același grad (fiecare dintre ele transformă același număr de calități-„indici"), 3) subgrupurile lor staționare P_i și P_j' se includ deopotrivă în grupurile respective (adică, există așa un izomorfism γ al grupurilor P și P', încât $\gamma(P_i) = P_j'$). Pentru a deduce *P*-simetrii concrete prin analiza structurii grupului dat cristalografic G, izomorf cu grupul de definire P, ne-am folosit de următoarea metodă: a) în grupul G se găsesc toate subgrupurile adevărate H_i ($H_i < G$); b) din cercetarea ulterioară se elimină toți divizorii normali H_i; c) dintre subgrupurile rămase se admit numai acelea care în intersecție cu subgrupurile conjugate lor dau unitatea grupului. Ca rezultat, din grupurile de categoria G_{30} au fost obținute 45 *P*-simetrii cristalografice diferite [6, 7].

Nivelul abstracto-concret de clasificare a *P*-simetriilor cuprinde cea mai mare parte a *P*-simetriilor concrete bine cunoscute anterior, dar totuşi unele dintre ele nu se deosebesc. Într-adevăr, pentru $P \cong C_6$ sunt echivalente 6-simetria şi (3,2)-simetria, cu toate că ele se deosebesc prin conţinutul lor concret. Acest nivel de clasificare nu permite a deosebi între ele (2,2)-simetria (antisimetria dublă), (2/)-simetria (antisimetria bicoloră Polya) şi simetria neciclică cu 4 culori (de sens Kopţik-Kujukeev), care dau un număr diferit de grupuri pentru acelaşi grup generator. Mai mult decât atât, V.I. Naiş a studiat la începutul anilor 70 ai secolului XX grupurile simetriei magnetice. El considera neechivalente grupurile de forma *2u2v2w, 2u2'u2'v, 2u2'2'u,* unde grupurile de transformare a vectorului spinului *uvw, uv'w', u1'* (izomorfe toate cu grupul abelian *222*) geometric sunt tratate exact ca grupurile $222, 2\bar{2}\bar{2} = 2mm$ și $2\bar{1} = 2/m$ la înlocuirea condiţionată a vectorului axial cu cel polar. În schema abstracto-concretă de clasificare a *P*-simetriilor ele sunt echivalente.

Analiza rezultatelor lui Naiş în domeniul simetriei magnetice a condus la un nou nivel în clasificarea *P*-simetriilor, care a fost numit nivelul geometric. La acest nivel de clasificare se deosebesc 32 *P*-simetrii cristalografice (fiecare grup de definire *P* copie întocmai conţinutul geometric al grupului respectiv de categoria G_{30}). Trecerea la grupurile punctuale necristalografice tridimensionale a contribuit la găsirea aşa-numitelor *P*-simetrii icosaedrice, arbitrar ciclice şi diedrice. Trecerea la grupurile cristalografice spaţiale a condus la aşa-numitele *P*-simetrii supercristalografice [7].

Vom analiza succinct ideile ce au condus la aplicațiile multidimensionale ale grupurilor de *P*-simetrie. „Indicii" și semnele ce sunt adăugate punctelor spaţiului în procesul de definire a *P*-simetriei au un conţinut negeometric în raport cu spaţiul în care se cercetează generalizarea. În ce priveşte dimensiunile suplimentare ale spaţiului, apoi acestor semne și „indici" li se poate atribui un sens geometric care permite a folosi grupurile cristalografice de diferite tipuri ale *P*-simetriilor cristalografice în clasificare geometrică pentru a modela structura anumitor categorii de subgrupuri ale grupurilor de tip Fiodorov *n*-dimensionale. Cercetările din acest domeniu, efectuate în ultimul sfert al secolului XX și în primii 10-15 ani ai secolului XXI de către prof.univ. A.Zamorzaev şi prof.univ. A.Palistrant, au condus la rezultate interesante [5, 7-10].

Dacă semnele "+" şi "-", adăugate punctelor spaţiului *r*-dimensional în cazul grupurilor antisimetriei *l*-multiple de categoria $G_{r\dots}$, vor fi considerate ca semne ale coordonatelor acestor puncte în toate *l* dimensiuni suplimentare, atunci grupurile diferite de categoria $G_{r\dots}^{l}$ (în clasificarea lor completă şi fără a se lua în considerare enantiomorfismul) vor modela grupurile de simetrie subperiodice $(r+l)$-dimensionale de categoria $G_{(r+l)(r+l-1)\dots(r+1)r\dots}$. La rândul lor, grupurile de categoria $G_{r\dots}^{P}$ ale *P*-simetriilor de rozetă ($P \cong G_{20}$) modelează structura grupurilor de categoria $G_{(r+2)r\dots}$, grupurile de categoria $G_{r\dots}^{P}$ ale celor 32 *P*-simetrii cristalografice în clasificare geometrică ($P \cong G_{30}$) modelează structura grupurilor de categoria $G_{(r+3)r\dots}$, iar grupurile de categoria $G_{r\dots}^{P}$ ale *P*-simetriilor hipercristalografice în clasificare geometrică ($P \cong G_{430}$) modelează grupurile de categoria $G_{(r+4)(r+3)r\dots}$.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2021, nr.2(142)
Seria "Științe exacte și economice" *ISSN 1857-2073* *ISSN online 2345-1033* *p.3-16*

2. Produse semidirecte şi împletiri a două grupuri

Fie P un grup tranzitiv de substituţii pe o mulţime finită $N=\{1,2,...,m\}$, G un grup discret de simetrie clasică, iar ϕ un omomorfism cu nucleul H al grupului G pe subgrupul Φ al grupului tuturor automorfismelor grupului P. Mulţimea $G^* = GP$ a perechilor gp, unde $g \in G$ şi $p \in P$, formează un grup cu operaţia

$$g_i p_i * g_j p_j = g_k p_k, \tag{1}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $p_k = (g_j^{-1} p_i g_j) p_j = \overleftarrow{\phi}_{g_j}(p_i) p_j$, iar $\overleftarrow{\phi}_{g_j} = \phi(g_j)$. Grupul obţinut $G^* = GP$ îl vom numi ***produs semidirect de stânga*** al grupului P cu grupul de operatori G, însoţit de omomorfismul ϕ cu nucleul H (însoţit de conjugarea spre stânga a elementelor din grupul P).

În mod analogic se defineşte şi ***produsul semidirect de dreapta*** al grupului P cu grupul de operatori G, însoţit de omomorfismul ϕ cu nucleul H: $G' = PG = \{pg | p \in P, g \in G\}$ (adică, însoţit de conjugarea spre dreapta a elementelor din grupul P). Vom menţiona că în cazul acesta operaţia de grup are forma $p_i g_i * p_j g_j = p_k g_k$, unde $p_k = p_i (g_i p_j g_i^{-1}) = p_i \vec{\phi}_{g_i}(p_j)$, $\vec{\phi}_{g_i} = \phi(g_i)$, iar $g_k = g_i g_j$.

Construim produsul cartezian W al copiilor izomorfe cu grupul dat P şi indexate sus în dreapta cu elemente din G, adică $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$). Vom construi şi includerea izomorfă ϕ a grupului G în grupul tuturor automorfismelor grupului W conform regulii $\phi(g) = \overleftarrow{g}$, unde automorfismul $\overleftarrow{g}$ acţionează asupra elementelor $w =<\dots, p^{g_i}, \dots>$ din W prin intermediul g-deplasărilor la stânga ale componentelor lor, adică $\overleftarrow{g}(w) = w^g =<\dots, p^{g g_i}, \dots>$. Considerăm mulţimea $A = GW$ tuturor perechilor gw, unde $g \in G$ şi $w \in W$. În mulţimea considerată $A = GW$ vom defini legea de compoziţie

$$g_i w_i * g_j w_j = g_k w_k, \tag{2}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = \overleftarrow{g}_j(w_i) w_j = w_i^{g_j} w_j$, iar $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$. Nemijlocit se verifică că A este un grup cu operaţia (2), pe care îl vom numi ***împletire standardă carteziană de stânga*** a grupului P cu grupul de operatori G, însoţită de deplasarea directă la stânga a componentelor. Structura algebrică obţinută vom nota-o cu simbolul $\overleftarrow{G}\ Wr\ P$ sau cu simbolul $\overleftarrow{G} \wr P$ (a se compara cu [15,16]). Menţionăm că rolul grupurilor G şi P în împletirea standardă carteziană de stânga este diferit. Anume: grupul P joacă un rol pasiv, participând cu copiile sale izomorfe în structura considerată, pe când grupul G joacă un rol activ, implicându-se prin intermediul elementelor sale în operaţia de grup, generând anumite automorfisme ale grupului W. Toate automorfismele neidentice ale grupului W, generate de elementele g din grupul G, prin intermediul g −deplasărilor la stânga a componentelor din $w \in W$, sunt automorfisme externe. Este evident şi faptul că grupul A poate fi privit ca un produs semidirect de stânga al grupului W cu grupul de operatori G, însoţit de izomorfismul $\phi: G \to AutW$, unde $\phi(g) = \overleftarrow{g}$.

În particular, dacă W este un produs direct al copiilor izomorfe cu grupul P şi indexate cu elemente din grupul G, atunci prin analogie se va obţine ***împletirea standardă directă de stânga*** a grupurilor P şi G, care se notează cu simbolul $\overleftarrow{G}\ wr\ P$ sau cu simbolul $\overleftarrow{G} \wr P$.

În mod analogic se defineşte şi ***împletirea standardă carteziană de dreapta*** $B = WG = \{wg | w \in W, g \in G\}$ a grupului P cu grupul de operatori G, însoţită de deplasarea inversă la dreapta a componentelor, adică însoțită de izomorfismul $\phi: G \to AutW$, unde $\phi(g) = \vec{g}$, $\vec{g}_i(w_j) = w_j^{g_i^{-1}}$ şi $w_j^{g_i^{-1}}(g_k) = w_j(g_k g_i^{-1})$.

Find date grupurile G, P şi $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$), considerăm includerea izomorfă $\phi: G \to AutW$ conform regulii $\phi(g) = \overleftarrow{g}$, unde automorfismul $\overleftarrow{g}$ acţionează asupra elementelor w din W prin intermediul g-deplasărilor la stânga ale componentelor lor, de asemenea, omomorfismul $\tau: G \to AutW$ cu nucleul $Ker\tau = H$, unde $\tau(g) = \vec{\tau}_g$ şi $\vec{\tau}_g(w) = g w g^{-1}$. În mulţimea $C=WG$ tuturor perechilor wg, unde $w \in W$ şi $g \in G$, vom defini legea de compoziţie

$$w_i g_i * w_j g_j = w_k g_k, \tag{3}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} \vec{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\vec{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$. Nemijlocit se verifică că mulţimea C formează un grup cu legea de compoziţie (3). Vom numi grupul C ***împletire standardă carteziană încrucişată*** a grupului pasiv P cu grupul activ G, însoţită de deplasarea directă la stânga a componentelor şi de omomorfismul τ al conjugării spre dreapta. Vom nota-o cu simbolul $P\ \overrightarrow{W} r_{\tau H(\Phi)} \overleftarrow{G}$ sau cu simbolul $P\ \vec{\wr}_{\tau H(\Phi)} \overleftarrow{G}$, unde $H = Ker\tau$, iar $\Phi = Im\ \tau = \tau(G) < AutW$ (a se compara cu [21,22]). În particular, dacă W este produsul direct al copiilor izomorfe cu grupul P şi indexate cu elemente din grupul G, atunci prin analogie vom obţine ***împletirea standardă directă încrucişată*** a grupurilor P şi G, pe care vom nota-o cu simbolul $P\ \vec{w}r_{\tau H(\Phi)}\overleftarrow{G}$ sau cu simbolul $P\ \vec{\wr}_{\tau H(\Phi)}\overleftarrow{G}$.

Vom menţiona că dacă $Ker\tau = G$, atunci toate automorfismele însoţitoare $\vec{\tau}_g$ ale conjugării de dreapta coincid cu automorfismul identic al grupului W şi, ca consecinţă, împletirea standardă carteziană încrucişată a grupului P cu grupul G degenerează în împletire standardă carteziană de stânga a grupului P cu grupul G, însoţită de deplasarea directă la stânga a componentelor elementelor din grupul $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$.

Prezintă interes şi forma operaţiei (3) pe mulţimea D a tuturor perechlor wg, unde $w \in DiagW$ şi $g \in G$, care este un subgrup din C. Elementele din D se înmulţesc conform legii

$$w_i g_i \bullet w_j g_j = w_k g_k, \tag{4}$$

unde $w_k = w_i \vec{\tau}_{g_i}(w_j)$, iar $g_k = g_i g_j$. Operaţia (4) ne arată că D este un produs semidirect de dreapta al grupului $DiagW$ cu grupul de operatori G, însoţit de omomorfismul $\tau: G \to Aut(DiagW)$. Menţionăm că grupul $DiagW$ este izomorf cu grupul iniţial P, de aceea $Aut(DiagW) \cong AutP$.

3. Aplicaţii cvasiomomorfe de grupuri

Fie date două grupuri G şi P, de asemenea, şi omomorfismul $\varphi: G \to \Phi \leq AutP$, cu nucleul $Ker\varphi = H$, unde $\varphi(g) = \overleftarrow{\varphi_g}$ şi automorfismul $\overleftarrow{\varphi_g}$ acţionează asupra elementelor din grupul P prin conjugarea spre stânga: $\overleftarrow{\varphi_g}(p) = g^{-1}pg$. Aplicaţia μ a grupului G în grupul P (adică, pe o submulţime P' a grupului P), conform regulii $\mu(g) = p$, se numeşte **cvasiomomorfism de stânga**, dacă pentru orice g_1 şi $g_2 \in G$, din faptul că $\mu(g_1) = p_1$ şi $\mu(g_2) = p_2$ rezultă că $\mu(g_1 g_2) = \overleftarrow{\varphi}_{g_2}(p_1)\, p_2 = p_3$, unde $p_1, p_2, p_3 \in P'$, iar $\overleftarrow{\varphi}_{g_2} = \varphi(g_2)$ este automorfismul grupului P ce corespunde lui $g_2 \in G$ la omomorfismul φ (a se compara cu [17]).

În continuare vom formula câteva proprietăţi ale aplicaţiei cvasiomomorfe de stânga: 1) Dacă nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi: G \to AutP$ coincide cu întreg grupul G, atunci cvasiomomorfismul de stânga μ al grupului G în grupul P degenerează în omomorfism obişnuit; 2) La cvasiomomorfismul de stânga μ al grupului G în grupul P imaginea unităţii 1 din G este unitatea e a grupului P; 3) Nucleul cvasiomomorfismului de stânga μ al grupului G în grupul P este un subgrup H' din G, care, în general, nu este un divizor normal: $H' < G$; 4) La cvasiomomorfismul de stânga μ al grupului G în grupul P cu nucleul H', fiecărei clase de resturi de dreapta a grupului G în raport cu subgrupul H' i se pune în corespondenţă unul şi numai unul din elementele grupului P, iar claselor diferite – elemente diferite din P; 5) Dacă grupul G la cvasiomomorfismul de stânga μ se aplică pe submulţimea P' a grupului P, atunci P' nu întotdeauna este grup; 6) Dacă H' reprezintă nucleul cvasiomomorfismului de stânga μ al grupului G pe submulţimea P' din P, atunci indicele subgrupului H' în G coincide cu puterea submulţimii $P' = Im\mu$; 7) Dacă nucleul H' al cvasiomomorfismului de stânga μ al grupului G în grupul P este divizor normal în G, atunci elementelor $h \in H'$ le corespund în conformitate cu omomorfismul însoţitor $\varphi: G \to AutP$ numai astfel de automorfisme $\overleftarrow{\varphi}_h$, acţiunea cărora asupra $\mu(G) = P'$ coincide cu acţiunea automorfismului identic $\overleftarrow{i}$ al grupului P.

Dacă $\varphi(g) = \vec{\varphi}_g$, unde $\vec{\varphi}_g(p) = gpg^{-1}$, apoi aplicaţia μ a grupului G pe submulţimea P' din grupul P, conform regulii $\mu(g) = p$, se numeşte **cvasiomomorfism de dreapta**, dacă pentru orice g_1 şi $g_2 \in G$, din faptul că $\mu(g_1) = p_1$ şi $\mu(g_2) = p_2$ rezultă că $\mu(g_1 g_2) = p_1 \vec{\varphi}_{g_1}(p_2) = p_3$, unde $p_1, p_2, p_3 \in P'$ (a se compara cu [11-13]). Vom spune că φ este omomorfismul însoţitor al aplicaţiei μ. Vom menţiona că şi aplicaţiile cvasiomomorfe de dreapta verifică proprietăţi similare celor ale cvasiomomorfismelor de stânga.

Aplicaţia $\tilde{\mu}$ a grupului G în mulţimea claselor de resturi de dreapta ale grupului P în raport cu subgrupul său adevărat Q, conform legii $\tilde{\mu}(g_i) = Qp_i$, se numeşte **cvasiomomorfism de dreapta generalizat**, dacă $\tilde{\mu}(g_i) = Qp_i$ şi $\tilde{\mu}(g_j) = Qp_j$ implică egalităţile $\tilde{\mu}(g_i g_j) = Qp_i \cdot \vec{\varphi}_{g_i}(Qp_j) = Qp_k$. În acest caz φ se numeşte omomorfismul însoţitor al aplicaţiilor $\tilde{\mu}$ (a se compara cu [14,7]).

Dacă nucleul $Ker\varphi = 1$, atunci μ se numeşte **cvasiomomorfism de stânga (respectiv, de dreapta) natural**. Cvasiomomorfismul μ al grupului G pe submulţimea W' din grupul $W = \bar{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$ se numeşte **cvasiomomorfism de stânga natural direct**, dacă automorfismul $\bar{\varphi}_g = \bar{g}$ acţionează asupra elementelor w din $\mu(G)$ prin intermediul g-deplasărilor la stânga ale componentelor, adică $\bar{g}(w) = \bar{g}(< p^{g_1}, p^{g_2}, \dots, p^{g_k}, \dots >) =< p^{gg_1}, p^{gg_2}, \dots, p^{gg_k}, \dots >= w^g$ (a se compara cu [17]). Pentru ca aplicaţia μ a grupului G pe submulţimea W' din $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times \dots$ să fie un cvasiomomorfism de stânga natural direct, este necesar şi suficient ca $w_i^{g_j} w_j = \bar{g}_j(w_i) w_j = w_k \in W'$ pentru orice g_j, $g_i \in G$, $w_i, w_j \in W'$ şi $\mu(g_j) = w_j$. Mai mult decât atât, pentru ca cvasiomomorfismul de stânga natural exact μ cu nucleul $Ker\mu = H$ al grupului G pe subgrupul W' din grupul W să coincidă cu omomorfismul obişnuit, este necesar şi suficient ca $W' \leq DiagW$ şi $G/H \cong W'$.

Aplicaţia $\tilde{\mu}$ a grupului G pe submulţimea X a mulţimii tuturor claselor de resturi de stânga ale grupului W în raport cu subgrupul său V, conform regulii $\tilde{\mu}(g) = wV$, se numeşte **cvasiomomorfism de stânga natural exact generalizat**, însoţit de deplasare la stânga directă, dacă, pentru orice $g_i, g_j \in G$, relaţiile $\tilde{\mu}(g_i) = w_i V$ şi $\tilde{\mu}(g_j) = w_j V$ implică $\tilde{\mu}(g_i g_j) = (w_i V)^{g_j} * w_j V = w_k V$, unde $w_i V$, $w_j V$, $w_k V \in X$. Este evident că dacă $V = e$, atunci cvasiomomorfismul de stânga natural exact generalizat degenerează în cvasiomomorfism de stânga natural exact (a se compara cu [18]).

Acum, fie că pentru grupurile G, P şi $W = \bar{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$) sunt date două aplicaţii: a) aplicaţia izomorfă $\varphi: G \to AutW$ după regula $\varphi(g) = \bar{g}$, unde automorfismul $\bar{g}$ acţionează asupra elementelor w prin intermediul g-deplasărilor de stânga ale componentelor lor; b) omomorfismul $\tau: G \to \Phi \leq AutW$ cu nucleul $Ker\tau = H$, unde $\tau(g) = \vec{\tau}_g$ şi $\vec{\tau}_g(w) = gwg^{-1}$. Aplicaţia α a grupului G pe submulţimea W' din grupul W, conform regulii $\alpha(g) = w$, se numeşte **cvasiomomorfism încrucişat**, însoţit de deplasarea la stânga directă a componentelor şi de omomorfismul τ al conjugării spre dreapta, dacă pentru orice g_i şi g_j, ce aparţin grupului G, din faptul că $\alpha(g_i) = w_i$ şi $\alpha(g_j) = w_j$ urmează că $\alpha(g_i g_j) = w_i^{g_j} \vec{\tau}_{g_i}(w_j) = w_k$, unde $w_i, w_j, w_k \in W'$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\vec{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$ (a se compara cu [20-22]).

Vom menționa că pentru toţi $\vec{\tau}_g = \vec{1}$ (unde $\vec{1}$ este automorfismul identic al grupului W pentru toţi $g \in G$) cvasiomomorfismul încrucişat α al grupului G în grupul W degenerează în cvasiomomorfism de stânga natural direct. Dacă $w^g = w$ (pentru toţi $g \in G$ şi $w \in \alpha(G)$), atunci cvasiomomorfismul încrucişat α degenerează în cvasiomomorfism de dreapta, însoţit de omomorfismul τ. Vom remarca că orice automorfism $\bar{g}$ din grupul $\bar{G} = \varphi(G)$, unde φ este o includere izomorfă a grupului G în grupul $AutW$, aplică identic orice element w din subgrupul $DiagW$. Cu alte cuvinte, restricţia automorfismului $\bar{g}$ al grupului W pe subgrupul său $DiagW$ este pur şi simplu aplicaţie identică.

În continuare vom formula câteva proprietăţi specifice ale cvasiomomorfismului încrucişat a două grupuri: 1) La cvasiomomorfismul încrucişat α al grupului G în grupul W, imaginea unităţii din G întotdeauna este unitatea din W; 2) Nucleul cvasiomomorfismului încrucişat α al grupului G în grupul W este un subgrup al grupului G, care, în general, nu este divizor normal: $Ker\alpha = H' < G$; 3) Pentru ca la cvasiomomorfismul încrucişat α cu nucleul $Ker\alpha = H'$ al grupului G pe submulţimea W' din grupul W fiecărei clase de resturi de stânga gH' să-i corespundă doar un singur element w din W', este necesar şi suficient ca pentru orice element $h \in H'$ şi $w \in W'$ să se verifice egalitatea $w^h = w$; 4) Dacă nucleul H' al cvasiomomorfismului încrucişat α al grupului G în grupul W este subgrup al nucleului H al omomorfismului însoţitor τ, atunci la aplicaţia α fiecărei clase de resturi de dreapta $H'g$ a grupului G în raport cu subgrupul H' i se va pune în corespondenţă doar un singur element w din grupul W; 5) Dacă nucleul H' al cvaziomomorfismului încrucişat α al grupului G în grupul W este divizor normal în G ($H' \lhd G$) şi se include în nucleul H al omomorfismului însoţitor τ, atunci: a) fiecărei clase de resturi de stânga gH' aplicaţia α îi pune în corespondenţă numai un singur element w din grupul W; b) pentru orice $h \in H'$ şi $w \in \alpha(G)$ are loc egalitatea $w^h = w$; c) elementelor $h \in H'$ le corespund conform omomorfismului τ numai acele automorfisme $\vec{\tau}_h$, acţiunea cărora asupra $\alpha(G)$ coincide cu acţiunea automorfismului identic i al grupului W; d) tuturor elementelor gh din clasa de resturi fixată gH' le corespund conform omomorfismului însoţitor τ numai acele automorfisme $\vec{\tau}_{gh}$ acţiunea cărora asupra lui $\alpha(G)$ este aceeaşi; 6) Dacă grupul G la cvasiomomorfismul încrucişat α se aplică pe submulţimea W' a grupului W, atunci W' nu întotdeauna este grup; 7) Restricţia pe H a cvasiomomorfismului încrucişat α cu nucleul $Ker\alpha = H'$ al grupului G pe submulţimea W' din grupul W, însoţit de deplasarea directă la stânga şi omomorfismul τ al conjugării spre dreapta cu nucleul $Ker\tau = H$, este un cvasiomomorfism de stânga natural. Mai mult decât atât, $\propto(H) = W^*$, unde $w_0 \subseteq W^* \subseteq W'$.

Aplicaţia $\tilde{\propto}$ a grupului G pe submulţimea X a mulţimii tuturor claselor de resturi de dreapta a grupului W în raport cu subgrupul său V, conform regulii $\tilde{\propto}(g) = Vw$, o vom numi **cvasiomomorfism încrucişat generalizat** însoţit de deplasare directă la stânga şi de omomogfismul τ al conjugării spre dreapta, dacă, pentru orice g_i şi g_j din G, relaţiile $\tilde{\propto}(g_i) = Vw_i$ şi $\tilde{\propto}(g_j) = Vw_j$ implică $\tilde{\propto}(g_i g_j) = (Vw_i)^{g_j} * \overrightarrow{\tau_{g_i}}(Vw_i) = Vw_k$, unde $Vw_i, Vw_j, Vw_k \in X$, iar $\vec{\tau}_{g_i} = \tau(g_i) \in \Phi \leq AutW$. Vom menţiona că pentru $V = w_0$ aplicaţia $\tilde{\alpha}$ degenerează în cvasiomomorfism încrucişat. Dacă $\vec{\tau}_g = \vec{1}$ (pentru toţi g din G), atunci aplicaţia $\tilde{\alpha}$ degenerează în cvasiomomorfism de stânga natural exact generalizat. Dacă însă $w^g = w$ pentru toţi g din grupul G şi $w \in \tilde{\alpha}(G)$, atunci $\tilde{\alpha}$ degenerează în cvasiomomorfism de dreapta generalizat, însoţit de omomorfismul τ.

4. Despre simetria generalizată a fugurilor ponderate uniform cu pondere „fizică"

Fie dată o figură F cu grupul discret de simetrie G dintr-un spaţiu geometric S de curbură constantă. Grupul G descompune regulat spaţiul S în domenii fundamentale S_i. Este evident că $S = \bigcup_{i \in I} S_i = \{S_i\}$, unde I este o mulţime de indici de puterea egală cu ordinul grupului G. De asemenea, este dată o mulţime finită $N = \{1,2,\ldots,m\}$, unde „indicii" $r \in N$ sunt nişte calităţi omogene de natură fizică (faze ale aceluiaşi fenomen). Considerăm un grup tranzitiv de substituţii P pe mulţimea dată N. Fie Q un divizor normal al grupului P, care împarte mulţimea N în t submulţimi dizjuncte U_j a câte k „indici" fiecare: $N = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_t$, unde $kt = m$. Menţionăm că subgrupul Q este tranzitiv pe fiecare din submulţimile U_j. Vom nota intersecţia domeniului fundamental S_i cu figura considerată cu simbolul F_i. Vom atribui fiecărui punct interior M_i al domeniului F_i (pentru fiecare $i \in I$ fixat) cel puţin un „indice" r_i din mulţimea considerată N. Dacă tuturor punctelor interioare M_i ale aceluiaşi domeniu F_i li se atribuie acelaşi ansamblu $U_j = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ de „indici" din mulţimea N, atunci repartizarea respectivă vom numi-o ***uniformă***. Astfel, figura geometrică considerată se transformă într-o figură cu încărcătură pe care o vom numi-o ***figură geometrică uniform ponderată „fizic" cu ponderea completă N.*** Mai mult decât atât, din descompunerea regulată a spaţiului $S = \{S_i\}$, generată de grupul discret de simetrie clasică G, vom obţine o descompunere regulată a figurii geometrice uniform ponderate în sens „fizic" $S^{(N)}$ cu ponderea completă N în raport cu grupul său de simetrie.

Transformările mixte $\tilde{g}$ ale figurii ponderate $S^{(N)}$ sunt mai complexe decât transformările de simetrie clasică ale figurii iniţiale neponderate F. Ele includ în sine atât informaţia despre transformarea propriu-zisă a punctelor, cât şi informaţia despre transformarea (schimbarea) „indicilor" r_i, localizaţi în punctele interioare ale domeniilor F_i. Cu alte cuvinte, transformarea $\tilde{g}$ este compusă din două componente: una pur geometrică g de simetrie clasică, care acţionează direct asupra punctelor M şi alta w ce include în sine informaţia completă despre schimbarea totală sau parţială a „indicilor" (a se compara cu [27,28]).

Transformările mixte $\tilde{g}$ ale figurii uniform ponderate $F^{(N)}$ cu pondere scalară (fiecare „indice" din mulțimea N are natură scalară, de exemplu – culoare, temperatură, densitate și altele) sunt formate din două componente independente: transformarea pur geometrică g care acționează numai asupra punctelor M și legea, în general, complexă, w de schimbare a calităților-„indici" localizați în M. Sunt posibile două cazuri: 1) Domeniul de acțiune al legii de schimbare a „indicilor" este ***global*** (în toate punctele „indexate" ale figurii ponderate $F^{(N)}$ acționează aceeași substituție p din grupul inițial de substituții al „indicilor"); vom menționa că în acest caz transformările mixte $\tilde{g} = gp$ ale figurii uniform ponderate $F^{(N)}$ este o transformare de P-simetrie [1]; 2) Domeniul de acţiune al legii de schimbare a „indicilor" este ***local*** (pentru punctele interioare ale diferitor domenii „indexate", în general, există substituţii diferite din grupul iniţial de definire P); deoarece orbita unui punct interior al figurii considerate în raport cu grupul ei de simetrie G are $|G|$ puncte, apoi legea de schimbare a „indicilor" w este complexă și include în sine informația de transformare a acestor „indici" pentru fiecare punct al orbitei. Prin urmare, în acest caz w reprezintă un lanț de lungimea $|G|$ format din elemente p ale grupului inițial dat P; cu alte cuvinte, în acest caz fiecare transformare mixtă $\tilde{g} = gw$ a figurii uniform ponderate $F^{(N)}$ cu pondere scalară este o transformare de simetrie generalizată, care, în general, nu diferă cu nimic de transformarea de W_p-simetrie [3].

Fie că „indicii" $r \in N$ sunt nişte calităţi omogene de natură fizică ce posedă orientaţie (de exemplu, vectori cu module egale dar cu diferite m direcţii), care sunt rigid legate de puncte. Fie că domeniul de acțiune al legii de schimbare a „indicilor" este **global** (nu depinde de poziția punctelor). Ca consecință, în cazul acesta rezultatul acţiunii transformării mixte $\tilde{g} = pg$ asupra punctului „indexat" $< M, i >$ poate fi prezentat sub următoarea formă: $\tilde{g}(< M, i >) = pg(< M, i >) = < g(M), p[g](i) >$, unde $[g]$ reprezintă în formă de substituție legea de acțiune a lui g asupra „indicelui" i. Este evident că în rezultatul acțiunii consecutive asupra punctului „indexat" $< M, i >$ a două transformări mixte $\tilde{g}_1 = p_1 g_1$ şi $\tilde{g}_2 = p_2 g_2$ se va obţine punctul „indexat" $< M', i' >= \tilde{g}_2 \tilde{g}_1(< M, i >) = p_2 g_2 p_1 g_1(< M, i >) = p_2 g_2(< g_1(M), p_1[g_1](i) >) = < g_2 g_1(M), p_2[g_2]p_1[g_1](i) >$. Cu alte cuvinte, dacă $\tilde{g}_2 * \tilde{g}_1 = \tilde{g}_3$, atunci $\tilde{g}_3 = p_3 g_3$, $g_3 = g_2 g_1$, iar $p_3[g_3] = p_2[g_2]p_1[g_1]$, adică, $p_3 = p_2[g_2]p_1[g_1][g_3^{-1}] = p_2[g_2]p_1[g_1][g_1^{-1}][g_2^{-1}] = p_2[g_2]p_1[g_2^{-1}]$. Deci, legea de compoziție a transformărilor mixte $\tilde{g}_i$, la nivel de componente, are forma $\tilde{g}_2 * \tilde{g}_1 = p_2 g_2 * p_1 g_1 = p_2 p_1^{g_2} g_2 g_1 = p_3 g_3 = \tilde{g}_3$, unde $p_1^{g_2} = g_2 p_1 g_2^{-1}$. Am obținut că transformarea mixtă $\tilde{g} = pg$ este nu altceva decât o transformare de $\bar{P}$-simetrie [2], dacă componenta p este un element al grupului de substituții P.

Fie că domeniul de acțiune al legii de schimbare a „indicilor"-calități (mărimi omogene care au orientație) este ***local*** (punctele interioare ale diferitor domenii „indexate", în general, sunt transformate de substituţii diferite din grupul iniţial P). Cu alte cuvinte, fie că legea complexă de schimbare a „indicilor"-calități w depinde de poziția punctelor în care ei sunt localizați. Legea de schimbare a „indicilor" w este complexă și include în sine informația de transformare a „indicilor" pentru fiecare punct al orbitei unui punct, deci w reprezintă un lanț de lungimea $|G|$ format din elemente ale grupului inițial dat P. În cazul acesta transformările mixte $\tilde{g} = gw$ ale figurii uniform ponderate $F^{(N)}$ cu pondere completă N, ce posedă orientații, sunt transformări de W_q-simetrie [4].

5. La teoria grupurilor de $\bar{P}$-simetrie

În general, componentele transformărilor de $\bar{P}$-simetrie nu sunt comutative: $pg \neq gp$, adică $p \neq gpg^{-1}$. Mulţimea transformărilor de $\bar{P}$-simetrie $G^{(P)}$ a figurii „indexate" date formează un grup, care este un subgrup al produsului semidirect de dreapta al grupului de definire P cu grupul generator G, însoţit de un omomorfism marcat $\varphi: G \rightarrow AutP$. Spre deosebire de P-simetrie, în cazul grupurilor de $\bar{P}$-simetrie $G^{(\bar{P})}$ totalitatea $P' = \{p | gp \in G^{(\bar{P})}\}$, în general, nu este grup, dar verifică condiția $e \subseteq P' \subseteq P$. Pentru cazul când P_1 este un subgrup în P sunt posibile 7 tipuri de grupuri: generator ($P_1 = e$), major ($Q = P_1 = P$), minor ($e = Q < P_1 = P$), mijlociu ($e < Q < P_1 = P$), semimajor ($e < Q = P_1 < P$), semiminor ($e = Q < P_1 < P$) şi semimijlociu ($e < Q < P_1 < P$), unde $Q = G^{(P)} \cap P_1 = G^{(P)} \cap P$. Pentru cazul când P_1 nu este subgrup în P sunt posibile încă 2 tipuri de grupuri: pseudominore ($e = Q \subset P_1 \subset P$) şi pseudomijlocii ($e < Q \subset P_1 \subset P$) [2].

Grupul major $G^{(P)}$ de $\bar{P}$-simetrie cu grupul generator G şi nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi: G \rightarrow AutP$ se construieşte ca produsul semidirect de dreapta al lui P cu G, însoţit de omomorfismul marcat φ, unde $\varphi(g) = \vec{\varphi}_g$ şi $\vec{\varphi}_g(p) = gpg^{-1}$. În acest grup major se conţine numaidecât în calitate de subgrup grupul $H^{(P)} = P \times H$, care formal nu se deosebeşte de grupul major de P-simetrie (definit de acelaşi grup P) cu grupul generator H. În orice grup $G^{(P)}$ de $\bar{P}$-simetrie cu grupul generator G, nucleul H al omomorfismului însoţitor, subgrupul Q de transformări P-identice şi subgrupul $H^{'}$ de simetrie pură se conţine în calitate de subgrup un grupul de P-simetrie $H^{(P)}$ cu grupul generator H, cu acelaşi subgrup Q de transformări P-identice şi cu subgrupul de simetrie pură $H^{''}$, unde $H^{''} = H^{'} \cap H$.

Teorema principală a $\bar{P}$-simetriei: Pentru grupurile finite P, orice grup de $\bar{P}$-simetrie cu nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi: G \rightarrow AutP$, unde $\varphi(g) = \vec{\varphi}_g$ şi $\vec{\varphi}_g(p) = gpg^{-1}$, poate fi dedus din grupul său generator G prin următorii paşi: 1) se găsesc în P toate subgrupurile Q şi submulţimile $P^{'}$ ce se descompun în clase de resturi de dreapta în raport cu Q, iar în G toate subgrupurile $H^{'}$ de indice egal cu puterea mulţimii tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui $P^{'}$ în raport cu Q, pentru care există izomorfismul grupurilor-factor $P^{''}/Q$ şi $H/H^{''}$, unde $e \leq Q \leq P^{''} \subseteq P^{'}$, $P^{''} < P$, $Q \lhd P^{''}$, iar $H^{''} = H^{'} \cap H \lhd H$; 2) se construieşte cvasiomomorfismul de dreapta generalizat $\tilde{\psi}$ cu nucleul $H^{'}$ al grupului G pe mulţimea tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui $P^{'}$ în raport cu Q, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul H, şi care păstrează corespondenţa dintre elementele lui $P^{''}$ şi H, obţinută în rezultatul izomorfismului grupurilor-factor P''/Q şi $H/H^{''}$; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare $p^{'}$ din $Qp = \tilde{\psi}(g)$ şi se introduce în mulţimea acestor perechi operaţia $p_i g_i * p_j g_j = p_i \overrightarrow{\varphi_{g_i}}(p_j) g_i g_j = p_k g_k$, unde $\overrightarrow{\varphi_{g_i}} = \varphi(g_i)$ şi $\overrightarrow{\varphi_{g_i}}(p_j) = g_i p_j g_i^{-1}$ (a se compara cu [7,14] .

Vom menţiona că pentru $Q = e$, adică pentru grupurile minore, semiminore şi pseudominore, metoda de mai sus de deducere a grupurilor de $\bar{P}$-simetrie se simplifică mult. Vom formula acum metoda de deducere a grupurilor minore. Pentru grupurile finite P, orice grup minor de $\bar{P}$-simetrie, cu nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi: G \to AutP$, poate fi dedus din grupul său generator G prin următorii paşi: 1) se găsesc în G toate subgrupurile $H^{'}$ de indice egal cu ordinul grupului P; 2) se construieşte cvasiomomorfismul de dreapta μ cu nucleul $H^{'}$ al grupului G pe grupul P, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul H; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare $p = \mu(g)$ din P şi se introduce în mulţimea acestor perechi operaţia $p_i g_i * p_j g_j = p_i \overrightarrow{\varphi_{g_i}}(p_j) g_i g_j = p_k g_k$, unde $\overrightarrow{\varphi_{g_i}} = \varphi(g_i)$ şi $\overrightarrow{\varphi_{g_i}}(p_j) = g_i p_j g_i^{-1}$ (a se compara cu [11,13]).

Din mai multe grupuri punctuale de simetrie concrete au fost deduse ca exemple grupuri de tipuri diferite ale $\bar{P}$-simetriilor ciclice cristalografice (grupul de definire P este izomorf cu un grup punctual cristalografic ciclic de simetrie). Pentru grupurile de tablete (de categoria G_{320}), în calitate de grupuri generatoare au fost deduse toate grupurile minore, semiminore și pseudominore ale $\bar{P}$-simetriilor ciclice și analizată structura lor concretă ([29-32]).

6. Unele proprietăți ale grupurilor discrete finite de W_p-simetrie

Fie M_1 un punct de poziţie generală a figurii geometrice F cu grupul de simetrie G. Acţionând cu grupul G asupra punctului M_1 se obţine un sistem de puncte G-echivalente, numit orbita punctului M_1, i.d. $g_k(M_1) = M_k \in F$, unde $g_k \in G$. Se dă mulţimea ordonată $N = \{1, 2, ..., m\}$ de „indici", care reprezintă m calităţi de aceeaşi natură generală cu caracter scalar (faze ale aceluiaşi fenomen). Fixăm grupul tranzitiv de substituţii P al acestor „indici". Fiecărui punct de poziţie generală a figurii F i se atribuie cel puţin unul dintre „indicii" mulţimii N. În rezultat se obţine figura „indexată" $F^{(N)}$. Construim produsul Cartezian W al copiilor izomorfe cu grupul fixat P, indexate sus în dreapta cu elementele grupului G, adică $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times ... \times P^{g_n} \times ...$.

Se numeşte transformare de W_p-simetrie aşa o aplicaţie izometrică $g^{(w)} = gw$ a figurii „indexate" $F^{(N)}$ pe sine, în care transformarea de simetrie pură g acţionează numai asupra punctelor $M_k = g_k(M_1)$ ale figurii $F^{(N)}$, iar „indicii" atribuiţi punctelor M_k se transformă de către substituţia p^{g_k} („g_k-componentă" în w din W) [3].

Mulţimea $G^{(W_p)}$ a tuturor transformărilor de W_p-simetrie ale oricărei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează un grup cu legea de compoziţie $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} w_j$, iar $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$. Fie $G^{(W_p)}$ un grup de W_p-simetrie. Vom nota prin W' mulţimea tuturor componentelor w din $g^{(w)} \in G^{(W_p)}$. Ca și în cazul $\bar{P}$-simetriei, mulțimea W' verifică condiţia $w_0 \subseteq W' \subseteq W$, unde w_0 este unitatea grupului W. $H = G^{(W_p)} \cap G$ serveşte drept subgrup de simetrie clasică, iar $V = G^{(W_p)} \cap W' = G^{(W_p)} \cap W$ este subgrupul transformărilor W-identice ale grupului $G^{(W_p)}$. Vom numi grupul G grup generator pentru $G^{(W_p)}$, iar mulţimea tuturor grupurilor de W_p-simetrie cu acelaşi grup generator – familie. Vom numi grupul $G^{(W_p)}$ major, minor, mijlociu (V -mijlociu), semimajor (W'-semimajor), semiminor (W'-semiminor), semimijlociu ((W',V) -semimijlociu), pseudominor (W'-pseudominor) sau pseudomijlociu ((W',V) -pseudomijlociu) dacă, respectiv, $w_0 < V = W' = W$, $w_0 = V < W' = W$, $w_0 < V < W' = W$, $w_0 < V = W' < W$, $w_0 = V < W' < W$, $w_0 < V < W' < W$, $w_0 = V \subset W' \subset W$ (dar W' nu este subgrup în W) sau $w_0 < V \subset W' \subset W$ (dar W' nu este subgrup în W) [3].

Dacă subgrupul V de transformări W-identice ale grupului $G^{(W_p)}$ este unitar, atunci omomorfismul φ cu nucleul V al grupului $G^{(W_p)}$ pe grupul său generator G, conform regulii $\varphi(g^{(w)}) = g$, este, pur şi simplu, un izomorfism. Ca consecinţă, grupurile minore, semiminore şi pseudominore de W_p-simetrie sunt izomorfe cu grupurile lor generatoare. Pentru a obţine o generalizare netrivială a simetriei clasice trebuie ca grupul respectiv de substituţii P să verifice condiţia $|P| \geq 2$. În consecinţă, $|W| = |P^G| \geq 2^{|G|} > |G|$. Grupurile minore de W_p-simetrie, dacă ar exista, ar trebui să verifice condiţia $|W| \leq |G|$. Ultima relaţie e incompatibilă cu cerinţa $|W| > |G|$. Deci, grupuri minore de W_p-simetrie, pur şi simplu, nu există.

Grupurile $G^{(W_p)}$ de W_p-simetrie ale unor figuri „indexate" $F^{(N)}$ sunt subgrupuri în împletirile de stânga carteziene standarde ale grupului tranzitiv de substituţii P cu grupul discret de simetrie clasică G al figurii F considerate iniţial, unde automorfismele $\tilde{g}$, care participă în înmulţirea elementelor din $G^{(W_p)}$, sunt generate de g −deplasări la stânga ale componentelor în interiorul elementelor w din grupul $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times \ldots \times P^{g_n} \times \ldots$.
Înseşi figurile „indexate" $F^{(N)}$, care modelează grupurile respective de W_p-simetrie, sunt submulţimi în produsul cartezian al mulţimilor F şi N.

Dintre proprietăţile specifice ale grupurilor de W_p-simetrie ce ţin de structura lor generală vom menţiona doar următoarele: 1) În orice grup de W_p-simetrie $G^{(W_p)}$, cu grupul iniţial de substituţii P şi grupul generator G, submulţimea $W' = \{w | g^{(w)} \in G^{(W_p)}\}$ de substituţii generalizate, subgrupul V de transformări W-identice şi subgrupul de simetrie pură H, se conţine în calitate de subgrup grupul ${G_1}^{(W_1)}$. Grupul ${G_1}^{(W_1)}$ este determinat de acelaşi grup iniţial de substituţii P, are grupul generator G_1 (unde $G_1 \leq G$), iar totalitatea componentelor w, care caracterizează transformarea „indicilor", formează subgrupul W_1 din W, care verifică condiţiile $W_1 \leq DiagW \cong P$ şi $W_1 \subset W'$. Vom menţiona că grupul ${G_1}^{(W_1)}$ are subgrupul V_1 de transformări P -identice (unde $V_1 = V \cap DiagW$) şi acelaşi subgrup de simetrie pură H. Grupul ${G_1}^{(W_1)}$ formal nu se deosebeşte de grupurile de P −simetrie ale lui Zamorzaev. 2) Dacă W este finit, atunci: a) $V^g = wVw^{-1}$ pentru componentele g şi w ale transformărilor $g^{(w)}$ din $G^{(W_p)}$; b) orice element al clasei de resturi Hg este combinat în perechi numai cu fiecare element din aceeaşi clasă de resturi wV, iar elementele claselor diferite Hg_i şi Hg_j sunt combinate în perechi cu elementele claselor diferite w_iV şi, respectiv, w_jV.

Teorema principală a W_p-simetriei: Orice grup de $G^{(W_p)}$ de W_p-simetrie, cu grupul iniţial de substituţii P finit, poate fi dedus din grupul său generator G şi din grupul $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ de substituţii generalizate prin următorii paşi: 1) se caută în W toate subgrupurile V şi submulţimile W' ce se descompun în clase de resturi de stânga faţă de V, iar în G toate subgrupurile H de indice egal cu puterea mulţimii claselor de resturi ale lui W' în raport cu V şi pentru care există izomorfismul $\lambda: G_1/H \to W_1/V_1$, unde $G_1 \leq G, W_1 \leq DiagW$, $W_1 \subset W'$, iar $V_1 = V \cap DiagW$ şi $V_1 \lhd W_1$; 2) se construieşte cvasiomomorfismul de stânga natural exact generalizat $\tilde{\mu}$ cu nucleul H al grupului G pe mulţimea tuturor claselor de resturi de stânga ale submulţimii W' în raport cu V, conform regulii $\tilde{\mu}(g_i) = w_iV$, ce păstrează corespondenţa dintre elementele grupurilor-factor G_1/H şi W_1/V_1, obţinută în rezultatul izomorfismului λ; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare w' din clasa de resturi $wV = \tilde{\mu}(g)$ şi în totalitatea acestor perechi se introduce legea de compoziţie $g_iw_i \circ g_jw_j = g_ig_jw_i^{g_j}w_j = g_kw_k$ [18].

Vom menţiona că pentru grupurile semiminore ($w_0 = V < W' < W$) şi cele pseudominore ($w_0 = V \subset W' \subset W$ şi W' nu-i grup) teorema principală a W_p-simetriei se simplifică mult. În cazul acesta cvasiomomorfismul de stânga natural exact generalizat $\tilde{\mu}$ degenerează în cvasiomomorfism de stânga natural exact μ cu nucleul H al grupului G pe submulţimea W' din W, însoţit de izomorfismul $\phi: G \to AutW$ (conform regulii $\phi(g) = \tilde{g}$, unde $\tilde{g}$ efectuează g-deplasarea la stânga a componentelor în fiecare $w \in W$), şi care păstrează corespondenţa dintre elementele lui G_1 şi W_1, obţinută în rezultatul izomorfismului grupului-factor G_1/H pe W_1, unde $G_1 < G, w_0 \leq W_1 \leq DiagW$, $W = \bar{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ şi $W_1 \subset W'$ [19].

Pentru deducerea concretă a grupurilor semiminore (pseudominore, respectiv) de W_p -simetrie este comod a utiliza următorul algoritm: 1) Având date grupurile G , P şi $W = \bar{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ se găsește în W subgrupul $W'' = DiagW \cong P$ și izomorfismul $\varphi : G \to AutW$ după regula $\varphi(g) = \bar{g}$, unde $\bar{g}$ efectuează g -deplasarea la stânga a componentelor în fiecare $w \in W$; 2) Se descrie acțiunea fiecărui automorfism $\bar{g}$ asupra factorilor P^{g_i} la nivel de substituţii ale lor (acest lucru facilitează descrierea concretă a acțiunii fiecărui automorfism $\bar{g}$ asupra fiecărui element al grupului generalizat de substituții W); 3) În grupul generator G se găsesc toate subgrupurile adevărate posibile H și G_1 ($H < G$ și $G_1 < G$), în grupul W – toate subgrupurile W' (submulţimile cu unitate, respectiv), iar în subgrupul $W'' = DiagW \cong P$ – toate subgrupurile posibile W_1 care verifică condiţiile: $G_1/H \cong W_1$ şi $W_1 = W' \bigcap W''$; 4) Se construiește omomorfismul cu nucleul H al grupului G_1 pe W_1; 5) Se descompune grupul G în clase de resturi de dreapta în raport cu subgrupul H şi se stabileşte aşa o corespondenţă biunivocă μ între descompunerea dată şi submulţimea W' (păstrând corespondenţa dintre elementele subgrupurilor G_1 şi W_1, obţinută în rezultatul omomorfismului cu nucleul H al grupului G_1 pe W_1), care în calitate de aplicaţie a grupului G pe W' ar fi un cvasiomomorfism exact natural de stânga cu nucleul H .

Pentru a prezenta grupurile semiminore și pseudominore $G^{(W_p)}$ de W_p -simetrie este comod de utilizat următorul simbol complex (cu mai mulţi termeni): $G/(P|W'|W_1; G_1/H'/H)$, unde: 1) G – grup generator pentru $G^{(W_p)}$; 2) P – grup iniţial de substituţii; 3) W' – mulţimea „substituţiilor" generalizate ce intră în calitate de componente în $g^{(w)} \in G^{(W_p)}$, unde $w_0 \subset W' \subseteq W = \bar{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$; 4) H – subgrupul de simetrie pură pentru $G^{(W_p)}$ ($H = G^{(W_p)} \bigcap G$); 5) $G_1/H'/H$ – simbolul cu trei termeni al grupului $G_1^{(W_1)}$ de P -simetrie, care reprezintă un subgrup al grupului $G^{(W_p)}$; 6) $G_1/H \cong W_1$, unde $W_1 = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G_1^{(W_1)} \right\} \subset W'$ şi $W_1 \leq DiagW$.

7. Asupra teoriei generale a grupurilor discrete de W_q-simetrie

Fiecărui punct al figurii F cu grupul de simetrie pură G îi vom atribui cel puţin un „indice"-calitate din mulţimea N (N constă din m calităţi de aceeaşi natură ce au orientație, de exemplu, m direcţii diferite ale vectorilor de acelaşi modul) şi fixăm un grup tranzitiv P de substituţii ale acestor „indici". În rezultat se obţine o figură „indexată" $F^{(N)}$. Acționând cu grupul G asupra punctului de poziţie generală M_1 al figurii considerate F în raport cu grupul său de simetrie pură G, vom obține tot sistemul de puncte G-echivalente, i.d. $g_k(M_1) = M_k \in F$, unde $g_k \in G$. Construim produsul cartezian W al copiilor izomorfe cu P, indexate cu elemente din G, adică $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$, unde P^{g_i} sunt copii izomorfe ale grupului iniţial de substituţii P.

Transformare de W_q-simetrie se numește așa o aplicaţie izometrică $g^{(w)} = wg$ a figurii „indexate" $F^{(N)}$ pe sine, în care transformarea de simetrie pură g acţionează şi asupra punctelor $M_k = g_k(M_1)$ ale figurii „indexate" $F^{(N)}$, şi asupra „indicilor" conform unei legi date, iar substituţia p^{g_k} („g_k-componentă" în w din W) este o substituţie suplimentară a „indicilor" atribuiţi punctului M_k .

Mulţimea $G^{(W_q)}$ a tuturor transformărilor de W_q-simetrie ale oricărei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează un grup cu legea de compoziţie $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} \vec{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\vec{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$ [4,20].

Fie $G^{(W_q)}$ un grup de W_q-simetrie. Vom nota prin W' mulţimea tuturor w din $g^{(w)} \in G^{(W_q)}$. Mulțimea W' verifică condiția $w_0 \in W' \subseteq W$, unde w_0 este unitatea grupului W. $H = G^{(W_q)} \cap G$ serveşte ca subgrup de simetrie, iar $V = G^{(W_q)} \cap W' = G^{(W_q)} \cap W$ este subgrupul de transformări W-identice pentru $G^{(W_q)}$. Grupurile de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$ se clasifică pe 9 tipuri în mod analogic grupurilor de W_p-simetrie, inclusiv grupului generator. Ca și în cazul W_p-simetriei, nu există grupuri minore de W_q-simetrie, iar grupurile semiminore și pseudominore sunt izomorfe cu grupurile lor generatoare.

Dacă $G^{(W_q)}$ este un grup finit de W_q-simetrie cu grupul generator G, grupul inițial de definire P, subgrupul V de transformări W-identice și nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau: G \to AutW$ de conjugare spre dreapta, atunci: 1) $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$); 2) $G^{(W_q)}$ este un subgrup al grupului major al aceleiași familii și al aceleiași clase (grupul major se construiește în formă de împletire standardă directă încrucișată a grupurilor P și G); 3) $G^{(W_q)}$ constă din așa transformări $g^{(w)} = wg$, ale căror componente g și w formează, respectiv, G și W', unde $w_0 \subset W' \subseteq W$; 3) aplicația φ a grupului $G^{(W_q)}$ pe G, conform regulii $\varphi[g^{(w)}] = g$, este un omomorfism cu nucleul V, unde V este subgrupul de transformări W-identice din $G^{(W_q)}$ și $w_0 < V < W$.

Vom remarca că sunt verificate și următoarele proprietăți: 1) În legea de compoziție a transformărilor de W_q-simetrie $g^{(w)} = wg$, scrise pe componente, participă 2 automorfisme ale grupului W de tipuri diferite, și anume: a) automorfismul $\tilde{g}$ care acționează asupra elementelor w prin intermediul g-deplasărilor la stânga a componentelor elementare p^{g_i} din w, b) automorfismul $\overrightarrow{\tau_g}$ de conjugare spre dreapta a elementelor w din W', obținut în rezultatul omomorfismului $\tau: G \to \Phi \le AutW$ cu nucleul $Ker\tau = H$, unde $\tau(g) = \vec{\tau}_g$. 2) Acțiunea fiecăruia dintre aceste automorfisme asupra aceluiași element w din grupul W este complet independentă, deci nu depinde de ordinea cu care acționează. 3) Acțiunea la nivel de componente a automorfismului $\overrightarrow{\tau_g}$ în fiecare w din grupul W este echivalentă cu acțiunea lui asupra grupului P, unde $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ ($P^{g_i} \cong P$). Mai mult decât atât, dacă cvasiomomorfismul încrucișat α al grupului G pe submulțimea W' a grupului $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ este însoțit de deplasarea directă la stânga și de omomorfismul τ al conjugării spre dreapta, atunci $Ker\tau$ este izomorf cu centrul grupului inițial P de substituții.

În orice grup de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$, cu grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau: G \to AutW$, subgrupul V de transformări W-identice și subgrupul de simetrie pură H, se conține în calitate de subgrup grupul ${H_1}^{(W_p)}$, care formal nu se deosebește de grupurile de W_p-simetrie, cu grupul generator H_1, același subgrup V de transformări W-identice și subgrupul de simetrie H'', unde $H'' = H \cap H_1$. Mai mult decât atât, dacă grupul $G^{(W_q)}$ are totalitatea W' de substituții generalizate (cu mai multe componente-substituții), atunci în el se conține în calitate de subgrup și ${G_1}^{(W'')}$ cu grupul generator G_1 ($H_1 \le G_1 \le G$), același nucleu H_1 al omomorfismului însoțitor și cu totalitatea W'' de substituții generalizate, unde $W'' = W' \cap DiagW$, care formal nu se deosebește de grupurile de $\bar{P}$-simetrie.

Pentru orice grup de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$ cu grupul generator G, grupul initial de substituții P, grupul finit de substituții generalizate $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde P^{g_i} sunt copii izomorfe ale grupului initial de substituții P), mulțimea W' a tuturor componentelor w din $g^{(w)} \in G^{(W_q)}$ și subgrupul de transformări W-identice V sunt verificate următoarele relații: 1) $V^g = V$ pentru orice $g^{(w)}$ din $G^{(W_q)}$; 2) $\vec{\tau}_{g_i}(V) = ({w_i}^{g_j})^{-1} V {w_i}^{g_j}$ pentru orice ${g_i}^{(w_i)}, {g_j}^{(w_j)} \in G^{(W_q)}$, 3) aplicația σ grupului-factor $G^{(W_q)}/V$ pe mulțimea tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui W' în raport cu V, conform regulii $\sigma(Vg^{(w)}) = Vw$, este un cvasiomomorfism încrucișat generalizat (a se compara cu [20-22].

Metoda universală de deducere: Orice grup de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$, cu grupul inițial de substituții P, grupul finit de substituții generalizate $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$), subgrupul de transformări W-identice V și nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau: G \to AutW$, poate fi dedus din grupul său generator G și din grupul W prin următorii pași: 1) se caută în W toate subgrupurile netriviale $\tilde{\tilde{G}}$-invariante V și toate submulțimile W', care verifică condiția $w_0 \in W' \subseteq W$ şi se descompun în clase de resturi de dreapta faţă de *V*; 2) se construieşte cvasiomomorfismul încrucişat generalizat $\widetilde{\alpha}$ al grupului *G* pe mulţimea tuturor claselor de resturi de dreapta ale submulțimii W' în raport cu *V*, conform regulii $\widetilde{\alpha}(g_i) = Vw_i$; 3) se combină în perechi fiecare g din *G* cu fiecare w' din $Vw = \widetilde{\alpha}(g)$ şi în totalitatea acestor perechi se introduce operaţia $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} \vec{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\vec{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$. Aplicând această metodă vom determina toți termenii simbolului polinominal al grupurilor de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$ deduse. Simbolul polinomial are forma $[P, H_1, \vec{\Phi}, G]/(W'|W_p|W''|V; H_1/H'; G_1|H_1|H'')H$, care include în sine o informaţie destul de largă despre structura concretă a grupului respectiv.

Pentru grupurile semiminore și pseudominore de W_q-simetrie metoda universală se simplifică mult, deoarece pentru ele subgrupul de transformări *W*-identice *V* este unitar [23-25]. Vom formula cazurile particulare respective. Orice grup W'-semiminor (respectiv, W'-pseudominor) de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$ poate fi dedus din grupul său generator *G* şi din grupul de definire $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$, ştiind nucleul H_1 al omomorfismului însoţitor $\tau: G \to AutW$ şi subgrupul de simetrie pură *H* prin următorii paşi: 1) se construieşte cvasiomomorfismul încrucişat α cu nucleul *H* al grupului *G* pe subgrupul netrivial W' (respectiv, pe submulțimea adevărată cu unitate W', care nu este subgrup) al grupului *W*, conform regulii $\alpha(g) = w$; 2) se combină în perechi (în calitate de componente ale transformărilor $g^{(w)} = wg$) elementele din *G* şi W', care corespund unul altuia conform lui α, şi în mulţimea acestor perechi se introduce operaţia $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} \vec{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\vec{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$.

Referințe:

1. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. О группах квазисимметрии (*P*-симметрии). В: *Кристаллография,* 1967, т.12, с.819-825.
2. ЛУНГУ, А.П. *К теории $\bar{P}$-симметрии.* Рукопись депонированна в ВИНИТИ, Москва, 1978, № 1709-78Деп., 16 с.
3. ЛУНГУ, А.П. К классификации групп *W*-симметрии. В кн.: *Исследования по современной алгебре и геометрии.* Кишинёв: Штиинца, 1983, с.79-84.
4. ЛУНГУ, А.П. Основы общей теории W_q-симметрии. В: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica,* 1996, nr.3(22), p.94-100.
5. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., ГАЛЯРСКИЙ, Э.И. и ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Цветная симметрия, ее обобщения и приложения.* Кишинев: Штиинца, 1978. 275 с.
6. ЗАМОРЗАЕВ, А.М, ГУЦУЛ, И.С, ЛУНГУ, А.П. К теории и классификации квазисимметрий. В кн.: *Исследования по дискретной геометрии.* Кишинёв: Штиинца, 1974, с.3-25.
7. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., КАРПОВА, Ю.С., ЛУНГУ, А.П., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *P-симметрия и её дальнейшее развитие.* Кишинёв: Штиинца, 1986. 156 с.
8. ПАЛИСТРАНТ, А.Ф., ЗАМОРЗАЕВ, А.М. Трёхмерные точечные группы гиперкристаллографических *P*-симметрий 2-го порядка и их многомерные приложения. В: *Кристаллография,* 2000, т.45, №1, с.5-11.
9. PALISTRANT, A.F. Using the *P*-symmetry space groups of crystals to investigate 6D symmetry groups. In: *Journal Crystallography Reports,* 2009, vol.54, no.4, p.539-547.
10. ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. Полная схема четырехмерных кристаллографических групп симметри. В: *Кристаллография,* 2012, т.57, №4, p.539-545. (*Crystallography Reports.* July 2012, Volume 57, Issue 4, p.471-477)
11. ЛУНГУ, А.П. *К методики вывода младших групп $\bar{P}$-симметрии.* Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 мая 1979г., №1587-79 Деп., 22 с.
12. ЛУНГУ, А.П. О квазигомоморфизмах групп и *Ф*-инвариантных подгруппах. В кн.: *Общая алгебра и дискретная геометрия.* Кишинёв: Штиинца, 1980, с.47-51.
13. ЛУНГУ, А.П. К выводу групп *Q*-симметрии ($\bar{P}$-симметрии). В: *Кристаллография,* 1980, т.25, вып.5, с.1051-1053.
14. ЛУНГУ, А.П. *Универсальная методика вывода групп $\bar{P}$-симметрии (Q-симметрии).* Рукопись деп. в МолдНИИНТИ 28 июня 1983г., №308М-Д83, 14 с.
15. LUNGU, A.P. On the theory *W*-symmetry groups. (Russian). In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica,* 1992, nr.3(9), p.72-81.

16. ЛУНГУ, А.П. Методика вывода полумладших и псевдомладших групп W-симметрии. В: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica,* 1994, nr.2(15), p.29-39.
17. LUNGU A.P. Some properties of left quasihomomorphic mappings. (Russian). In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica.* 1995, nr.1(17), p.78-81.
18. ЛУНГУ, А.П. Универсальная методика вывода конечных групп W_p-симметрии. В: *Anale ştiinţifice ale Universităţii de Stat din Moldova. Seria „Ştiinţe reale".* Chişinău, 1997, p.16-22.
19. LUNGU, A. Grupuri punctuale cristalografice de W_p-simetrii ciclice. În: *Studia Universitatis Moldaviae. Revistă ştiinţifică. Seria „Ştiinţe exacte şi economice",* 2017, nr.2, p.3-12. ISSN 1857-2073. ISSN online 2345-1033. (http://studiamsu.eu/wp-content/uploads/01.P.3-12Matematica_102.pdf)
20. ЛУНГУ, А.П. К теории групп W_q-симметрии. В: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica*, 1997, nr.2(24), p.77-86.
21. LUNGU, A. W_q –simetria şi împletirile încrucişate de grupuri. În: *Anale ştiinţifice ale Universităţii de Stat din Moldova. Seria „Ştiinţe fizico-matematice".* Chişinău, 1999, p.237-242.
22. LUNGU, A. Discrete groups of W_q-symmetry. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Symmetry and Antisymmetry in Mathematics, Formal Languages and Computer Science. Satelite Conference of 3ECM*, Brasov, 2000, Romania, p.175-184.
23. BRANIŞTE, M., LUNGU, A. Structura generală a grupurilor discrete pseudominore de W_q-simetrie. În: *Studia Universitatis. Revistă ştiinţifică. Seria „Ştiinţe exacte şi economice",* 2010, nr.7 (37), p.5-9. (http://studiamsu.eu/wp-content/ uploads/ 01.-p.05-091.pdf)
24. LUNGU, A., BRANIŞTE, M. Unele aspecte ale teoriei generale a grupurilor discrete pseudominore de W_q-simetrie. În: *Studia Universitatis. Seria „Ştiinţe exacte şi economice",* 2010, nr.7 (37), p.10-19. (http://studiamsu.eu/wp-content/ uploads/02.-p.10-19.pdf)
25. LUNGU, A., BRANIŞTE, M. On methods of deriving the pseudo-minor groups of W_q-symmetry. In: *ROMAI Journal*, 2011, **7,** 1, p.115-124 (http://rj.romai.ro/arhiva/2011/1/Lungu.pdf).
26. LUNGU, A., DAMIAN, F. Şcoala de geometrie discretă şi cristalografie matematică din Chişinău la 60 de ani. În: *Studia Universitatis Moldaviae. Revistă ştiinţifică. Seria „Ştiinţe exacte şi economice",* 2020, nr.7(137), p.31-44. ISSN 1857-2073, (http://studiamsu.eu/wp-content/uploads/6.-p.-31-44-Matematica.pdf).
27. LUNGU, A. Simetria descompunerilor regulate ale spaţiului geometric ponderat cu încărcătură „fizică". În: *Studia Universitatis. Revistă ştiinţifică. Seria „Ştiinţe exacte şi economice",* 2009, nr.7(27), p.5-11.
28. LUNGU, A. The generalized symmetry of the geometrical figures regularly weighted by scalar tasks. In: *Proceedings CMSM4 The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova.* June 25-July 2, 2017, Chisinau, p.219-222. ISBN 978-9975-71-915-5. (http://cmsm4.math.md/proceedings.html)
29. LUNGU, A., ROŞCA, M. Generalizarea grupurilor cristalografice de categoria G_{320} cu $\bar{3}$ –simetrie. În: *Studia Universitatis Moldaviae. Revistă ştiinţifică. Seria „Ştiinţe exacte şi economice"*, 2013, nr.2(62), p.3-9.
30. LUNGU, A., ROŞCA, M. Grupurile cristalografice de 4^bar-simetrie cu grupurile generatoare de categoria G_{320}. În: *Studia Universitatis Moldaviae. Revistă ştiinţifică. Seria „Ştiinţe exacte şi economice",* 2014, nr.2(72), p.39-47. (http://studiamsu.eu/wp-content/uploads/06.-p.39-47.pdf)
31. LUNGU, A. Generalizarea grupurilor discrete de tablete cu 6^bar–simetria. În: *Studia Universitatis Moldaviae. Revistă ştiinţifică. Seria* „Ştiinţe exacte şi economice", 2014, nr.7(77), p.17-25. (http://studiamsu.eu/wp-content/uploads/ 02.-p.17-25.pdf)
32. LUNGU, A. The minor groups of 6^bar-symmetry, generated by tablet groups. In: *The Third Conference of Mathematical Society of Moldova. Proceedings IMCS-50.* August 19-23, 2014, Chisinau, p.130-133. (http://www.math.md/imcs50/Proceedings_IMCS50.pdf)

Date despre autor:
Alexandru LUNGU, doctor habilitat, conferenţiar universitar, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea de Stat din Moldova.
E-mail: lungu.al@gmail.com

Prezentat la 25.02.2021