STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2021, nr.2(142)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-25

CZU: 517.968 DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.5094529

ASUPRA ECHIVALENȚEI UNOR ALGEBRE DE OPERATORI INTEGRALI CU TRANSLAȚII ÎN SPAȚIILE L_p CU PONDERI

Galina VORNICESCU

Universitatea de Stat din Tiraspol

În această lucrare se demonstrează că unele algebre de operatori integrali sunt echivalente cu algebra generată de operatorii integrali singulari cu coeficienți continui pe porțiuni. Cu ajutorul echivalenței se definește noțiunea de simbol pentru operatorii din algebrele abordate în această lucrare, se stabilește că condițiile noetheriene și indicele operatorilor se exprimă prin determinatul simbolurilor lor. În studiul algebrelor respective sunt folosite anumite rezultate ale matematicienilor I.Gohberg și N.Krupnik.

Cuvinte-cheie: *operator integral singular, operator noetherian, regularizare, simbol.*

ON THE EQUIVALENCE OF SOME ALGEBRAS OF INTEGRAL OPERATORS WITH SHIFT IN L_p SPACES WITH WEIGHTS

This paper demonstrates that some integral operator algebras are equivalent to the algebra generated by singular integral operators with piecewise continuous coefficients. With the help of equivalence, the notion of symbol is defined for the operators in the algebras approached in this paper, it is established that the Noetherian conditions and the indices of the operators are expressed by determinant of their symbols. In the study of the respective algebras certain results of the mathematicians I.Gohberg and N.Krupnik are used.

Keywords: *singular integral operator, Noetherian operator, regularisation, symbol.*

Introducere

Prin B (și B cu indici) vom nota spațiile Banach, iar prin $L(\mathsf{B})$ vom nota algebra operatorilor liniari și mărginiți ce acționează în spațiul B.

Definiție. *Două algebre (subalgebre) Banach $\mathsf{A}_1(\subset L(\mathsf{B}_1))$ și $\mathsf{A}_2(\subset L(\mathsf{B}_2))$ le vom numi echivalente dacă există un operator inversabil $\mathsf{M}\in L(\mathsf{B}_1,\mathsf{B}_2)$ astfel încât mulțimea operatorilor de forma $MAM^{-1}(A\in\mathsf{A}_1)$ coincide cu algebra A_2.*

Astfel, având o algebră A_1 echivalentă cu o algebră A_2, atunci unele proprietăți cunoscute pentru operatorii din algebra A_2 se extind și asupra operatorilor din algebra A_1. De exemplu, dacă se cunosc condițiile de inversabilitate (la stânga sau la dreapta) sau de rezolvabilitate normală a operatorilor din algebra A_2, atunci facem concluziile respective de inversabilitate sau de rezolvabilitate normală și pentru operatorii din algebra A_1.

Dacă algebra A_2 este o algebră cu simbol și simbolul operatorului $MAM^{-1}(A\in\mathsf{A}_1)$ are forma $\tilde{A}(X)$, atunci este firesc ca această matrice $\tilde{A}(X)$ să fie numită simbol al operatorului A în algebra A_1. Și în acest caz va fi adevărată următoarea teoremă.

Teoremă. *Operatorul $A\in\mathsf{A}_1$ este noetherian dacă și numai dacă*

$$det\tilde{A}(X)\neq 0.$$

Dacă această condiție este verificată, atunci

$$dimker A = dimker MAM^{-1},\ dimker A^{*} = dimker(MAM^{-1})^{*},$$

iar indicele operatorului A se determină din formula

$$Ind A = ind det\tilde{A}(X).$$

În această lucrare în calitate de algebră A_2 se consideră algebra generată de operatorii integrali singulari cu coeficienți continui pe porțiuni, în care criteriile noetheriene și indicele se exprimă prin simbolul operatorilor, definit în cunoscutele lucrări ale lui I.Gohberg și N.Krupnik (a se vedea [1-5], precum și bibliografia din aceste lucrări). Cu ajutorul echivalenței algebrelor, în particular, se demonstrează că în algebra lui I.Gohberg și N.Krupnik (G.K) în calitate de pondere poate fi luată funcția identică egală cu unu, ceea ce simplifică cu mult definirea simbolului și exprimarea condițiilor noetheriene operatorilor.

1.Teorema ce reduce studiul operatorilor cu involuții la operatori fără involuții

Fie Γ un contur orientat, închis sau deschis de tip Lyapunov și $\alpha(t)$ o funcție care în mod bijectiv transformă conturul Γ în el însuși. Operatorul de forma

$$A = aI + bS + (cI + dS)V, \tag{1.1}$$

unde $a(t), b(t), c(t)$ și $d(t)$ sunt funcții măsurabile și mărginite pe Γ, S este operatorul cu nucleu Cauchy

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ t \in \Gamma,$$

iar V este operatorul de translație,

$$(V\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t)),$$

care se numește *operator integral singular cu translație.*

Vom considera cazul în care $V^2 = I$, adică $\alpha(\alpha(t)) = t$. În plus, vom mai presupune că funcția $\alpha(t)$ posedă derivată $\alpha'(t)$, care verifică condițiile lui Hölder și $\alpha(t)$ nu este identic egală cu t.

Operatorul A îl vom considera în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ cu ponderea

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k},$$

unde $t_k \in \Gamma$, $1 < p < \infty$ și $-1 < \beta_k < p - 1$. În aceste condiții operatorul A este [6] liniar și mărginit în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

De obicei (a se vedea [7-9]), paralel cu operatorul A de forma (1.1) se consideră și operatorul A_V, definit în spațiul $L_p^2(\Gamma, \rho) = L_p(\Gamma, \rho) \times L_p(\Gamma, \rho)$ prim matricea

$$A_V = \begin{vmatrix} aI + bS & cI + dS \\ V(cI + dS)V & V(aI + bS)V \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

Are loc următoarea egalitate

$$V(aI + bS)V = \tilde{a}I + \varepsilon\tilde{b}S + K,$$

unde $\tilde{a}(t) = a(\alpha(t))$, $\tilde{b}(t) = b(\alpha(t))$, K este un operator compact, $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) dacă aplicația α păstrează (schimbă) orientarea conturului Γ. De aici rezultă că operatorul A_V diferă de operatorul

$$\tilde{A}_V = \begin{vmatrix} a & c \\ \tilde{c} & \tilde{a} \end{vmatrix} I + \begin{vmatrix} b & d \\ \varepsilon\tilde{d} & \varepsilon\tilde{b} \end{vmatrix} S \tag{1.3}$$

doar cu un termen compact.

Operatorul $\tilde{A}_V$ este un operator integral singular (***fără translație***), însă este cu coeficienți matriceali. Pentru astfel de operatori cu coeficienți continui, sau continui pe porțiuni, sunt cunoscute [1] condițiile necesare și suficiente noetheriene. Aceste condiții se exprimă prin simbolul operatorilor integrali singulari.

Teorema 1.1 *(a se vedea [1]). Operatorul $\tilde{A}_V$ este noetherian în spațiul $L_p^2(\Gamma, \rho)$ dacă și numai dacă sunt verificate condițiile*

$$det\, \tilde{A}_V(\rho, t, \mu) \neq 0, \tag{1.4}$$

unde $\tilde{A}_V(\rho, t, \mu)$ este simbolul operatorului $\tilde{A}_V$. Dacă condițiile (1.3) sunt îndeplinite, atunci indicile operatorului $\tilde{A}_V$ se calculează din formula

$$Ind\tilde{A}_V = inddet\tilde{A}_V(\rho, t, \mu), \quad t \in \Gamma, \ 0 \leq \mu \leq 1. \tag{1.5}$$

Din lucrările [7-9] se poate deduce următorul rezultat.

Teorema 1.2. *Fie $a(t), b(t), c(t)$ și $d(t)$ funcții continue pe Γ. Operatorul A este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ dacă și numai dacă această proprietate o are operatorul $\tilde{A}_V$ în spațiul $L_p^2(\Gamma, \rho)$. Dacă $\tilde{A}_V$ este noetherian, atunci*

$$IndA = \frac{1}{2} Ind\tilde{A}_V. \tag{1.6}$$

Dacă aplicația α *păstrează* orientarea conturului Γ, atunci afirmațiile teoremei (1.2) rămân valabile și pentru orice funcții $a(t), b(t), c(t)$ *și* $d(t)$ măsurabile și mărginite. Aceasta rezultă (a se vedea [7]) din următoarele tei afirmații:

1. Are loc identitatea

$$\left\| \begin{matrix} I & V \\ I & -V \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} X & Y \\ VYV & VXV \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} I & I \\ V & -V \end{matrix} \right\| = 2 \left\| \left\| \begin{matrix} X + YV & 0 \\ 0 & X - YV \end{matrix} \right\| \right\|, \tag{1.7}$$

unde X, Y, V sunt orice operatori mărginiți care acționează într-un spațiu Banach și $V^2 = I$;

2. Funcția $h(t) = \alpha(t) - t$ nu se anulează pe conturul Γ;
3. Pentru operatorii $X = aI + bS,\ Y = cI + dS$ și $H = (\alpha(t) - t)I$ are loc egalitatea

$$(X - YV)H = H(X + YV) + K,$$

unde K este un operator compact.

Din afirmațiile 1)-3) de asemenea rezultă că operatorul A este normal rezolvabil (sau noetherian) în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$, dacă și numai dacă operatorul $\tilde{A}_V$ este normal rezolvabil (sau noetherian) în spațiul $L_p^2(\Gamma,\rho)$. Mai menționăm că aceste rezultate rămân valabile și în cazul în care coeficienții $a(t), b(t), c(t)$ și $d(t)$ sunt matrice cu elemente de funcții măsurabile și mărginite.

În cazul în care funcția $\alpha: \Gamma \to \Gamma$ *schimbă* orientarea conturului și coeficienții $a(t), b(t), c(t)$ și $d(t)$ sunt continui, atunci teorema 2.1 rezultă din identitatea (1.6) și compacticitatea operatorului $(X - YV)M - M(X + YV)$, unde $(M\varphi)(t) = (\alpha(t) - t)\varphi(t) + \lambda(S\varphi)(t)$, iar λ este un număr complex ce verifică condițiile $\alpha(t) - t \pm \lambda \neq 0$, condiții care asigură rezolvabilitatea normală a operatorului M.

Din identitatea (1.7) mai rezultă că dacă operatorul $\tilde{A}_V$ este noetherian, atunci operatorul A (cu orice coeficienți măsurabili și mărginiți) de asemenea este noetherian, însă reciproca este în general falsă (a se vedea [7]). Un rezultat similar pentru cazul conturului nemărginit a fost demonstrat în lucrarea [10].

Astfel, teorema 1.2 reduce studiul operatorului A cu translație la studiul operatorului $\tilde{A}_V$ fără translație. Din această teoremă și din condițiile noetheriene cunoscute pentru operatorul $\tilde{A}_V$ rezultă următoarea teoremă.

Teorema 1.3. *Fie conturul Γ închis și $a(t), b(t), c(t), d(t)$ funcții continue pe Γ. Operatorul $A = aI + bS + (cI + dS)V$ este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile*

$$\Delta_1(t) = \big(a(t) + b(t)\big)\left(\tilde{a}(t) + \varepsilon\tilde{b}(t)\right) - \big(c(t) + d(t)\big)\big(\tilde{c}(t) + \varepsilon d(t)\big) \neq 0, \tag{1.8}$$

$$\Delta_2(t) = \big(a(t) - b(t)\big)\left(\tilde{a}(t) - \varepsilon\tilde{b}(t)\right) - \big(c(t) - d(t)\big)\big(\tilde{c}(t) - \varepsilon d(t)\big) \neq 0. \tag{1.9}$$

Dacă aceste condiții sunt verificate, atunci

$$Ind A = \frac{1}{2} ind \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)}. \tag{1.10}$$

2. Ecuații integrale singulare cu conjugare complexă

Teorema 1.2 poate fi aplicată și la stabilirea condițiilor noetheriene pentru ecuațiile integrale singulare care conțin funcția necunoscută sub semnul conjugării complexe.

Considerăm ecuația integrală singulară

$$A\varphi = a(t)\varphi(t) + b(t)\overline{\varphi(t)} + c(t)(S\varphi)(t) + d(t)\overline{(S\varphi)(t)} = f(t), \tag{2.1}$$

unde $a(t), b(t), c(t), d(t) \in C(\Gamma)$. Vom studia această ecuație în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ de funcții complexe peste câmpul numerelor reale. În aceste condiții operatorul A devine liniar și mărginit. Rolul operatorului V din schema descrisă mai sus îl va avea operatorul

$$(V\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}.$$

Cu ajutorul lui V operatorul (2.1) se scrie sub următoarea formă

$$A = aI + bV + cS + dVS \tag{2.2}$$

Lema 2.1. *Fie Γ închis, simplu de tip Lyapunov. Atunci operatorul $VSV + S$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$.*

Demonstrație. Notăm prin Γ_0 cercul unitate, ($\Gamma_0 = \{t\ |t| = 1\}$), și prin S_0 operatorul integral singular cu nucleu Cauchy pe Γ_0,

$$(S_0\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi,\ z \in \Gamma_0.$$

Atunci

$$\big((VS_0V + S_0)\varphi\big)(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\xi)}{\bar{\xi} - \bar{z}} d\xi + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi.$$

Așadar, dacă Γ_0 este cercul unitate, atuinci operatorul $VS_0V + S_0$ este compact în $L_p(\Gamma_0,\rho_0)$, unde

$$\rho_0(z) = \prod_{k=1}^{n} |z - z_k|^{\beta_k},\ z_k \in \Gamma_0,\ z_k \neq z_j \text{ , dacă } k \neq j.$$

Fie acum Γ conturul din enunțul teoremei. Atunci, există o aplicație $\nu: \Gamma_0 \to \Gamma$, care posedă derivată $\nu'(z)$, diferită de zero, și verifică condițiile lui Hölder pe Γ_0. Formăm operatorul

$$M: L_p(\Gamma,\rho) \to L_p(\Gamma_0,\rho_0)\ \left(z_k = \nu^{-1}(t_k)\right),$$

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2021, nr.2(142)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-25

inversabil și care acționează conform următoarei reguli: $(M\varphi)(\xi) = \varphi(\nu(\xi))$. Atunci

$$(MSM^{-1} - S_0)\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\left[\frac{\nu'(\xi)}{\nu(\xi)-\nu(z)} - \frac{1}{\xi - z}\right]\varphi(\xi)d\xi\ . \tag{2.3}$$

Așa cum funcția $\nu'(z)$ este diferită de zero și verifică condițiile lui Hölder pe Γ_0, atunci operatorul integral $K = MSM^{-1} - S_0$, definit de egalitatea (2.3), cu nucleul

$$k(\xi, z) = \frac{\nu'(\xi)}{\nu(\xi)-\nu(z)} - \frac{1}{\xi - z}$$

este compact în spațiul $L_p(\Gamma_0, \rho)$. Prin urmare, operatorul $MSM^{-1} - S_0$, definit de egalitatea (2.3), este compact în $L_p(\Gamma_0, \rho)$. Deoarece operatorii V și M comută, atunci sunt adevărate următoarele egalități:

$$M(VSV + S)M^{-1} - VS_0V - S_0 = VMSM^{-1}V + MSM^{-1} - VS_0V - S_0 =$$
$$V(MSM^{-1} - S_0)V + MSM^{-1} - S_0 = VKV + K. \tag{2.4}$$

Din ultima egalitate, ținând cont și de faptul că oparatorul $VS_0V^{-1} + S_0$ este compact, rezultă că și $VSV + S$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$. Lema este demonstrată.

Aplicând lema 2.1, operatorul (2.1) poate fi scris sub forma

$$A = aI + cS + (bI - dS)V + K, \tag{2.1^1}$$

unde K este un operator compact.

Teorema 2.1. *Fie $a(t), b(t), c(t), d(t) \in C(\Gamma)$. Ecuația integrală (2.1) este normal rezolvabilă în $L_p(\Gamma, \rho)$ dacă și numai dacă este verificată condiția:*

$$\Delta(t) = \big(a(t) + c(t)\big)\big(\overline{a(t)} - \overline{c(t)}\big) - \big(b(t) - d(t)\big)\big(\overline{b(t)} + \overline{d(t)}\big) \neq 0, t \in \Gamma. \tag{2.5}$$

Dacă această condiție este verificată, atunci ecuația (2.1) este noetheriană și indicile ei se calculează din formula

$$IndA = -ind\Delta(t). \tag{2.6}$$

Demonstrație. Operatorului $A = aI + cS + (bI - dS)V + K$ îi asociem operatorul A_V, definit de egalitatea (1.2), în care V este operatorul de conjugare complexă, $(V\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}$, $V^2 = I$. În acest caz, ținând cont de afirmațiile lemei 2.1, operatorul respectiv $\tilde{A}_V$, definit de egalitatea (1.3), are forma

$$\tilde{A}_V = \begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} I + \begin{vmatrix} c & -d \\ \bar{d} & -\bar{c} \end{vmatrix} S\ . \tag{2.7}$$

Pentru a putea aplica raționamentele care au fost folosite la demonstrația teoremei 1.3 din paragraful precedent, observăm că condițiile 1)-3) din acest paragraf, relativ la operatorul $\tilde{A}_V$, pot fi înlocuite cu următoarele condiții:

1^1) coincide cu 1) în care rolul lui V îl joacă operatorul $(V\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}$;

2^1) funcția $h(t) = i$ nu se anulează pe Γ;

3^1) pentru operatorii $X = aI + bS$, $Y = cI + dS$ și $H = hI$ are loc egalitatea

$$(X - YV)H = H(X + YV) + K,$$

unde K este un operator compact.

În aceste condiții are loc teorema 1.3 în care operatorul $\tilde{A}_V$ trebuie înlocuit cu operatorul (2.7). Mai rămâne să scriem condițiile cunoscute, necesare și suficiente, în care operatorul (2.7) este noetherian. Ușor se arată că aceste condiții coincid cu condițiile (2.5). Teorema este demonstrată.

3. Echivalența algebrelor $\sum(\Gamma, \rho)$ și $\sum(\Gamma)$

Fie $CP(\Gamma)$ − mulțimea tuturor funcțiilor continue pe porțiuni pe conturul Γ. Notăm prin $\sum(\Gamma, \rho)$ $(\sum(\Gamma, 1))$ algebra generată de operatorii integrali singulari de forma

$$(A\varphi)(t) = a(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

cu coeficienți din $CP(\Gamma)$ în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ $(L_p(\Gamma, 1) = L_p(\Gamma))$. Operatorul A este comod să-l scriem sub altă formă. Pentru aceasta introducem proiectorii lui Riesz, $P = \frac{1}{2}(I + S)$ și $Q = \frac{1}{2}(I - S)$, cu proprietățile $P + Q = I$, $P - Q = S$, și $PQ = QP = 0$. Atunci operatorul A are forma

$$A = cP + dQ,\ \text{unde}\ c(t) = a(t) + b(t)\ \text{și}\ d(t) = a(t) - b(t).$$

Teorema 3.1. *Algebrele $\sum(\Gamma, \rho)$ și $\sum(\Gamma)$ sunt echivalente.*

Pentru a demonstra această teoremă vom avea nevoie de următoarea lemă.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2021, nr.2(142)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-25

Lema 3.1. *Notăm cu* ***Ω*** *mulțimea funcțiilor de forma* $h(t) = \prod_{k=1}^{n}(t - t_k)^{\delta_k}$, *unde* δ_k *sunt numere reale. Operatorii* $h(t)Sh^{-1}(t)I$ *sunt mărginiți în* $L_p(\Gamma, \rho)$ *și aparțin algebrei* $\sum \Gamma, \rho)$ *dacă și numai dacă numerele* δ_k *verifică condițiile*

$$-\frac{1+\beta_k}{p} < \delta_k < 1 - \frac{1+\beta_k}{p} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \; . \tag{3.1}$$

Demonstrație. Se arată ușor că operatorul $h(t)Sh^{-1}(t)I$ este mărginit în $L_p(\Gamma, \rho)$ dacă și numai dacă operatorul S este mărginit în spatiul $L_p(\Gamma, \rho_1)$, unde

$$\rho_1(t) = |h(t)|^p \rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k + p\delta_k}.$$

În baza condițiilor (3.1), avem

$$-1 < \beta_k + p\delta_k < p - 1.$$

Atunci continuitatea operatorului S în spațiul $L_p(\Gamma, \rho_1)$ rezultă din teorema lui B.Hvedelidze [6] despre continuitatea operatorului cu nucleu Cauchy în spații cu ponderi. Mai rămâne să arătăm că operatorul $h(t)Sh^{-1}(t)I$ aparține algebrei $\sum(\Gamma, \rho)$. Notăm prin $f_k(t)$ funcția $f_k(t) = t^{-\delta_k}$, continuă* în orice punct de pe conturul Γ cu excepția, posibil, în punctul t_k, iar prin $f(t)$ notăm funcția $f(t) = \prod_{k=1}^{n} f_k(t)$. Prin calcule directe se verifică următoarea egalitate:

$$[h(t)P(h(t)f(t))^{-1}I + Q]\;(PfP + Q)\,\varphi = (PfP + Q)\;[h(t)P(h(t)f(t))^{-1}I + Q]\,\varphi = \varphi$$

valabilă pentru orice funcție φ, care verifică condițiile lui Hölder pe conturul Γ. Așa cum operatorul $h(t)Sh^{-1}(t)I$ este mărginit în spatiul $L_p(\Gamma, \rho)$, atunci

$$h(t)P\big(h(t)f(t)\big)^{-1}I + Q = (PfP + Q)^{-1}. \tag{3.2}$$

De aici rezultă că $hPh^{-1}I = (PfP + Q)^{-1}fI$. Din acestă egalitate rezultă că operatorul $PhPh^{-1}I$ aparține algebrei $\sum(\Gamma, \rho)$. Lema este demonstrată.

Demonstrația teoremei 3.1. Considerăm operatorul

$$(M\varphi)(t) = \rho^{1/p}(t)\varphi(t)\,.$$

Avem $\|M\varphi\|_{L_p(\Gamma)} = \|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)}$, deci M în mod isometric aplică spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ pe $L_p(\Gamma)$. Evident, $MaM^{-1} = aI$ pentru orice funcție $a \in PC(\Gamma)$ și mai rămâne de demonstrat că operatorul MSM^{-1} aparține algebrei $\sum(\Gamma)$. După un șir de raționamente și calcule (la detalii nu ne vom opri) se arată că operatorul MSM^{-1} poate fi reprezentat sub forma

$$MSM^{-1} = \nu(t)\prod_1^n (t - t_k)^{\beta_k/p}\, S \prod_1^n (t - t_k)^{-\beta_k/p}\, \nu^{-1}(t)I,$$

unde $\nu(t)$ este o funcție continuă și diferită de zero (cu excepția punctelor t_k) pe conturul Γ. Numerele $\alpha_k = \beta_k/p$ satisfac condițiile

$$-1/p < \alpha_k < 1 - 1/p. \tag{3.3}$$

Prin urmare, operatorul $\prod_1^n (t - t_k)^{\beta_k/p}\, S \prod_1^n (t - t_k)^{-\beta_k/p} I$ verifică condițiile lemei 3.1, din care rezultă că el aparține algebrei $\sum(\Gamma)$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Corolarul 3.1. *Orice algebre* $\sum(\Gamma, \rho_1)$ *și* $\sum(\Gamma, \rho_2)$ *sunt echivalente.*

Observația 1. Din rezultatele lucrării menționate a lui B.Hvedelidze se poate demonstra că condițiile (3.1) sunt nu doar suficiente, dar și necesare, în care operatorii $\prod_1^n (t - t_k)^{\beta_k/p}\, S \prod_1^n (t - t_k)^{-\beta_k/p} I$ aparțin algebrei $\sum(\Gamma)$.

Observația 2. Teorema 3.1 reduce studiul ecuațiilor integrale singulare în spațiile cu ponderi la probleme similare, însă în *spații fără ponderi*. În particular, definirea simbolului operatorilor în spații cu ponderi se reduce la simbolul operatorilor respectivi în *spații fără ponderi,* având și o fomă mai simplă. De exemplu, se poate arăta că simbolul $H(t, \mu)$ al operatorului $H = h(t)Sh^{-1}(t)I$ din lema 2.1 se definește prin egalitatea

$$H(t, \mu) = \begin{Vmatrix} 1 & u(t, \mu) \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}\,, \tag{3.4}$$

* *În această lucrare se presupune că* $0 \in G^+$.

unde

$$u(t,\mu)=\begin{cases}\dfrac{4\nu(t_k,\mu)cos(\pi\delta_k)exp(\pi i\delta_k)}{2l(t_k,\mu)cos(\pi\delta_k)exp(\pi i\delta_k)+1}, & dacă\ \ t=t_k \quad (k=1,2,\dots,n),\\ 0\ , & dacă\ \ t\in\Gamma\backslash t_k \quad (k=1,2,\dots,n)\end{cases},$$

$$\theta(t)=\begin{cases}\pi-2\pi(1+\beta_k)/p\,, & dacă\ \ t=t_k \quad (k=1,2,\dots,n)\\ \pi-2\pi/p\ , & dacă\ \ t\in\Gamma\backslash t_k \quad (k=1,2,\dots,n)\end{cases},$$

$$l(t,\mu)=\begin{cases}\dfrac{sin\theta\mu\cdot exp(i\theta\mu)}{sin\theta\cdot exp(i\theta)}\ , & dacă \quad \theta\neq 0\,,\\ \mu\,, & dacă \quad \theta=0\end{cases}$$

și $\nu(t,\mu)$ este o ramură fixată a rădăcinii $\sqrt{l(t,\mu)(1-l(t,\mu))}$.

Amintim că simbolul $a(t,\mu)$ al operatorului $a(t)\,I$, $a(t)\in CP(\Gamma)$ se definește [1] în felul următor:

$$a(t,\mu)=\begin{Vmatrix} l(t,\mu)a(t+0)+\big(1-l(t,\mu)\big)a(t) & \nu(t,\mu)\big(a(t+0)-a(t)\big)\\ \nu(t,\mu)\big(a(t+0)-a(t)\big) & l(t,\mu)a(t)+\big(1-l(t,\mu)\big)a(t+0)\end{Vmatrix}, \tag{3.5}$$

iar simbolul operatorului S are forma

$$S(t,\mu)=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}.$$

4. Echivalența algebrelor $\sum_\beta(\gamma,V)$ și $\sum^2_{\beta-\frac{1}{2}}(\gamma_0)$. Criterii noetheriene

Fie $L_{p,\beta}$ algebra tuturor operatorilor liniari și mărginiți care acționează în spațiul $L_p(\gamma,|t|^\beta)$, unde $\gamma=[-1,1]$ și β este un număr real din intervalul $(-1,p-1)$. Prin $\sum_\beta(\gamma,V)$ notăm subalgebra minimală a algebrei $L_{p,\beta}$ care conține operatori de forma

$$A=aI+bS+(cI+dS)V, \tag{4.1}$$

unde coeficienții a, b, c, d sunt funcții din $PC(\gamma)$, operatorul de translație V este definit de egalitatea $(V\varphi)(t)=\varphi(-t)$ și S este operatorul integral singular pe segmentul $[-1,1]$. Scopul acestui paragraf constă în a demonstra următoarea teoremă.

Teorema 4.1. *Algebra $\sum_\beta(\gamma,V)$ este echivalentă cu algebra $\sum^2_{\beta-\frac{1}{2}}(\gamma_0)$, unde $\sum^2_{\beta-\frac{1}{2}}(\gamma_0)$ $(\gamma_0=[0,1])$ este algebra generată de operatorii integrali singulari (fără translații) cu coeficienți matrice de funcții de ordinul doi.*

Demonstrația acestei teoreme folosește următoarea lemă.

Lema 4.1. *Fie numerele p și β verificîă condițiile $1<p<+\infty$, $2(1+\beta)<p$. Atunci operatorul*

$$(R\varphi)(t)=\frac{\sqrt{t}}{\pi i}\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)\sqrt{\tau}}d\tau \quad (0\leq t\leq 1) \tag{4.2}$$

aparține algebrei $\sum(\gamma_0,|t|^{\beta-\frac{1}{2}})$ și simbolul său are forma

$$R(t,\mu)=\begin{Vmatrix}r(t,\mu) & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix} \quad (0\leq\mu\leq 1),$$

unde

$$r(t,\mu)=\begin{cases}(2\omega(\mu)-1)^{-1} & pentru\ t=0\\ 1 & pentru\ 0<t<1\,,\\ 2\omega(\mu)-1 & pentru\ t=1\end{cases} \quad \omega(\mu)=\begin{cases}\dfrac{sin\theta\mu\cdot \exp(i\theta\mu)}{sin\theta\cdot\exp(i\theta)}\left(\theta=\pi-\dfrac{2\pi(1+\beta)}{p}\right), & dacă\ \theta\neq 0\\ \mu, & dacă\ \theta=0\end{cases}.$$

Demonstrație. Considerăm operatorul

$$B=aI+SbI,$$

unde $a(t)=sin\frac{\pi t}{2}$ și $b(t)=icos\frac{\pi t}{2}$. În baza definiției simbolului (a se vedea [1]) obținem că determinantul simbolului are forma

$$detB(t,\mu)=\begin{cases}1\ pentru\ \ 0<t\leq 1\\ 2\omega(\mu)-1 \quad pentru\ t=0\end{cases}.$$

Așa cum $2(1+\beta)<p$, atunci $\pi-2\pi(1+\beta)/p\neq 0$, de unde rezultă că $2\omega(\mu)-1\neq 0$. Astfel, operatorul B este noetherian în spațiul $L_p(\gamma_0,|t|^\beta)$ și indicele lui este egal cu zero. Atunci (a se vedea [1]) B este inversabil. Pentru determinarea inversului operatorului B ne vom folosi de formula (98.11) din monografia [11]. Din această formulă rezultă că

$$B^{-1}=aI-Z^{-1}SbZ, \tag{4.3}$$

unde $Z = g(t)\sqrt{t}I$. În plus, în [11] se arată că funcțile $g(t)$ și $1/g(t)$ sunt continue pe [0,1]. Așa cum $B \in \sum(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}})$, rezultă că $B^{-1} \in \sum(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}})$. În baza egalității $B^{-1} = aI + g^{-1}RbgI$ deducem că operatorul $R_1 = RbgI$ aparține algebrei $\in \sum(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}})$.

Considerăm operatorul $R_2 = Rc(t)I$, unde $c(t) = \sqrt{t}$. Deoarece operatorul $R_2 - ScI = cS - ScI$ este compact în $L_p(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}})$, atunci $R_2 \in \sum(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}})$. Așadar, $B(b+c) \in L_p(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}})$ și deoarece funcția $b(t)+c(t)$ nu se anulează pe segmentul [0,1], atunci $B \in \sum(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}})$. Fie $S(t,\mu)$ și $C(t,\mu)$ simbolurile operatorilor S și $C = c(t)I$. Din faptul că operatorul $(R-S)cI$ este compact, atunci

$$(R(t,\mu) - S(t,\mu))C(t,\mu) \equiv 0. \tag{4.4}$$

Evident,

$$C(t,\mu) = \begin{Vmatrix} \sqrt{t} & 0 \\ 0 & \sqrt{t} \end{Vmatrix}$$

și, prin urmare, din egalitatea (4.4) rezultă că pentru orice $t \neq 0$ are loc egalitatea $R(t,\mu) = S(t,\mu)$. Din egalitatea $(aI + bS)(aI - g^{-1}RbgI) = I$ rezultă că produsul $S(0,\mu) \cdot R(0,\mu)$ este matricea unitate și, prin urmare, $R(0,\mu) = S^{-1}(0,\mu)$. Așadar,

$$R(t,\mu) = \begin{cases} S(t,\mu) & pentru\ t \neq 0 \\ S^{-1}(0,\mu) & pentru\ t = 0, \end{cases}$$

Lema este demonstrată.

Demonstrația teoremei 4.1. Operatorul M_1, definit prin relația

$$(M_1\varphi)(t) = (\varphi(t), \varphi(-t)) \quad (0 \le t \le 1),$$

este inversabil și acționează din spațiul $L_p(\gamma, |t|^\beta)$ în spațiul $L_p^2(\gamma_0, |t|^\beta)$. Atunci, pentru orice operator $X \in L_{p,\beta}$ operatorul $M_1XM_1^{-1}$ poate fi exprimat printr-o matrice de operatori

$$M_1XM_1^{-1} = \begin{Vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{Vmatrix}$$

cu elementele $X_{kj} \in L(L_p(\gamma_0, |t|^\beta))$. Vom determina $M_1AM_1^{-1}$, unde A este operatorul (4.1).

Considerăm ecuația $A\varphi = \omega$. În această ecuație inegralele care apar cu limitele -1 și 1 le vom scrie ca suma de integrale cu limitele -1 și 0 și integrale cu limitele 0 și 1. După aceea, în integralele obținute cu limitele -1 și 0 facem schimbul de variabilă $\tau \to -\tau$. Obținem

$$a(t)\varphi(t) + b(t)\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + c(t)\varphi(-t) + d(t)\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(-\tau)}{\tau - t}d\tau = \omega(t) \quad (-1 \le t \le 1) \Rightarrow$$

$$a(t)\varphi(t) + b(t)\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + b(t)\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau +$$
$$c(t)\varphi(-t) + d(t)\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{0}\frac{\varphi(-\tau)}{\tau - t}d\tau + d(t)\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(-\tau)}{\tau - t}d\tau = \omega(t) \quad (-1 \le t \le 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a(t)\varphi(t) - b(t)\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(-\tau)}{\tau + t}d\tau + b(t)\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \\ c(t)\varphi(-t) - d(t)\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}d\tau + \frac{d(t)}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(-\tau)}{\tau - t}d\tau = \omega(t) \quad (0 \le t \le 1) \\ a(-t)\varphi(-t) - b(-t)\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(-\tau)}{\tau - t}d\tau + b(-t)\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}d\tau + \\ c(-t)\varphi(t) - d(-t)\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{d(-t)}{\pi i}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(-\tau)}{\tau + t}d\tau = \omega(-t) \quad (0 \le t \le 1) \end{cases} \tag{4.5}$$

Din sistemul (4.5) deducem că operatorul $M_1AM_1^{-1}$ are forma

$$M_1AM_1^{-1} = fI + gS_0 + hM_0, \tag{4.6}$$

unde

$$f(t) = \begin{Vmatrix} a(t) & c(t) \\ c(-t) & a(-t) \end{Vmatrix}, \quad g(t) = \begin{Vmatrix} b(t) & d(t) \\ -d(-t) & -b(-t) \end{Vmatrix}, h(t) = \begin{Vmatrix} -d(t) & -b(t) \\ b(-t) & d(-t) \end{Vmatrix},$$

$$(S_0\varphi) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \text{ și } (M_0\varphi) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}d\tau \quad (0 \le t \le 1).$$

Considerăm operatorul $(M_2\varphi)(t) = \varphi(t^{\frac{1}{2}})$. Evident, operatorul M_2 este liniar și mărginit și inversabil, care acționează din spațiul $L_p^2(\gamma_0, |t|^\beta)$ în spațiul $L_p^2\left(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}}\right)$. Se arată ușor că $M_2 a M_2^{-1} = a(t^{\frac{1}{2}})$I,

$$M_2 S_0 M_2^{-1} = \frac{1}{2}(S_0 + \mathrm{R}) \quad \text{și } M_2 M_0 M_2^{-1} = \frac{1}{2}(S_0 - \mathrm{R}),$$

unde operatorul R este definit în spațiul $L_p^2\left(\gamma_0, |t|^{\beta-\frac{1}{2}}\right)$ prin relația (4.2). În virtutea lemei 4.1, operatorul R aparține algebrei $\sum_{\beta-\frac{1}{2}}^2(\gamma_0)$. Deci, are loc incluziunea

$$M\sum\nolimits_\beta(\gamma, V)M^{-1} \subseteq \sum\nolimits_{\beta-\frac{1}{2}}^2(\gamma_0),$$

unde $M = M_2 M_1$, iar așa cum operatorul M este inversabil, în această incluziune are loc egalitatea:

$$M\sum\nolimits_\beta(\gamma, V)M^{-1} = \sum\nolimits_{\beta-\frac{1}{2}}^2(\gamma_0). \tag{4.7}$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Fie X un operator din algebra $\sum_\beta(\gamma, V)$. Notăm prin $X_\beta(t,\mu)$ $(0 \le t, \mu \le 1)$ simbolul operatorului $MXM^{-1} \in \sum_{\beta-\frac{1}{2}}^2(\gamma_0)$. Convenim ca matricea de funcții $X_\beta(t,\mu)$ $(0 \le t, \mu \le 1)$ de ordinul 4 să fie numită simbolul operatorului X. Din definiția simbolului [1] și din lema 4.1, în particular, rezulltă că simbolul operatorului (4.1) în intervalul $0 < t < 1$ se definește de egalitatea

$$A_\beta(t^2, \mu) = \left\| \begin{matrix} \omega(\mu)x(t+0) + \big(1-\omega(\mu)\big)x(t) & h(\mu)(y(t+0) - y(t)) \\ h(\mu)\big(x(t+0) - x(t)\big) & \omega(\mu)x(t+0) + \big(1-\omega(\mu)\big)x(t) \end{matrix} \right\|,$$

unde

$$x(t) = \left\| \begin{matrix} a(t)+b(t) & c(t)+d(t) \\ c(-t)-d(-t) & a(-t)-b(-t) \end{matrix} \right\|, \quad y(t) = \left\| \begin{matrix} a(t)-b(t) & c(t)-d(t) \\ c(-t)+d(-t) & a(-t)+b(-t) \end{matrix} \right\|,$$

funcția $\omega(\mu)$ este definită la lema 4.1, iar $h(\mu)$ este o ramură fixată a rădăcinii $\sqrt{\omega(\mu)(1-\omega(\mu))}$.

Pentru $t = 1$ avem

$$A_\beta(1, \mu) = \left\| \begin{matrix} \zeta(\mu) & 0 \\ 0 & \eta(\mu) \end{matrix} \right\|,$$

unde

$$\zeta(\mu) = \left\| \begin{matrix} a(1) & c(1) \\ c(-1) & a(-1) \end{matrix} \right\| + (2\omega(\mu) - 1) \left\| \begin{matrix} b(1) & d(1) \\ -d(-1) & -b(-1) \end{matrix} \right\|,$$

$$\eta(\mu) = \left\| \begin{matrix} a(1)-b(1) & c(1)-d(1) \\ c(-1)+d(-1) & a(-1)+b(-1) \end{matrix} \right\|.$$

Pentru $t = 0$ avem

$$A_\beta(0, \mu) = \left\| \begin{matrix} \sigma(\mu) & 0 \\ 0 & \delta(\mu) \end{matrix} \right\|,$$

unde

$$\sigma(\mu) = \left\| \begin{matrix} a(+0) & c(+0) \\ c(0) & a(0) \end{matrix} \right\| + \frac{1}{2}(2\omega(\mu) - 1) \left\| \begin{matrix} b(+0)-d(+0) & d(+0)-b(+0) \\ b(0)-d(0) & d(0)-b(0) \end{matrix} \right\| +$$
$$\frac{1}{2(2\omega(\mu)-1)} \left\| \begin{matrix} b(+0)+d(+0) & b(+0)+d(+0) \\ -b(0)-d(0) & -b(0)-d(0) \end{matrix} \right\|,$$

$$\delta(\mu) = \left\| \begin{matrix} a(+0)-b(+0) & c(+0)-d(+0) \\ c(0)+d(0) & a(0)+d(0) \end{matrix} \right\|.$$

Simbolul $X_\beta(t,\mu)$ al operatoirului $X \in \sum_\beta(\gamma, V)$ îl vom scrie sub forma $\|x_{jk}(t,\mu)\|_{j,k=1}^2$, unde $x_{jk}(t,\mu)$ sunt matrice de funcții de ordinul 2. În baza proprietăților simbolului din algrbra $\sum_{\beta-\frac{1}{2}}^2(\gamma_0)$ (a se vedea [1]) și din raționamentele prezentate mai sus rezultă următoarea teoremă.

Teorema 4.2. *Pentru ca operatorul $A \in \sum_\beta(\gamma, V)$ să fie normal rezolvabil în spațiul $L_p(\gamma, |t|^\beta)$, este necesar și suficient să fie îndeplinită următoarea condiție:*

$$\det A_\beta(t,\mu) \ne 0 \ (0 \le t \le 1, 0 \le \mu \le 1).$$

Dacă această condiție este verificată, atunci operatorul A este noetherian și indicele lui se calculează din formula

$$IndA = -\frac{1}{2\pi}\left\{argdetA_{\beta}(t,\mu)/deta_{22}(t,0)a_{22}(t,1)\right\}_{\substack{0\le t\le 1\\ 0\le \mu\le 1}}.$$

Concluzii

În lucrare, noțiunea de echivalență pentru algebrele Banach a fost efectiv aplicată la determinarea condițiilor noetheriene pentru algebrele generate de operatorii integrali singulari cu translații de tip Carleman. Condițiile noetheriene, precum și indicele operatorului, se exprimă prin determinantul unei matrice de funcții, numită simbolul operatorului. Un rol important în stabilirea teoremelor principale din această lucrare au avut rezultatele cercetărilor efectuate de către matematicienii I.Gohberg și N.Krupnik și publicate în ([1-5, 7]).

Metodele utilizate și rezultatele prezentate în această lucrare pot fi folosite în studiul ulterior al operatorilor singulari în vederea lărgirii clasei de contururi de integrare, a spațiilor de cercetare și a coeficienților operatorilor.

Referinţe:

1. ГОХБЕРГ, И., КРУПНИК, Н. Сингулярные интегральные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами и их символы. В: *Известия АН СССР,* 1971, 35, №4, c.940-964.
2. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. Banach algebras generated by singular integral operators. In: *Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai 5. Hilbert space operators.* Tihany (Hungary), 1970, p.240-263.
3. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. Banach algebras of singular integral operators wieth piecewise continuous coefficients. General contour and weight. In: *Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993,17, p.322-337.
4. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. One-dimensional linear singular integral equations. Vol.I and vol.II. In: *Operator Theory*, Basel-Boston –Stuttgart, 1992.
5. KRUPNIK N. Banach algebras with symbol and singular integral operators. In: *Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987, 26. 138 p.
6. KHVEDELIDZE, B. The method of Cauchy type integrals in discontinuous boundary value problems of theory of holomorphie functions of a complex variable. In: *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Proml. Mat.*, 1975, vol.7, p.5-262.
7. ГОХБЕРГ, И., КРУПНИК, Н. Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом. В: *Известия АН Армянской ССР*, VIII, 1973, №1, c.3-12.
8. KARAPETYANTS, N., SAMKO, S. Equations with Involutive Operators. In: *Operator Theory:* Birkhauser, Basel, 2005. 188 p.
9. KRAVCHENKO, V., LITVINCHIUK, G. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift.* Kluwer, 2012. 332 p.
10. NEAGU, V. Singular integral operators. The case of an unlimited contour. In: *Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, Acadmie Roumaine,* tome XXXIV, 2005, no2, p.151-168.
11. МУСХЕЛИШВИЛИ, Н. *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва, 1962.

Date despre autor:
Galina VORNICESCU, doctor, conferenţiar universitar, Universitatea de Stat din Tiraspol.
E-mail: vornicescu@gmail.com
ORCID: 0000-0002-0148-5535

Prezentat la 31.05.2021