STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2008, nr.3(13)

ТРЕХМЕРНЫЕ СИММОРФНЫЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ РОЗЕТОЧНЫХ Р-СИММЕТРИЙ И ИХ МНОГОМЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

Teoria generală a P-simetriei este folosită pentru a extinde grupurile simorfe liniare cristalografice tridimensionale cu P-simetriile de rozetă. În lucrare sunt prezentate lista completă a P-simetriilor minore de rozetă şi caracteristicile numerice complete ale listelor de grupuri Q-medii de P-simetrie din categoriile indicate. De asemenea, pe baza teoriei generale a P-simetriei au fost obținute toate versiunile posibile de grupuri tridimensionale, simorfe cristalografice liniare ale P-simetriilor de rozetă, fără a se ține cont de enantiomorfismul lor. Aceasta a permis evaluarea numerică a tuturor grupurilor „simorfe” de simetrie ale spațiului euclidian de dimensiunea cinci, care păstrează invariant în acest spațiu un plan tridimensional şi o dreaptă pe acest plan.

Based on the general P-symmetry theory, three-dimensional symmorphic crystallographic linear groups are expanded up to groups of rosettal P-symmetries. The list of junior rosettal P-symmetries of this category is completely presented and the full numerical review of Q-middle groups of noted P-symmetries of the mentioned above category is given. The number of different ”symmorphic” symmetry groups of five – dimensional Euclidian space, which keep in it invariant the three-dimensional plane with straight line in it is established by means of revealed every possible (from the point of view of general P-symmetries theory) different, without taking into account enantiomorphism, three-dimensional crystallographic linear rosettal P-symmetries.

1. Трехмерные линейные кристаллографические группы симметрии (они же стержневые или цилиндрические) – это группы преобразований симметрии трехмерного эвклидова пространства, сохраняющие в нем инвариантной некоторую прямую, называемую осью группы, и, следовательно, сохраняющие инвариантным пучок плоскостей, проходящих через упомянутую прямую, но не сохраняющие инвариантной одну и ту же точку [1]. Следовательно, элементами таких групп могут быть только переносы на векторы, лежащие на оси группы, повороты, в том числе винтовые и зеркальные, на кристаллографические углы вокруг оси группы, повороты вокруг осей второго порядка и отражение от плоскостей, перпендикулярных оси группы, а также отражения и скользящие отражения от плоскостей, проходящих через ось группы, ибо эти преобразования симметрии переводят в себя ось группы.

Заметим далее, что все приведенные выше преобразования симметрии трехмерных линейных кристаллографических групп содержатся также и в трехмерных фёдоровских группах G_3 [2, 3]. Поэтому каждая трехмерная кристаллографическая линейная группа симметрии G_{31} является подгруппой трехмерной фёдоровской группы G_3 [2] и ее можно определить по аналогии с определением группы G_3, данным в [3]. Рассмотрим группу преобразований симметрии, переводящих в себя некоторую прямую в трехмерном эвклидовом пространстве, но не сохраняющих одну и ту же точку. Такую группу назовем трехмерной линейной группой симметрии G_{31}, если ее преобразования обладают следующими свойствами: 1) где бы ни рассматривать слой высотой *2R*, ограниченный двумя плоскостями, перпендикулярными оси группы, внутрь его попадут гомологичные образы любой наперёд заданной точки пространства – однородность; 2) хотя бы одна точка не имеет сколь угодно близких к ней её гомологичных образов – дискретность (ср. [4, с.228]).

Рассмотрим любое преобразование f из группы G_{31}. Его можно разложить в произведение переноса s на вектор, лежащий на оси группы, и “поворота” w вокруг наперёд заданной точки O, также лежащей на оси этой же группы: $f = sw$. Поставив в соответствие всякому f входящий в него “поворот” w , получим гомоморфизм группы G_{31} на множество “поворотов” W и составляющее конечную точечную группу таблетки, либо конечного стержня, или конечного цилиндра ($G_{320} = G_{310}$) [5]. Ядром этого гомоморфизма служит одномерная подгруппа переносов T, тогда, по основной теореме о гомоморфизмах, T – нормальный делитель в G_{31}, а фактор-группа G_{31}/T изоморфна W [5].

Всех трехмерных кристаллографических линейных групп симметрии 75, из которых 31 симморфная, 13 гемисимморфных и 31 асимморфная. В [1] они выписаны в графе 2 таблицы 1 в симмолике

А.М. Заморзаева, а в графе 3 этой же таблицы даны соответствующие интернациональные символы, извлеченные из [6].

Обобщение трехмерных симморфных кристаллографических линейных групп симметрии с розеточными *P*-симметриями и использование полученных новых групп для моделирования пятимерных групп симметрии с инвариантной трехмерной плоскостью и прямой в ней, то есть групп симметрии категории G_{531}, является главной целью данной работы.

2. Приведем необходимые сведения, связанные с решением поставленной задачи. Хорошо известно, что трехмерные симморфные кристаллографические линейные группы симметрии – это такие пространственные группы, которые разлагаются в полупрямое произведение одномерной циклической группы параллельных переносов, порожденной переносом на основной вектор, лежащий на оси группы, и точечной кристаллографической группы конечного цилиндра или столба [5]. Отсюда уже становится ясно, как можно вывести такие группы: одномерную дискретную группу параллельных переносов поочерёдно комбинировать со всеми точечными кристаллографическими группами симметрии конечных цилиндров, параллельными переносами которых на векторы из взятой циклической группы получались бы бесконечные цилиндры. Всех таких групп окажется ровно 31, так как различных кристаллографических групп симметрии конечных цилиндров столько же [2, с.70].

В интернациональной символике при записи этих групп на первом месте пишется буква *p*, которой обозначается одномерная группа параллельных переносов, порожденная основным вектором *p*, лежащим на инвариантной прямой рассматриваемой группы, направленной по оси *OZ* декартовой прямоугольной системы координат. Ориентировка остальных элементов симметрии (поворотных осей 1, 2, 3, 4, 6 соответствующих порядков, инверсионных осей $\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$, плоскостей отражения *m*) по отношению к вектору основного переноса группы и друг к другу соответствуют правилам, принятым в [6]. Поворотные и инверсионно поворотные оси третьего, четвертого и шестого порядков пишутся на втором месте после буквы *p*, как и плоскости отражений *m*, перпендикулярных поворотным осям указанных порядков, а плоскости отражений, проходящих через оси третьего, четвертого и шестого порядков, пишутся на третьем и четвертом месте в символе групп. Далее, если ось второго порядка направлена по оси *OX*, то она пишется на втором месте после буквы *p*, если она направлена по оси *OY*, то она пишется на третьем месте, а если направлена по оси *OZ*, то она пишется на четвертом месте после буквы *p*. Если же плоскость отражения *m* перпендикулярна оси *OX*, то она пишется на втором месте в символе группы после буквы *p*, если же плоскость перпендикулярна оси *OY* , то буква *m* пишется на третьем месте в символе группы, а если плоскость перпендикулярна оси *OZ*, то её символ *m* пишется на четвертом месте в рассматриваемой группе. Символом 1 после буквы *p* обозначается отсутствие соответствующего элемента в данной группе и т.д. (ср. [1]).

Таким образом, список 31 трехмерной симморфной кристаллографической линейной группы симметрии в интернациональной символике выглядит так: *p1, p112, p211, p3, p4, p6,* $p\bar{1}$, $p\bar{3}$ *= p3/m,* $p\bar{4}$, $p\bar{6}$, *p11m, pm11, p112/m, p2/m11, p4/m, p6/m, pmm2, p2mm, p3m, p4mm, p6mm, pmmm,* $p\bar{4}$ *2m,* $p\bar{6}$ *2m, p4/mmm, p6/mmm,* $p\bar{3}$ *m, p222, p32, p422, p622* [6, 1].

Что касается розеточных *P*-симметрий, то они впервые появились в [7, с. 95] при геометрическом способе классификации *P*-симметрий в случае, когда группа подстановок *P* изоморфна каждой из 10 двумерных точечных кристаллографических групп симметрии G_{20}. В схеме *P*-симметрии интересующие нас розеточные *P*-симметрии, нульмерными группами G_0^P которых моделируются группы симметрии розеток G_{20}, исчерпываются *p*- и *(p/)*- симметрией при *p* = 1, 2, 3, 4,6 [8].

Таким образом, чтобы решить поставленную задачу, вначале нужно вывести трехмерные симморфные линейные группы G_{31}^P *p*- и (*p*/)- симметрии при *p* = 1, 2, 3, 4,6.

3. Приступим к выявлению интересующих нас групп *P*-симметрии G_{31}^P при $P \cong G_{20}$. Такие группы, как отмечено в [9, 10], делятся на порождающие, старшие, младшие и *Q*-средние. Порождающие группы любой *P*-симметрии совпадают с рассматриваемыми классическими группами симметрии *S* ввиду того, что они получаются из классических групп симметрии при их обобщении с *1*-симметрией, когда всем точкам преобразуемой фигуры приписывается один и тот же индекс. Вывод старших групп

G любой P - симметрии тривиален: $G = S \times P$, где S – порождающая (классическая) группа симметрии, а P – группа подстановок индексов, приписываемых точкам преобразуемой фигуры, характеризующая рассматриваемую P-симметрию. Младшие группы G данной P-симметрии выводятся из определенной порождающей S, согласно основной теореме о P-симметрии [9, 10], только в том случае, если S обладает таким нормальным делителем H, что фактор-группа $S/H \cong P$, а $H = G \cap S$ – подгруппа симметрии в G. Изучение Q-средних групп P-симметрии G, где $Q = G \cap P$, есть подгруппа подстановок индексов в группе G, согласно той же основной теореме о P-симметрии, связано с перебиранием нетривиальных нормальных делителей Q группы подстановок P, а сам подсчет этих групп становится возможным, если предварительно выявлены младшие группы, ибо, как показано в [11], число различных Q-средних групп P-симметрии в данном семействе равно числу различных младших групп P_0-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа $P/Q \cong P_0$. При этом в семействах групп изоморфных P-симметрий с общей порождающей совпадают не только числа различных младших, но и числа различных Q-средних групп. Это позволяет существенно сократить числовой обзор исследуемых нами групп, так как для подсчета групп G_{31}^{P} розеточных P-симметрий нужно проделать подробные исследования не для всех P-симметрий, а для одной из каждого класса изоморфности. В настоящей работе используется такая возможность (ср. [8]).

Группы подстановок, характеризующих розеточные P-симметрии, распределяются по 9 классам сильной изоморфности следующим образом: 1; 2, 1/ ; 3; 4; 6; 2/; 3/ ; 4/; 6/. Следовательно, при обобщении 31 трехмерной симморфной кристаллографической линейной группы симметрии с 10 розеточными P-симметриями получим 31 порождающую, 279 (31×9) старших, а также определенное число младших, которые получим из порождающих методом Шубникова [12] – поочередной заменой в системе образующих элементов исходной группы симметрии на соответствующие преобразования P-симметрии, и Q-средние группы для остальных девяти нетривиальных розеточных P-симметрий.

При 2-симметрии список интересующих нас младших групп G_{31}^{2} выглядит следующим образом: $p^{(2)}1$ (одна группа); $p112^{(2)}$, $p^{(2)}112$, $p^{(2)}112^{(2)}$ (3 группы); $p2^{(2)}11$, $p^{(2)}211$ (2 группы); $p^{(2)}3$ (одна группа); $p4^{(2)}$, $p^{(2)}4$, $p^{(2)}4^{(2)}$ (3 группы); $p6^{(2)}$, $p^{(2)}6$, $p^{(2)}6^{(2)}$ (3 группы); $p\bar{1}^{(2)}$, $p^{(2)}\bar{1}$ (2 группы); $p\bar{3}^{(2)}$, $p^{(2)}\bar{3}$ (2 группы); $p\bar{4}^{(2)}$, $p^{(2)}\bar{4}$ (2 группы); $p\bar{6}^{(2)}$, $p^{(2)}\bar{6}$ (2 группы); $\mathrm{p11m}^{(2)}$, $p^{(2)}11\mathrm{m}$ (2 группы); $p\mathrm{m}^{(2)}11$, $p^{(2)}\mathrm{m}11$, $p^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}11$ (3 группы); $p112^{(2)}/\mathrm{m}$, $p112/\mathrm{m}^{(2)}$, $p112^{(2)}/\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}112/\mathrm{m}$, $p^{(2)}112^{(2)}/\mathrm{m}$ (5 групп); $p2^{(2)}/\mathrm{m}11$, $p2/\mathrm{m}^{(2)}11$, $p2^{(2)}/\mathrm{m}^{(2)}11$, $p^{(2)}2/\mathrm{m}11$, $p^{(2)}2/\mathrm{m}^{(2)}11$(5 групп); $p4^{(2)}/\mathrm{m}$, $p4/\mathrm{m}^{(2)}$, $p4^{(2)}/\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}4/\mathrm{m}$, $p^{(2)}4^{(2)}/\mathrm{m}$ (5 групп); $p6^{(2)}/\mathrm{m}$, $p6/\mathrm{m}^{(2)}$, $p6^{(2)}/\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}6/\mathrm{m}$, $p^{(2)}6^{(2)}/\mathrm{m}$ (5 групп); $p\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}2^{(2)}$, $p\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}2$, $p^{(2)}\mathrm{mm}2$, $p^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}2^{(2)}$, $p^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}2$ (5 групп); $p2\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p2^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$, $p2^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}$, $p^{(2)}2\mathrm{mm}$, $p^{(2)}2^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}$ (5 групп); $p3\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}3\mathrm{m}$, $p^{(2)}3\mathrm{m}^{(2)}$(3группы); $p4^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$, $p4\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}4\mathrm{mm}$, $p^{(2)}4^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$, $p^{(2)}4\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$ (5 групп); $p6^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$, $p6\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}6\mathrm{mm}$, $p^{(2)}6^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$, $p^{(2)}6\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$ (5 групп); $p\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{mm}$, $p\mathrm{mmm}^{(2)}$, $p\mathrm{mm}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}$, $p\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}\mathrm{mmm}$, $p^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}\mathrm{m}$, $p^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}$ (8 групп); $p\bar{4}2^{(2)}m^{(2)}$, $p\bar{4}^{(2)}2^{(2)}m$, $p\bar{4}^{(2)}2m^{(2)}$, $p^{(2)}\bar{4}2m$, $p^{(2)}\bar{4}2m^{(2)}$(5 групп); $p\bar{6}2^{(2)}m^{(2)}$, $p\bar{6}^{(2)}2^{(2)}m$, $p\bar{6}^{(2)}2m^{(2)}$, $p^{(2)}\bar{6}2m$, $p^{(2)}\bar{6}2m^{(2)}$(5 групп); $p4/m^{(2)}mm$, $p4/mm^{(2)}m^{(2)}$, $p4/m^{(2)}m^{(2)}m^{(2)}$, $p4^{(2)}/m^{(2)}mm^{(2)}$, $p4^{(2)}/mmm^{(2)}$, $p^{(2)}4/mmm$, $p^{(2)}4^{(2)}/mm^{(2)}m$, $p^{(2)}4/mm^{(2)}m^{(2)}$(8 групп); $p6/\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{mm}$, $p6/\mathrm{mm}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p6/\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p6^{(2)}/\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$, $p6^{(2)}/\mathrm{mmm}^{(2)}$, $p^{(2)}6/\mathrm{mmm}$, $p^{(2)}6^{(2)}/\mathrm{mm}^{(2)}\mathrm{m}$, $p^{(2)}6/\mathrm{mm}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$(8 групп); $p\bar{3}^{(2)}\mathrm{m}$, $p\bar{3}\mathrm{m}^{(2)}$, $p\bar{3}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}\bar{3}\mathrm{m}$, $p^{(2)}\bar{3}\mathrm{m}^{(2)}$(5 групп); $p2^{(2)}2^{(2)}2$, $p22^{(2)}2^{(2)}$, $p^{(2)}222$, $p^{(2)}22^{(2)}2^{(2)}$ (4 группы); $p32^{(2)}$, $p^{(2)}32$ (2 группы); $p42^{(2)}2^{(2)}$, $p4^{(2)}22^{(2)}$, $p^{(2)}422$, $p^{(2)}4^{(2)}22^{(2)}$ (4 группы); $p62^{(2)}2^{(2)}$, $p6^{(2)}22^{(2)}$, $p^{(2)}622$, $p^{(2)}6^{(2)}22^{(2)}$ (4 группы).

В итоге имеем, что рассматриваемые нами трехмерные симморфные линейные группы порождают 122 младших и ни одной Q-средней группы при 2-симметрии, а при P-симметриях из класса двух изоморфных (1/ и 2) по 122 (1/)- и 2-младших (всего 2×122 = 244 группы).

При 3-симметрии список интересующих нас групп выглядит так: $p^{(3)}1$(одна группа); $p^{(3)}112$ (одна группа); $p3^{(3)}$, $p^{(3)}3$, $p^{(3)}3^{(3)}$, $p^{(3)}3^{(-3)}$ (4 группы); $p^{(3)}4$ (одна группа); $p6^{(3)}$, $p^{(3)}6$, $p^{(3)}6^{(3)}$, $p^{(3)}6^{(-3)}$ (4 группы); $p\bar{3}^{(3)}$ (одна группа); $p\bar{6}^{(3)}$ (одна группа); $p^{(3)}\mathrm{m}11$(одна группа); $p6^{(3)}/\mathrm{m}$ (одна группа); $p^{(3)}\mathrm{mm}2$ (одна группа); $p^{(3)}3\mathrm{m}$ (одна группа); $p^{(3)}4\mathrm{mm}$ (одна группа); $p^{(3)}6\mathrm{mm}$(одна группа). Следовательно, взятые нами группы порождают 19 младших групп 3-симметрии и ни одной Q-средней, так как при

3-симметрии, как и при 2-симметрии, группы подстановок, задающие эти *P*-симметрии, не имеют нетривиальных нормальных делителей.

При оставшихся шести розеточных *P*-симметриях используемые нами трехмерные линейные группы, кроме младших, будут порождать еще и *Q*-средние.

Именно при 4-симметрии список младших групп таков: $p^{(4)}1$(одна группа); $p^{(4)}112$, $p^{(4)}112^{(2)}$(2 группы); $p^{(4)}3$(одна группа); $p4^{(4)}$, $p^{(2)}4^{(4)}$, $p^{(4)}4$, $p^{(4)}4^{(2)}$, $p^{(4)}4^{(4)}$, $p^{(4)}4^{(-4)}$ (6 групп); $p^{(4)}6$, $p^{(4)}6^{(2)}$ (2 группы); $p\bar{4}^{(4)}$, $p^{(2)}\bar{4}^{(4)}$ (2 группы); $p^{(4)}\mathrm{m}11$, $p^{(4)}\mathrm{m}^{(2)}11$(2 группы); $p4^{(4)}/\mathrm{m}$, $p4^{(4)}/\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}4^{(4)}/\mathrm{m}$ (3 группы); $p^{(4)}\mathrm{mm}2$, $p^{(4)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}2$, $p^{(4)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}2^{(2)}$ (3 группы); $p^{(4)}3\mathrm{m}$, $p^{(4)}3\mathrm{m}^{(2)}$(2 группы); $p^{(4)}4\mathrm{mm}$, $p^{(4)}4\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(4)}4^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$(3 группы); $p^{(4)}6\mathrm{mm}$, $p^{(4)}6\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(4)}6^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$ (3 группы). Далее, так как группа P, задающая 4-симметрию, имеет нетривиальный нормальный делитель $Q=2$, то фактор группа $4/2 \cong 2$, поэтому число 2-средних групп совпадает с числом 122 младших групп G_{31}^{2} при 2-симметрии. Следовательно, взятые нами группы при 4-симметрии порождают 152 новых группы, из которых 30 младших и 122 группы два-средних.

При 6-симметрии рассматриваемые нами трехмерные линейные группы порождают следующие младшие: $p^{(6)}1$(одна группа); $p^{(6)}112$, $p^{(3)}112^{(2)}$, $p^{(6)}112^{(2)}$ (3 группы); $p^{(2)}3^{(3)}$, $p^{(6)}3$, $p^{(6)}3^{(3)}$, $p^{(6)}3^{(-3)}$ (4 группы); $p^{(6)}4$, $\mathrm{p}^{(3)}4^{(2)}$, $p^{(6)}4^{(2)}$(3 группы); $p6^{(6)}$, $p^{(2)}6^{(3)}$, $p^{(2)}6^{(6)}$, $p^{(3)}6^{(2)}$, $p^{(3)}6^{(6)}$, $p^{(3)}6^{(-6)}$, $p^{(6)}6$, $p^{(6)}6^{(2)}$, $p^{(6)}6^{(3)}$, $p^{(6)}6^{(-3)}$, $p^{(6)}6^{(6)}$, $p^{(6)}6^{(-6)}$(12 групп); $p3^{(3)}/\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}3^{(3)}/\mathrm{m}^{(2)}$ (2 группы); $p\bar{6}^{(6)}$, $p^{(2)}\bar{6}^{3}$ (2 группы); $p^{(6)}\mathrm{m}11$, $p^{(3)}\mathrm{m}^{(2)}11$, $p^{(6)}\mathrm{m}^{(2)}11$(3 группы); $p6^{(3)}/\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}6^{(3)}/\mathrm{m}$, $p6^{(6)}/\mathrm{m}$, $p6^{(6)}/\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(2)}6^{(6)}/\mathrm{m}$ (5 групп); $p^{(6)}\mathrm{mm}2$, $p^{(3)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}2$, $p^{(6)}\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}2$, $p^{(3)}\mathrm{mm}^{(2)}2^{(2)}$, $p^{(6)}\mathrm{mm}^{(2)}2^{(2)}$ (5 групп); $p^{(6)}3\mathrm{m}$, $p^{(3)}3\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(6)}3\mathrm{m}^{(2)}$ (3 группы); $p^{(6)}4\mathrm{mm}$, $p^{(3)}4\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(6)}4\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(3)}4^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$, $p^{(6)}4^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$ (5 групп); $p^{(6)}6\mathrm{mm}$, $p^{(3)}6\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(6)}6\mathrm{m}^{(2)}\mathrm{m}^{(2)}$, $p^{(3)}6^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$, $p^{(6)}6^{(2)}\mathrm{mm}^{(2)}$ (5 групп), а также 2- и 3-средних группы, ибо группа *P*, задающая 6-симметрию, имеет два нетривиальных нормальных делителя $Q_1 = 2$ и $Q_2 = 3$. При этом, число 2-средних групп совпадает с числом 19 младших групп при 3-симметрии, в связи с тем, что фактор-группа $6/2 \cong 3$, а число 3-средних групп совпадает с числом 122 младших при 2-симметрии, так как фактор-группа $6/3 \cong 2$ [11].

Таким образом, взятые нами исходные группы симметрии при 6-симметрии порождают 194 новых группы, из которых 53 младших и 141 *Q*-средняя (ср. с. 70-73 в [13]).

При (2/)-симметрии, группа подстановок которой $P=\{(1,2)\},(\bar{2},\bar{1})\}$, рассматриваемые нами трехмерные симморфные линейные группы порождают следующие младшие: $p^{(2}112^{/)}$, $p^{/)}112^{(2'}$, $p^{(2'}112^{/)}$ (3 группы); $p^{(2}2^{/)}11$, $p^{/)}2^{(2}11$ (2 группы); $p^{(2}4^{/)}$, $p^{/)}4^{(2'}$, $p^{(2'}4^{/)}$(3 группы); $p^{(2}6^{/)}$, $p^{/)}6^{(2'}$, $p^{(2'}6^{/)}$(3 группы); $p^{(2}\bar{1}^{/)}$, $p^{/)}\bar{1}^{(2}$ (2 группы); $p^{(2}3/\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}3/\mathrm{m}^{(2}$ (2 группы); $p^{(2}\bar{4}^{/)}$, $p^{/)}\bar{4}^{(2}$ (2 группы); $p^{(2}\bar{6}^{/)}$, $p^{/)}\bar{6}^{2)}$ (2 группы); $p^{(2}11\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}11\mathrm{m}^{(2}$ (2 группы); $p^{(2}\mathrm{m}^{/)}11$, $p^{/)}\mathrm{m}^{(2'}11$, $p^{(2'}\mathrm{m}^{/)}11$(3 группы); $p112^{(2}/\mathrm{m}^{/)}$, $p112^{/)}/\mathrm{m}^{(2}$, $p112^{(2'}/\mathrm{m}^{(2}$ (3 группы), $p^{(2}112^{/)}/\mathrm{m}$, $p^{/)}112^{(2}/\mathrm{m}$, $p^{(2'}112^{/)}/\mathrm{m}$ (3 группы), $p^{(2}112/\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}112/\mathrm{m}^{(2}$(2 группы), $p^{(2}112^{(2}/\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}112^{/)}/\mathrm{m}^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}112^{/)}/\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}112^{(2}/\mathrm{m}^{(2}$, $p^{(2'}112^{/)}/\mathrm{m}^{/)}$ (3 группы). Группы $p4/\mathrm{m}$ и $p6/\mathrm{m}$ порождают по 13 младших групп (2/)-симметрии, которые получаются из младших групп (2/)-симметрии, порождаемых группой $p112/\mathrm{m}$, путем замены в символах этих групп элемента "2" последовательно на элемент "4" и "6", например, группа $p4^{(2}/\mathrm{m}^{/)}$ получена из группы $p112^{(2}/\mathrm{m}^{/)}$. Далее, группа $p2/\mathrm{m}11$ порождает следующие 13 младших групп (2/)-симметрии: $p2^{(2}/\mathrm{m}^{/)}11$, $p2^{/)}/\mathrm{m}^{(2}11$, $p2^{(2'}/\mathrm{m}^{/)}11$ (3 группы), $p^{(2}2/\mathrm{m}^{/)}11$, $p^{/)}2/\mathrm{m}^{(2}11$, $p^{(2'}2/\mathrm{m}^{/)}11$(3 группы), $p^{(2}2^{/)}/\mathrm{m}11$, $p^{/)}2^{(2'}/\mathrm{m}^{/)}11$ (2 группы), $p^{(2}2^{/)}/\mathrm{m}^{/)}11$, $p^{/)}2^{(2}/\mathrm{m}^{(2}11$, $p^{(2'}2^{/)}/\mathrm{m}^{/)}11$(3 группы), $p^{(2}2^{/)}/\mathrm{m}^{(2}11$, $p^{/)}2^{(2'}/\mathrm{m}^{/)}11$(2 группы); а группа $p\mathrm{mm}2$ – столько же младших групп (2/)- симметрии: $p\mathrm{m}^{(2}\mathrm{m}^{/)}2^{(2'}$, $p\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{(2'}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}\mathrm{mm}^{/)}2^{/)}$, $p^{/)}\mathrm{mm}^{(2}2^{(2}$, $p^{(2'}\mathrm{mm}^{/)}2^{/)}$ (3 группы), $p^{(2}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{/)}2$, $p^{/)}\mathrm{m}^{(2}\mathrm{m}^{(2}2$, $p^{(2'}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{/)}2$ (3 группы), $p^{(2}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{(2'}2^{(2}$, $p^{/)}\mathrm{m}^{(2'}\mathrm{m}^{(2}2^{/)}$(2 группы), $p^{(2}\mathrm{m}^{(2}\mathrm{m}^{(2'}2^{/)}$, $p^{/)}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{(2}2^{(2'}$, $p^{(2'}\mathrm{m}^{(2'}\mathrm{m}^{/)}2^{(2}$ (3 группы). Далее, группы $p4\mathrm{mm}$ и $p6\mathrm{mm}$ порождают по 13 младших, которые получаются из младших групп (2/)-симметрии, выводимых из групп $p\mathrm{mm}2$, путем замены в символах этих групп элемента 2 последовательно на элемент "4" и "6", например, группа $p4^{(2'}\mathrm{m}^{(2}\mathrm{m}^{/)}$ получена из группы $p\mathrm{m}^{(2}\mathrm{m}^{/)}2^{(2'}$. Группа $p2\mathrm{mm}$ порождает следующие младшие группы (2/)-симметрии: $p2^{(2}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{(2'}$, $p2^{/)}\mathrm{m}^{(2}\mathrm{m}^{(2'}$, $p2^{(2'}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{(2}$ (3 группы), $p^{(2}2\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}2\mathrm{m}^{(2}\mathrm{m}^{(2}$, $p^{(2'}2\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{/)}$ (3 группы), $p^{(2}2^{/)}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}$, $p^{/)}2^{(2}\mathrm{m}^{(2}\mathrm{m}$, $p^{(2'}2^{/)}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}$ (3 группы), $p^{(2}2^{/)}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}$, $p^{(2'}2\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{/)}$ (2 группы), $p^{(2}2^{(2'}\mathrm{m}^{/)}\mathrm{m}^{(2}$, $p^{/)}2^{(2}\mathrm{m}^{(2'}\mathrm{m}^{/)}$ (2 группы); $p^{(2}3\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}3\mathrm{m}^{(2}$, $p^{(2'}3\mathrm{m}^{/)}$ (3 группы).

В свою очередь, из группы $p\bar{4}2\mathrm{m}$ выводятся 13 младших групп (2/)-симметрии: $p\bar{4}^{(2}2^{/)}\mathrm{m}^{(2'}$, $p\bar{4}^{/)}2^{(2'}\mathrm{m}^{(2}$, $p\bar{4}^{/)}2^{(2}\mathrm{m}^{(2'}$(3 группы), $p^{(2}\bar{4}2^{/)}\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}\bar{4}2^{(2}\mathrm{m}^{(2}$, $p^{(2'}\bar{4}2^{/)}\mathrm{m}^{/)}$ (3 группы), $p^{(2}\bar{4}^{/)}2\mathrm{m}^{/)}$, $p^{/)}\bar{4}^{(2}2\mathrm{m}^{(2}$, $p^{(2'}\bar{4}^{/)}2\mathrm{m}^{/)}$(3 группы), $p^{(2}\bar{4}^{/)}2^{/)}\mathrm{m}$, $p^{/)}\bar{4}^{(2}2^{(2}\mathrm{m}$ (2 группы), $p^{(2}\bar{4}^{/)}2^{(2'}\mathrm{m}^{(2}$, $p^{/)}\bar{4}^{(2'}2^{(2}\mathrm{m}^{/)}$ (2 группы), а группа

$p\bar{6}2m$ порождает столько же младших групп (2/)-симметрии, которые получаются из младших групп (2/)-симметрии, порождаемых группой $p\bar{4}2m$ путем замены элемента “$\bar{4}$” в ее группах (2/)-симметрии на элемент “$\bar{6}$”, например, группа $p\bar{6}^{(2}2^{/)}m^{(2'}$ получена из группы $p\bar{4}^{(2}2^{/)}m^{(2'}$.

Группа $p\bar{3}m$ порождает 13 младших групп (2/)-симметрии: $p\bar{3}^{(2}m^{/)}$, $p\bar{3}^{/)}m^{(2}$, $p\bar{3}^{/)}m^{(2'}$(3 группы), $p^{(2}\bar{3}^{/)}m^{/)}$, $p^{/)}\bar{3}^{(2}m^{(2}$, $p^{(2'}\bar{3}^{/)}m^{/)}$ (3 группы), $p^{(2}\bar{3}^{/)}m$, $p^{/)}\bar{3}^{(2}m$ (2 группы), $p^{(2}\bar{3}^{/)}m^{(2}$, $p^{/)}\bar{3}^{(2}m^{/)}$ (2 группы), $p^{(2}\bar{3}m^{/)}$, $p^{/)}\bar{3}m^{(2}$, $p^{/)}\bar{3}m^{(2'}$ (3 группы), а группа $p32$ – две таких группы: $p^{(2}32^{/)}$, $p^{/)}32^{(2}$.

Группа $p222$ порождает 9 младших групп (2/)-симметрии: $p2^{(2}2^{/)}2^{2'}$, $p2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}2^{/)}2^{/)}2$, $p^{/)}2^{(2}2^{(2}2$ (2 группы), $p^{(2}2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$, $p^{/)}2^{(2'}2^{(2}2^{/)}$(2 группы), $p^{(2}22^{/)}2^{/)}$, $p^{/)}22^{(2}2^{(2}$, $p^{(2'}22^{/)}2^{/)}$(3 группы), а группа $p422$ порождает столько же младших групп, список которых таков: $p4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p4^{/)}2^{(2'}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}42^{/)}2^{/)}$, $p^{/)}42^{(2}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{/)}4^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ (2 группы), $p^{(2}4^{/)}22^{/)}$, $p^{/)}4^{(2}22^{(2}$, $p^{/)}4^{(2'}22^{(2'}$ (3 группы). Далее, группа $p622$ порождает также 9 младших групп (2/)-симметрии, которые получаются из младших групп (2/)-симметрии, выводимых из группы $p422$, путем замены в символах этих групп элемента “4” на элемент “6”.

Группа pmmm порождает 41 младшую группу (2/)-симметрии, список которых выглядит следующим образом:

$pm^{(2}m^{(2}m^{/)}$, $pm^{/)}m^{/)}m^{(2}$, $pm^{/)}m^{/)}m^{(2'}$(3 группы), $pm^{(2}mm^{/)}$, $pm^{/)}mm^{(2}$, $pm^{/)}mm^{(2'}$(3 группы), $pm^{(2}m^{/)}m^{(2}$, $pm^{/)}m^{(2}m^{/)}$, $pm^{/)}m^{(2'}m^{/)}$ (3 группы), $pm^{(2'}m^{/)}m^{(2}$, $pm^{(2}m^{(2'}m^{/)}$ (2 группы), $pm^{(2}m^{/)}m$, $pm^{(2'}m^{/)}m$ (2 группы), $p^{(2}m^{/)}m^{/)}m^{/)}$; $p^{/)}m^{(2}m^{(2}m^{2)}$; $p^{(2'}m^{/)}m^{/)}m^{/)}$ (3 группы), $p^{(2}mmm^{/)}$, $p^{/)}mmm^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}m^{/)}m^{/)}m$, $p^{/)}m^{(2}m^{(2}m$, $p^{(2'}m^{/)}m^{/)}m$ (3 группы), $p^{(2}m^{(2}m^{(2}m^{/)}$, $p^{/)}m^{/)}m^{/)}m^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}m^{(2'}m^{/)}m^{/)}$, $p^{(2'}m^{/)}m^{(2}m^{/)}$ (2 группы), $p^{(2}m^{(2}mm^{/)}$, $p^{1)}m^{1)}mm^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}m^{(2'}m^{/)}m$, $p^{/)}m^{(2}m^{(2'}m$ (2 группы), $p^{(2}m^{/)}mm^{/)}$, $p^{/)}m^{(2}mm^{(2}$, $p^{(2'}m^{/)}mm^{(2}$ (3 группы), $p^{(2}m^{/)}m^{(2}m^{/)}$, $p^{/)}m^{(2}m^{/)}m^{(2}$, $p^{/)}m^{(2'}m^{/)}m^{(2}$ (3 группы), $p^{(2}mm^{/)}m$, $p^{/)}mm^{(2}m$, $p^{/)}mm^{(2'}m$ (3 группы), $p^{(2}m^{/)}m^{(2}m$, $p^{/)}m^{(2}m^{/)}m$, $p^{/)}m^{(2'}m^{/)}m$ (3 группы), а группа *p4/mmm* также порождает 41 младшую группу (2/)-симметрии, список которых таков: $p4/m^{(2}m^{/)}m^{/)}$, $p4/m^{/)}m^{(2}m^{(2}$, $p4/m^{(2'}m^{/)}m^{/)}$ (3 группы), $p4^{(2}/m^{/)}m^{(2}m$, $p4^{/)}/m^{(2}m^{/)}m$, $p4^{/)}/m^{(2'}m^{/)}m$ (3 группы), $p4^{(2}m^{/)}m^{/)}m^{(2'}$, $p4^{/)}/m^{(2'}m^{(2'}m^{(2}$, $p4^{/)}/m^{(2}m^{(2}m^{(2'}$ (3 группы), $p4^{(2}/mm^{/)}m^{(2'}$, $p4^{/)}/mm^{(2'}m^{(2}$ (2 группы), $p4^{(2}/m^{(2}m^{/)}m^{(2'}$, $p4^{/)}/m^{/)}m^{(2}m^{(2'}$ (2 группы), $p^{(2}4/m^{/)}m^{/)}m^{/)}$, $p^{/)}4/m^{(2}m^{(2}m^{(2}$, $p^{(2'}4/m^{/)}m^{/)}m^{/)}$ (3 группы), $p^{(2}4/m^{/)}mm$, $p^{/)}4/m^{(2'}mm$ (2 группы), $p^{(2}4/mm^{/)}m^{/)}$, $p^{/)}4/mm^{(2}m^{(2}$, $p^{(2'}4/mm^{/)}m^{/)}$ (3 группы), $p^{(2}4/m^{(2'}m^{(2}m^{(2}$, $p^{/)}4/m^{(2}m^{/)}m^{/)}$ (2 группы), $p^{(2}4^{(2}/m^{/)}m^{/)}m^{(2'}$, $p^{/)}4^{/)}/m^{(2'}m^{(2'}m^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}4^{(2}/m^{/)}mm^{(2}$, $p^{/)}4^{/)}/m^{(2}mm^{/)}$ (2 группы), $p^{(2}4^{/)}mmm^{/)}$, $p^{/)}4^{(2}/mmm^{(2}$, $p^{(2'}4^{/)}mmm^{/)}$ (3 группы), $p^{(2}4^{/)}/m^{(2}m^{(2}m^{(2'}$, $p^{/)}4^{(2'}/m^{/)}m^{/)}m^{(2}$, $p^{/)}4^{(2}/m^{/)}m^{/)}m^{(2'}$ (3 группы), $p^{(2}4^{/)}/m^{/)}m^{/)}m$, $p^{/)}4^{(2}/m^{(2}m^{(2}m$, $p^{(2'}4^{/)}/m^{/)}m^{/)}m$ (3группы), $p^{(2}4^{(2'}/m^{/)}m^{(2}m^{/)}$, $p^{/)}4^{(2'}/m^{(2}m^{/)}m^{(2}$, $p^{(2'}4^{(2}/m^{/)}m^{(2'}m^{/)}$ (3 группы), $p^{/)}4^{/)}/mm^{(2'}m^{(2}$, $p^{(2}4^{(2}/mm^{/)}m^{(2'}$. Наконец, группа *p6/mmm* также порождает 41 младшую группу (2/)-симметрии, которые получаются из младших групп (2/)-симметрии, порождаемых группой *p4/mmm*, путем замены в символах этих групп элемента “4” на элемент “6”.

Так как группа P, задающая (2/)-симметрию, имеет два нетривиальных нормальных делителя $Q_1 = 2$ и $Q_2 = 1/$, то рассматриваемые нами трёхмерные линейные симморфные группы при (2/)-симметрии, кроме выписанных выше младших групп (2/)-симметрии, порождает 122 два-средние группы, ввиду того, что фактор-группа $2//2 \cong 1/$ и 122 (1/)-средние группы, ввиду того, что $2//1/ \cong 2$. Таким образом, взятые нами трехмерные симморфные линейные группы при (2/)-симметрии порождают 566 групп, из которых 322 младших и 244 Q-средних.

Список младших групп (3/)-симметрии, порождаемых взятыми группами симметрии, смысл символов которых объяснен в [14], выглядит так: $p^{(3}2^{/)}11$; $p^{(3}\bar{1}^{/)}$; $p^{(3}\bar{3}^{/)}$; $p^{(3}\bar{4}^{/)}$; $p^{(3}\bar{6}^{/)}$; $p^{(3}11m^{/)}$; $p^{(3}112/m^{/)}$; $p^{(3}2^{/)}/m11$; $p^{(3}4/m^{/)}$; $p^{(3}6/m^{/)}$; $p^{(3}2^{/)}mm^{/)}$; $p3^{(3}m^{/)}$; $p6^{(3}m^{/)}m^{//)}$; $p^{(3}mmm^{/)}$; $p^{(3}\bar{4}^{/)}2^{/)}m$; $p\bar{6}^{(3}2^{/)}m^{//)}$, $p^{(3}\bar{6}^{/)}2^{/)}m$; $p^{(3}4/m^{/)}mm$; $p6^{(3}/mm^{/)}m^{//)}$; $p^{(3}6/m^{/)}mm$; $p\bar{3}^{(3}m^{/)}$, $p^{(3}\bar{3}^{/)}m$; $p^{(3}2^{/)}2^{/)}2$; $p3^{(3}2^{/)}$, $p^{(3}32^{/)}$; $p^{(3}3^{(3}2^{/)}$, $p^{(3}3^{(-3}2^{/)}$; $p^{(3}42^{/)}2^{/)}$; $p6^{(3}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(3}62^{/)}2^{/)}$, $p^{(3}6^{(3}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(3}6^{(-3}2^{/)}2^{///)}$. В связи с тем, что группа P, задающая (3/)-симметрию, имеет нетривиальный нормальный делитель $Q = 3$, то рассматриваемые нами группы, кроме выписанных младших групп (3/)-симметрии, порождают еще 122 три-средние группы, так как фактор-группа $3//3 \cong 1/$. Следовательно, при (3/)-симметрии трехмерные линейные симморфные группы симметрии порождают 154 группы, из которых 32 младших и 122 три-средних.

При (4/)-симметрии из взятых нами порождающих групп выводятся следующие младшие группы, смысл символов которых объяснен в [14]: $p^{(4}2^{/)}11$; $p^{(4}\bar{1}^{/)}$; $p^{(4}\bar{3}^{/)}$; $p^{(4}\bar{4}^{/)}$; $p^{(4}\bar{6}^{/)}$; $p^{(4}11m^{/)}$; $p^{(4}112/m^{/)}$,

$p^{(4}112^{(2}/m^{/)}$; $p^{(4}2^{/)}/m11$, $p^{(4}2^{/)}/m^{(2}11$; $p^{(4}4/m^{/)}$, $p^{(4}4^{(2}/m^{/)}$; $p^{(4}6/m^{/)}$, $p^{(4}6^{(2}/m^{/)}$; $p^{(4}2^{/)}mm^{/)}$, $p^{(4}2^{/)}m^{(2}m^{(2'}$; $p4^{(4}m^{/)}m^{//)}$, $p^{(2}4^{(4}m^{/)}m^{//)}$; $p^{(4}mmm^{/)}$, $p^{(4}m^{(2}mm^{/)}$, $p^{(4}m^{(2}m^{(2}m^{/)}$; $p\bar{4}^{(4}2^{/)}m^{//)}$, $p^{(2}\bar{4}^{(4}2^{/)}m^{//)}$, $p^{(4}\bar{4}^{/)}2^{/)}m$, $p^{(4}\bar{4}^{/)}2^{(2'}m^{(2}$; $p^{(4}\bar{6}^{/)}2^{/)}m$, $p^{(4}\bar{6}^{/)}2^{(2'}m^{(2}$; $p4^{(4}/m^{(2}m^{/)}m^{//)}$; $p4^{(4}/mm^{/)}m^{//)}$, $p^{(2}4^{(4}/mm^{/)}m^{//)}$, $p^{(4}4/m^{/)}mm$, $p^{(4}4^{(2}/m^{/}mm^{(2}$, $p^{(4}4/m^{/)}m^{(2}m^{(2}$; $p^{(4}6/m^{/)}mm$, $p^{(4}6/m^{/)}m^{(2}m^{(2}$, $p^{(4}6^{(2}/m^{/)}mm^{(2}$; $p^{(4}\bar{3}^{/)}m$, $p^{(4}\bar{3}^{/)}m^{(2}$; $p^{(4}2^{/)}2^{/)}2$, $p^{(4}2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$; $p^{(4}32^{/)}$; $p4^{(4}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(2}4^{(4}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(4}42^{/)}2^{/)}$, $p^{(4}4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{(4}4^{(4}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(4}4^{(-4}2^{/)}2^{///)}$; $p^{(4}62^{/)}2^{/)}$, $p^{(4}6^{(2}2^{/)}2^{(2'}$.

Заметим далее, что группа P, задающая (4/)-симметрию, имеет три нетривиальных нормальных делителя, $Q_1 = 4$, $Q_2 = 2/$ и $Q_3 = 2$, поэтому неоднократно упоминавшиеся нами исходные группы при (4/)-симметрии, кроме перечисленных младших , порождают также 122 четыре-средние группы, ибо фактор-группа $4//4 \cong 1/$, 122 (2/)-средние, так как $4//2/ \cong 2$, и 322 две-средние группы, потому что $4// 2 \cong 2/$.

Таким образом, при (4/)-симметрии среди трехмерных симморфных линейных групп розеточных P-симметрий следует различать 615 групп, из которых 49 младших и 566 Q-средних.

Наконец, рассматриваемые нами исходные группы симметрии при (6/)-симметрии порождают следующие младшие, смысл символов которых также можно найти в [14]: $p^{(6}2^{/)}11$; $p^{(6}\bar{1}^{/)}$; $p^{(6}\bar{3}^{/)}$; $p^{(6}\bar{4}^{/)}$; $p^{(6}\bar{6}^{/)}$; $p^{(6}11m^{/)}$; $p^{(3}112^{(2}/m^{/)}$, $p^{(6}112/m^{/)}$, $p^{(6}112^{(2}/m^{/)}$; $p^{(3}2^{/)}/m^{(2}11$, $p^{(6}2^{/)}/m11$, $p^{(6}2^{/)}/m^{(2}11$; $p^{(3}4^{(2}/m^{/)}$, $p^{(6}4/m^{/)}$, $p^{(6}4^{(2}/m^{/)}$: $p^{(3}6^{(2}/m^{/)}$, $p^{(6}6/m^{/)}$, $p^{(6}6^{(2}/m^{/)}$; $p^{(3}2^{/)}m^{(2}m^{(2'}$, $p^{(6}2^{/)}mm^{/)}$, $p^{(6}2^{/)}m^{(2}m^{(2'}$; $p^{(2}3^{(3}m^{/)}$; $p6^{(6}m^{/)}m^{//)}$, $p^{(2}6^{(3}m^{/)}m^{IV)}$, $p^{(2}6^{(6}m^{/)}m^{//)}$; $p^{(3}m^{(2}mm^{/)}$, $p^{(3}m^{(2}m^{(2}m^{/)}$, $p^{(6}mmm^{/)}$, $p^{(6}m^{(2}mm^{/)}$, $p^{(6}m^{(2}m^{(2}m^{/)}$; $p^{(3}\bar{4}^{/)}2^{(2'}m^{(2}$, $p^{(6}\bar{4}^{/)}2^{/)}m$, $p^{(6}\bar{4}^{/)}2^{(2'}m^{(2}$; $p\bar{6}^{(6}2^{/)}m^{//)}$, $p^{(2}\bar{6}^{(3}2^{/)}m^{/)}$, $p^{(3}6^{/)}2^{(2}m^{(2'}$, $p^{(6}\bar{6}^{/)}2^{/)}m$, $p^{(6}\bar{6}^{/)}2^{(2}m^{(2'}$; $p^{(3}4^{(2}/m^{(/}mm^{(2}$, $p^{(3}4/m^{/)}m^{(2}m^{(2}$, $p^{(6}4/m^{/)}mm$, $p^{(6}4^{(2}/m^{/)}mm^{(2}$, $p^{(6}4/m^{/)}m^{(2}m^{(2}$; $p6^{(6}/mm^{/)}m^{//)}$, $p6^{(6}/m^{(2}m^{/)}m^{//)}$, $p6^{(3}/m^{(2}m^{/)}m^{IV)}$, $p^{(2}6^{(3}/mm^{/)}m^{IV)}$, $p^{(2}6^{(6}/mm^{/)}m^{//)}$, $p^{(3}6/m^{/)}m^{(2}m^{(2}$, $p^{(3}6^{2}/m^{/)}mm^{(2}$, $p^{(6}6/m^{/)}mm$, $p^{(6}6/m^{/)}m^{(2}m^{(2}$, $p^{(6}6^{(2}/m^{/)}mm^{(2}$; $p\bar{3}^{(6}m^{/)}$, $p^{(2}\bar{3}^{(3}m^{/)}$, $p^{(3}\bar{3}^{/)}m^{(2}$, $p^{(6}\bar{3}^{/)}m$, $p^{(6}\bar{3}^{/)}m^{(2}$; $p^{(3}2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$, $p^{(6}2^{/)}2^{/)}2$, $p^{(6}2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$; $p^{(2}3^{(3}2^{/)}$, $p^{(6}32^{/)}$, $p^{(6}3^{(3}2^{/)}$, $p^{(6}3^{(-3}2^{/)}$; $p^{(6}42^{/)}2^{/)}$, $p^{(3}4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{(6}4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$; $p6^{(6}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(2}6^{(3}2^{/)}2^{IV)}$, $p^{(2}6^{(6}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(3}6^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{(3}6^{(6}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(3}6^{(-6}2^{/)}2^{///)}$, $p^{(6}62^{/)}2^{/)}$, $p^{(6}6^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{(6}6^{(3}2^{/)}2^{IV)}$, $p^{(6}6^{(-3}2^{/)}2^{V)}$, $p^{(6}6^{(6}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(6}6^{(-6}2^{/)}2^{///)}$.

Но группа P, задающая (6/)-симметрию, обладает четырьмя нетривиальными нормальными делителями, $Q_1 = 2$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 6$ и $Q_4 = 3/$, поэтому кроме выписанных младших, имеются еще 32 две-средние, ввиду того, что фактор-группа $6//2 \cong 3/$, 322 три-средние, ибо $6//3 \cong 2/$, 122 шесть-средних, так как $6//6 \cong (1/)$, и 122 (3/)-средние, вследствие того, что фактор–группа $6//3/\cong 2$. Следовательно, при (6/)-симметрии рассматриваемые группы порождают 678 новых групп, из которых 80 младших и 598 Q-средних.

В итоге имеем, что при обобщении 31 трехмерной симморфной линейной группы с десятью розеточными P-симметриями ($P \cong G_{20}$) получаем 2932 группы, из которых 31 порождающая, 279 старших, 829 младших и 1793 Q-средних.

4. Индексы и знаки, приписываемые точкам фигуры при обобщении их групп симметрии с определенной P-симметрией, имеют внегеометрический смысл по отношению к пространству, в котором рассматривается фигура; в добавочном измерении они могут толковаться геометрически, что позволило применить собранные в [2, 9, 10] одно-, двух- и трехмерные кристаллографические группы P-симметрии к исследованию многомерных групп симметрии. Так, например, нульмерными группами p- и (p/)-симметрии G_0^p и $G_0^{p'}$ при p=1, 2, 3, 4, 6, как показано в [7], интерпретируются десять групп симметрии односторонних розеток G_{20}. Действительно, обобщенные группы *1* категории G_0, порождаемой единственным тождественным преобразованием нульмерного пространства E_0 с p- и (p/)- симметрией при отмеченных значениях p, приводят к одной порождающей группе 1 и девяти старшим группам $1\times 1^{(2)}$, $1\times 1^{(3)}$, $1\times 1^{(4)}$, $1\times 1^{(6)}$, $1\times 1^{/)}$, $2\times(1^{(2}\cdot 1^{/)})$, $1\times(1^{(3}\cdot 1^{/)}$, $1\times(1^{(4}\cdot 1^{/)}$, $1\times(1^{(6}\cdot 1^{/)})$, то есть к десяти группам G_0^P, не отличающимся от самих групп P- подстановок индексов. Но наглядные геометрические схемы этих десяти групп P на плоскости [асимметричная точка с индексом 1, пара симметричных относительно оси асимметричных точек с индексом 1 и $\bar{1}$, пара симметричных друг другу относительно центра асимметричных точек с индексами 1 и 2 для 1- (1/)- и 2-симметрии соответственно (*рис.1*), ориентированный правильный p- угольник, вершины которого занумерованы индексами 1, 2,…, p для P-симметрии при $p > 2$ (*рис.2*), а также равноугольно-полуправильный $2p$-угольник, вершины которого занумерованы числами 1, 2, …, p и $\bar{1}$, $\bar{2}$,…, $\bar{p}$ так, что его полная группа симметрии моделируется группой

подстановок $P = \{(1, 2, \ldots, p)\,(\bar{p}, \ldots, \bar{2}, \bar{1}), (1, \bar{1})\ldots(p, \bar{p})\}$ номеров его вершин для (p/)-симметрии при $p \geq 2$ (*рис.3*)] явно дают их интерпретацию в виде групп симметрии односторонних розеток G_{20} [7], благодаря чему p- и (p/)-симметрии при $p = 1, 2, 3, 4, 6$ в [7] были названы розеточными P-симметриями.

Далее, группы симметрии конечных цилиндров G_{310} можно сопоставить с сильноизоморфными им группами отрезков G_{10}^{P} розеточных P-симметрий. Именно группы симметрии и антисимметрии отрезков $G_{10}^{/}$ соответствуют группам симметрии конечных цилиндров без главных осей, если знаки "+" или "-", приписанные точкам отрезка, толковать как расположение точек конечного цилиндра по определенные стороны от плоскости, проходящей через его ось. Группы p-симметрии отрезков G_{10}^{p} соответствуют группам конечных цилиндров без боковых элементов симметрии, если индексы 1,2, …p в точках отрезка толковать как расположение точек внутри определенных p-равных двугранных углов, окружающих ось конечного цилиндра, а группы (p/)-симметрии отрезка $G_{10}^{p'}$ соответствуют группам симметрии конечного цилиндра общего типа при толковании индексов со знаками 1, 2,…, p и $\bar{1}, \bar{2} \ldots, \bar{p}$ в виде $2p$ общих положений точек конечного цилиндра внутри p равных двугранных углов, сходящихся по его оси. Необходимо учитывать обе группы 1 и m категории G_{10} и все группы полных P-симметрий G_{10}^{1}, G_{10}^{p} и $G_{10}^{p'}$ при $p = 2, 3, 4, 6$ (ср.со с. 120 в [9]).

Полное сопоставление групп отрезков G_{10}^{P} розеточных P-симметрий в порядке перчисления с группами симметрии конечных цилиндров G_{310} дано в таблице 1.

Таблица 1

Сопоставление групп отрезков G_{10}^{P} розеточных *P*-симметрий с группами симметрии конечных цилиндров G_{310}.

Группы отрезков G_{10}^{P} розеточных P-симметрий	Группы симметрии конечных цилиндров G_{310}
$1, 1\times1^{/}; m, m^{/)}, m\times1^{/}; 1\times1^{(2)};$ $m^{(2)}, m\times1^{(2)}; 1\times1^{(3)}, m\times1^{(3)}, 1\times1^{(4)}, m\times1^{(4)},$ $m^{(4)}; 1\times1^{(6)}; m\times1^{(6)}, m^{(6)}, 1\times1^{(2}\times1^{1)};$ $m\times1^{(2}\times1^{/)}, m^{(2}\times1^{/)}, m^{1)}\times1^{(2}; 1^{(3}\cdot1^{/)},$ $m\times1^{(3}\cdot1^{/)}, m^{/)}\cdot1^{(3}; 1\times1^{(4}\cdot1^{/)}, m\times1^{(4}\cdot1^{/)},$ $m^{(4}\cdot1^{/)}, m^{/)}\times1^{(4}; 1\times1^{(6}\cdot1^{/)}, m\times1^{(6}\cdot1^{/)},$ $m^{(6}\cdot1^{/)}, m^{/)}\cdot1^{(6}$	1, m11, 11m, 211, 2mm, 112, $\bar{1}$, 112/m, 3, $\bar{3}$, 4, 4/m, $\bar{4}$, 6, 6/m, $\bar{6}$, mm2, mmm, 2/m11, 222, 3m, $\bar{6}$2m, 32, 4mm, 4/mmm $\bar{4}$2m, 4222, 6mm, 6/mmm. $\bar{3}$m, 622

Совершенно аналогично отмеченному соответствию групп отрезков розеточных P-симметрий группам симметрии конечных цилиндров, все различные "симморфные" группы 5-мерного пространства с инвариантными трехмерной плоскостью и прямой в ней ("симморфные" группы симметрии категории G_{531}) интерпретируются в виде симморфных цилиндрических групп G_{31}, G_{31}^{1}, G_{31}^{p} и $G_{31}^{p'}$ при $p = 2, 3, 4, 6$ (где выписываются только группы полных симметрий) через сложное толкование знаков "+" или "-", индексов 1, 2, …, p или индексов со знаками 1, 2,…, p и $\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{p}$. При выявлении 2932 симморфных цилиндрических групп G_{31}^{P} розеточных P-симметрий были учтены все отмеченные условия. Однако соответствие между симморфными цилиндрическими группами G_{31}^{P} розеточных P-симметрий и "симморфными" группами симметрии категории G_{531}, в отличие от рассмотренного нами соответствия между группами симметрии конечных цилиндров и группами отрезков розеточных P-симметрий, не является взаимно однозначным. Именно каждая цилиндрическая группа розеточных P-симметрий интерпретирует точно одну из различных "симморфных" G_{531}, а обратное соответствие не всегда однозначно: двум различным только за счет энантиоморфизма цилиндрическим группам розеточных P-симметрий сопоставляются одинаковые "симморфные" группы категории G_{531}. Отсюда следует, что при выявлении количества неодинаковых групп, составляющих категорию "симморфных" групп G_{531} с помощью симморфных цилиндрических групп G_{31}^{P} розеточных P-симметрий, нужно в списках симморфных цилиндрических G_{31}, G_{31}^{1}, G_{3}^{p} и $G_{3}^{p'}$ оставить по одному представителю от каждой пары групп, различающихся только за счет энантиоморфизма, т.к. трехмерный энантиоморфизм теряет свое различие в n-мерных группах при $n \geq 4$ (ср. с категорией G_{53} в [15]).

Заметим, что среди симморфных групп G_{31}, G_{31}^{1}, $G_{31}^{1/}, G_{31}^{2}$ и $G_{31}^{2/}$ нет энантиоморфных пар, среди групп G_{31}^{3} имеются две энантиоморфные пары: $p^{(3)}3^{(3)}$ и $p^{(3)}3^{(-3)}$, $p^{(3)}6^{(3)}$ и $p^{(3)}6^{(-3)}$. Среди симморфных групп G_{31}^{4} – одна энантиоморфная пара $p^{(4)}4^{(4)}$ и $p^{(4)}4^{(-4)}$, а среди таких же групп $G_{31}^{(6)}$ – три пары $p^{(6)}3^{(3)}$ и $p^{(6)}3^{(-3)}$, $p^{(3)}6^{(6)}$ и $p^{(3)}6^{(-6)}$, $p^{(6)}6^{(6)}$ и $p^{(6)}6^{(-6)}$ среди младших и две пары среди 2-средних. Далее, среди симморфных групп $G_{31}^{3'}$ имеется две пары $p^{(3}3^{(3}2^{/)}$ и $p^{(3}3^{(-3}2^{/)}$, $p^{(3}6^{(3}2^{/)}2^{//)}$ и $p^{(3}6^{(-3)}2^{/)}2^{///)}$ энантиоморфных групп. В свою очередь, среди групп $G_{31}^{4'}$ имеется одна пара $p^{(4}4^{(4}2^{/)}2^{//)}$ и $p^{(4}4^{(-4}2^{/)}2^{///)}$ энантиоморфных. Наконец, среди групп $G_{31}^{6/}$ имеются четыре пары $p^{(6}3^{(3}2^{/)}$ и $p^{(6}3^{(-3}2^{/)}$, $p^{(3}6^{(6}2^{/)}2^{//)}$ и $p^{(3}6^{(-6}2^{/)}2^{///)}$, $p^{(6}6^{(3}2^{/)}2^{IV)}$ и $p^{(6}6^{(-3}2^{/)}2^{V)}$, $p^{(6}6^{(6}2^{/)}2^{//)}$ и $p^{(6}6^{(-6}2^{/)}2^{///)}$ энантиоморфных среди младших и две пары среди 2-средних. Отсюда следует, что среди всех 2932 цилиндрических симморфных групп розеточных P-симметрий имеется 18 пар энантиоморфных групп. Следовательно, 2 932 – 18 = 2914 симморфным цилиндрическим группам розеточных P-симметрий соответствуют 2914 различных "симморфных" группы категории G_{531}.

Полное число групп, составляющих категорию G_{531}, станет сразу известным только после выявления всех различных без учета энантиоморфизма гемисимморфных и асимморфных цилиндрических групп розеточных P-симметрий.

Таким образом, кристаллографические группы P-симметрии при их полной классификации позволяют продвинуть вперёд принципиальное решение задачи n-мерной дискретной геометрии и геометрической кристаллографии при $n \geq 4$.

5. В заключение отметим, что при поиске решения поставленной задачи нами получены следующие побочные результаты:

1) осуществлено распределение розеточных P-симметрий по классам изоморфности, т.е. классам, содержащим P-симметрии, характеризуемые группами подстановок одинакового строения;

2) выявлены нетривиальные нормальные делители групп подстановок, задающих розеточные P-симметрии;

3) составлены фактор-группы отмеченных групп подстановок по их нормальным делителям и указаны группы подстановок, которым эти фактор–группы сильно изоморфны.

Опираясь на общую теорию P-симметрии и перечисленные выше побочные факты, удалось существенно сократить числовой обзор полного вывода новых групп и выявить среди полученных симморфных цилиндрических групп P-симметрии все энантиоморфные пары, отличающиеся друг от друга только за счет энантиоморфизма.

Литература:

1. Галярский Э.И., Заморзаев А.М. Полный вывод кристаллографических групп симметрии и различного рода антисимметрии стержней // Кристаллография. - 1965. - Т.10. - Вып. 2. - С.147-154.
2. Заморзаев А. М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинев: Штиинца, 1976. - 283 с.
3. Заморзаев А.М. Палистрант А.Ф. Теория дискретных групп симметрии. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1977. - 100 с.
4. Палистрант А.Ф. Плоскостные и пространственные группы симметрии и обобщенной антисимметрии и их приложения.- Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Кишинев, 1966. - 298 с.
5. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрические аспекты теории групп. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1978. - 59 с.
6. Неронова Н.Н. Белов Н.В. Единая схема кристаллографических групп симметрии классических и черно-белых // Кристаллография. - 1961. - Т.6. - Вып. 1. - С. 3- 12.

7. Палистрант А.Ф. О группах (p,2)- и (p/,2)-симметрии и их геометрических приложениях // Алгебраические структуры и геометрия. - Кишинев: Штиинца, 1991, с.92-105.
8. Палистрант Александр. Многомерные приложения розеточных и таблеточных P-симметрий // Analele Ştiinţifice ale Universităţii de Stat din Moldova: Seria "Ştiinţe fizico-matematice". - Chişinău, 1999, p.243-247.
9. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, ее обобщения и приложения. - Кишинев: Штиинца., 1978. - 275 с.
10. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. P-симметрия и её дальнейшее развитие. - Кишинев: Штиинца, 1986. - 156 с.
11. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме P-симметрий // Известия АН РМ. Математика. - 1994. - №1. - С.75 - 84.
12. Шубников А.В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. - Москва: Изд-во АН СССР, 1951. - 172 с.
13. Галярский Э.И. Группы симметрии подобия и их обобщения: Дисс. … кандидата физ.-матем. наук. - Кишинев, 1970. - 297 с.
14. Палистрант А.Ф. Трехмерные линейные и плоскостные группы (p/)-симметрии // Общая алгебра и дискретная геометрия. - Кишинев: Штиинца, 1980, с.58-71.
15. Палистрант А.Ф. Пространственные группы (p/)-симметрии (полиевы) и их применение к выводу пятимерных кристаллографических групп симметрии // ДАН СССР. - 1980. - Т.254. - №5. - С.1126-1130.

Prezentat la 04.03.2008