# GRAFURI CU O FAMILIE REDUSĂ DE MULŢIMI d-CONVEXE

***Nadejda SUR***

*Catedra Informatică şi Optimizare Discretă*

In this article are presented some results that are dealing with studying of some special classes of graphs, with a reduced family of d-convex simple sets – the class of d-convex simple and quasi-simple graphs. The cases of undirected and directed graphs are studied.

## 1. Grafuri d-convex simple neorientate

Fie G = (X, U) un graf neorientat, finit şi conex. Lungimea celui mai scurt lanţ ce uneşte două vârfuri x, y $\in$ X, se numeşte *distanţă* dintre aceste două vârfuri şi se va nota d(x, y). Distanţa introdusă astfel defineşte o metrică pe graful G. Mulţimea

$$\langle x, y \rangle = \{ z \in X \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$$

se numeşte *d-segment* ce uneşte vârfurile x, y [16].

**Definiţia 1.1** [16]: *Mulţimea $A \subseteq X$ se numeşte **d-convexă** în graful G = (X, U) dacă pentru $\forall$ x, y $\in$ A are loc relaţia $\langle x, y\rangle \subseteq A$.*

**Definiţia 1.2** [16]: *Se numeşte **învelitoare d-convexă** a mulţimii $B \subset X$, cea mai mică după incluziune mulţime d-convexă $A \subseteq X$, astfel încât $B \subset A$ şi se notează prin **d-conv(B) = A**.*

**Definiţia 1.3** [16]: *Graful G = (X; U) se numeşte **d-convex simplu** dacă nu conţine mulţimi d-convexe A, astfel încât $2 < |A| < |X|$.*

Se pare că pentru prima dată aceste grafuri au fost examinate în [14], unde se dă o caracteristică a grafurilor d-convex simple planare. O analiză a grafurilor d-convex simple arbitrare este dată în [15]. În această lucrare se defineşte o clasă de grafuri recursive ce satisfac anumite condiţii şi se arată că orice graf d-convex simplu arbitrar aparţine acestei clase de grafuri. Însă, acest rezultat s-a dovedit a fi incorect, ceea ce a fost ilustrat în [11] printr-un contraexemplu: un graf ce satisface tuturor condiţiilor clasei definite în [15], dar care nu este d-convex simplu.

**Teorema 1.1** [11-12]: *Un graf G = (X; U) fără triunghiuri (fără cicluri de lungimea 3), este d-convex simplu dacă şi numai dacă G = d-conv({p, q}) pentru orice două vârfuri p şi q neadiacente; dacă şi numai dacă G = d-conv({p, q}) pentru orice două vârfuri p şi q aflate la distanţa 2 în G.*

Fie x un vârf arbitrar din G = (X, U). Mulţimea $\Gamma(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in U \}$ se numeşte *vecinătatea* vârfului x [13].

**Definiţia 1.4** [11]: *Se spune că vârful u **domină** vârful v în graful G = (X, U) dacă $\Gamma(u) \supseteq \Gamma(v)$. În condiţia $\Gamma(u) = \Gamma(v)$ vârfurile u, v se numesc vârfuri **copii**.*

**Definiţia 1.5** [11]: *Mulţimea de vârfuri D se numeşte **dominantă** în graful G = (X; U) dacă orice vârf x al grafului G este dominat de un careva vârf y din mulţimea D, unde e posibil x = y.*

În [11] este demonstrat că toate mulţimile dominante minimale după incluziune a unui graf G sunt izomorfe între ele şi generează unul şi acelaşi graf notat $G_0$ care se numeşte **atomul** grafului G. Pentru a construi $G_0$ determinăm mai întâi mulţimile:

$$S = \{x \in X\colon \forall y \in X \Rightarrow \Delta(x) \not\subseteq \Delta(y)\}$$

$$R=\{x \in X \setminus S\colon \forall y \in X \Rightarrow \Delta(x) \not\subset \Delta(y)\},$$

Apoi, pentru orice x $\in$ R se formează mulţimea $R(x) = \{x\} \cup \{y \in R\colon \Delta(x) = \Delta(y)\}$. Astfel, R este divizată în clase de echivalenţă. $G_0$ este format din S şi câte un vârf din fiecare clasă de echivalenţă. Orice vârf $x_0$ din $G_0$ are un vârf corespondent x în G. Se va nota prin L(G, $G_0$) graful obţinut din grafurile G, $G_0$ şi următoarele muchii, pentru fiecare vârf $x_0$ din $G_0$ se vor considera muchiile de la $x_0$ la toate vârfurile din $\Gamma(x)$. În graful L(G, $G_0$) perechile de vârfuri de tipul x, $x_0$ vor fi adiacente aceloraşi vârfuri, deci x şi $x_0$ vor fi vârfuri copii.

**Teorema 1.2** [11]: *Dacă G este un graf conex şi fără cicluri de lungimea 3, atunci graful L(G, $G_0$) este un graf d-convex simplu, unde $G_0$ este atomul lui G;*

În [11] sunt definite şi studiate mai multe clase de grafuri, printre care:

1. $\mathcal{A}$ – mulțimea tuturor grafurilor fără cicluri de lungimea 3, în care orice vârf este dominat de un altul;
2. $\mathcal{F}$ – grafurile fără cicluri de lungimea 3 şi subgrafuri generate de tipul F (Fig.1a);
3. $\mathcal{H}_1$ – grafurile modular-ereditare, adică grafurile în care orice ciclu izometric este de lungimea patru;
4. $\mathcal{H}_2$ – grafurile cordale, sau grafurile bipartite în care orice ciclu generat este de lungimea patru;
5. $\mathcal{H}_3$ – grafurile ereditare după distanță, adică grafurile în care orice subgraf generat conex este izometric, şi fără cicluri de lungimea 3;
6. $\mathcal{P}$ – mulțimea de grafuri d-convex simple planare;

Fie, de asemenea, S$\mathcal{F}$, S$\mathcal{H}_1$, S$\mathcal{H}_2$, S$\mathcal{H}_3$ – toate grafurile d-convex simple din clasele de grafuri $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ respectiv. Sunt adevărate următoarele leme:

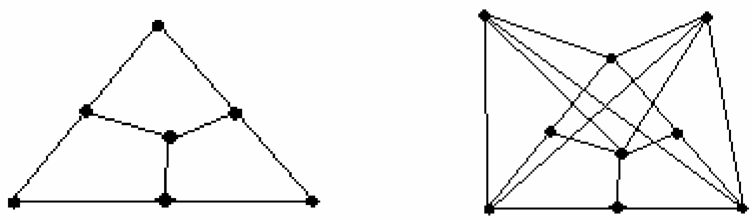
**Lema 1.1** [11]: *Orice graf G din clasa $\mathcal{A}$ este d-convex simplu.*

**Lema 1.2** [11]: *Dacă graful G este d-convex simplu fără subgrafuri de tipul F (Fig.1a), atunci G este din $\mathcal{A}$.*

De asemenea, în [11] este stabilită relația:

$$\mathcal{P} \subset S\mathcal{H}_3 \subset S\mathcal{H}_2 \subset S\mathcal{H}_1 \subset S\mathcal{F} \subset \mathcal{A}.$$

Afirmațiile reciproce lemelor 1.1, 1.2 sunt false, un graf d-convex simplu şi care nu aparține mulțimii $\mathcal{A}$ este graful H ilustrat în Fig.1b), iar un graf d-convex simplu ce conține graful F ca subgraf generat şi aparține mulțimii date este graful L(F, $F_0$).



a) graful F b) graful H

**Fig.1.**

**Teorema 1.3** [11]: *Fie G un graf local finit. Atunci:*

*1. G $\in \mathcal{A}$ dacă şi numai dacă G = L(Γ, $\Gamma_0$), unde Γ este un graf conex şi fără triunghiuri, iar $\Gamma_0$ este atomul lui Γ;*

*2. G $\in$ S$\mathcal{F}$ dacă şi numai dacă G = L(Γ, $\Gamma_0$), unde Γ $\in \mathcal{F}$;*

*3. G $\in$ S$\mathcal{H}_i$ dacă şi numai dacă G = L(Γ, $\Gamma_0$), unde Γ $\in \mathcal{H}_i$, i = 1, 2, 3;*

*4. G $\in \mathcal{P}$ dacă şi numai dacă G = L(Γ, $\Gamma_0$), unde Γ este un arbore cu cel puțin 3 vârfuri.*

Considerăm următoarea clasă de grafuri $\mathcal{G}$ fără triunghiuri şi definită recursiv după cum urmează:

I. În clasa $\mathcal{G}$ sunt toate grafurile $G_0 = (X_{G_0}, U_{G_0})$, unde:

$X_{G_0} = \{u, v, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,

$U_{G_0} = \{(u, x_j); (x_j, v) \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$;

II. Din $G_{i-1}$ ($i \geq 1$) definim graful $G_i$, unde:

$X_{G_i} = X_{G_{i-1}} \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $m \geq 1$,

$U_{G_i} = U_{G_{i-1}} \cup \{(a, b) \mid a, b \in X_{G_i}$, şi nu ambele din $X_{G_{i-1}}$, astfel încât sunt satisfăcute condițiile a), b) şi c)$\}$.

a) Pentru orice $y_j$ există p, q $\in X_{G_{i-1}}$, astfel încât $y_i \in$ d-conv({p, q});

b) Pentru toate a, b $\in X_{G_i}$ la distanța 2, există p, q $\in X_{G_{i-1}}$, p, q diferite de a, b, astfel încât $d_{G_{i-1}}(p, q) = 2$ şi p, q $\in$ d-conv({a, b});

c) Graful $G_i$ este fără triunghiuri.

III. În $\mathcal{G}$ nu sunt alte grafuri în afară de $G_i$, $\forall$ i $\in$ N.

**Teorema 1.4**: *Un graf G = (X, U) este d-convex simplu dacă şi numai dacă* $G \in \mathcal{G}$.

Astfel, a fost obţinută o metodă iterativă de a caracteriza în general grafurile d-convex simple. Această caracteristică permite să se construiască iterativ grafuri d-convex simple oricât de complicate, însă nu spune prea multe despre structura nemijlocită a acestor grafuri, cum ar arăta ele şi cât ar fi de diverse. De aceea, pentru a pune în evidenţă această structură, care ar permite ulterior rezolvarea unor probleme aplicative, s-a recurs la studierea acestei mulţimi pe clase [11-12]. În cele ce urmează se vor introduce nişte operaţii algebrice pe aceste mulţimi de grafuri cu ajutorul cărora se vor defini ulterior clase noi de grafuri d-convex simple, care extind clasele de grafuri d-convex simple ştiute şi care sunt transparente ca structură, scopul fiind de a caracteriza cât mai multe grafuri din mulţimea de grafuri d-convex simple.

Dacă G = (X, U) este un graf simplu conex în care există o pereche de vârfuri copii u, v, atunci $d_G(u, v) = 2$. Într-adevăr, aşa cum u, v sunt vârfuri copii şi vecinătăţile lor coincid, rezultă că avem un lanţ de lungimea 2 ce le uneşte şi u nu este adiacent v, pentru că în caz contrar în G am avea bucle.

Fie $G_1$ şi $G_2$ două grafuri simple şi conexe în care există câte o pereche de vârfuri copii, $x_1$, $x_2$ în $G_1$ şi $y_1$, $y_2$ în $G_2$. Se va nota prin $M^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}(G_1, G_2)$ (Fig.2), graful obţinut din grafurile $G_1$ şi $G_2$ prin alipirea vârfurilor $x_1$ cu $y_1$ şi $x_2$ cu $y_2$.

**Teorema 1.5:** *Dacă $G_1$ şi $G_2$ sunt două grafuri d-convex simple în care există câte o pereche de vârfuri copii, $x_1$, $x_2$ în $G_1$ şi $y_1$, $y_2$ în $G_2$, atunci graful $G = M^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}(G_1, G_2)$ este d-convex simplu.*

Din teorema 1.5 rezultă că operaţia introdusă mai sus M este operaţie algebrică pe mulţimea grafurilor d-convex simple $\mathcal{G}$.

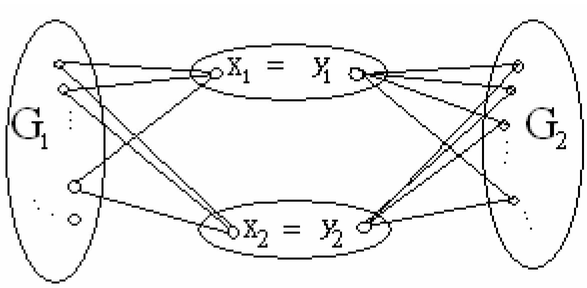



**Fig.2.** Graful $M^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}(G_1, G_2)$.

Din teorema 1.3 şi operaţia L rezultă că grafurile claselor $\mathcal{P}$, $S\mathcal{H}_3$, $S\mathcal{H}_2$, $S\mathcal{H}_1$, $S\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ au cel puţin câte o pereche de vârfuri copii şi deci asupra lor poate fi aplicată operaţia M.

**Teorema 1.6:** *Pentru orice două grafuri finite $G_1$ şi $G_2$ sunt adevărate afirmaţiile:*

*1. Dacă $G_1, G_2 \in \mathcal{A}$, atunci $G = M(G_1, G_2) \in \mathcal{A}$;*

*2. Dacă $G_1, G_2 \in S\mathcal{F}$, atunci $G = M(G_1, G_2) \in S\mathcal{F}$;*

*3. Dacă $G_1, G_2 \in S\mathcal{H}_i$, atunci $G = M(G_1, G_2) \in S\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, 3$;*

*4. Dacă $G_1, G_2 \in \mathcal{P}$, atunci $G = M(G_1, G_2) \in \mathcal{P}$;*

*5. Dacă $G_1$ şi $G_2$ sunt două grafuri d-convex simple şi bipartite în care există câte o pereche de vârfuri copii, atunci graful $G = M(G_1, G_2)$ este d-convex simplu şi bipartit.*

Altfel spus, teorema 1.6 afirmă că operaţia introdusă M este algebrică pe fiecare din clasele menţionate şi deci nu se generează nici un graf d-convex simplu nou dacă folosim doar grafurile acestor clase.

Fie acum un graf d-convex simplu G = (X, U) şi v un vârf arbitrar din G. Se formează graful $G^{++}$ în care s-a adăugat un vârf copie pentru v care este notată $v'$.

**Teorema 1.7:** *Dacă G este un graf d-convex simplu, atunci $G^{++}$ este, de asemenea, un graf d-convex simplu.*

Fie acum un graf d-convex simplu G = (X, U) şi v un vârf arbitrar din G, care are cel puţin două vârfuri copii $v_1$ şi $v_2$. Se formează graful $G^{--}$ în care lipseşte un vârf copie a lui v, de exemplu $v_2$.

**Teorema 1.8:** *Dacă G este un graf d-convex simplu, atunci $G^{--}$ este, de asemenea, un graf d-convex simplu.*

Fie G un graf în care există două perechi de vârfuri copii, $x_1$, $x_2$ şi $y_1$, $y_2$. Se va nota prin $W^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}(G)$ graful obţinut din graful G prin alipirea vârfurilor $x_1$ cu $y_1$ şi $x_2$ cu $y_2$.

**Teorema 1.9:** *Dacă G este un graf d-convex simplu în care există două perechi de vârfuri copii, $x_1$, $x_2$ și $y_1$, $y_2$, care satisfac condiția $d(x_1, y_1) > 3$, atunci graful $H = W^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}(G)$ este, de asemenea, d-convex simplu.*

Operația W, dintre clasele de grafuri d-convex simple menționate, este algebrică doar pe mulțimea grafurilor d-convex simple cu vârfuri dominate $\mathcal{A}$**.**

Deoarece conform teoremei 1.6 operația M este algebrică pe clasele respective de grafuri d-convex simple și conform lemei 1.2 toate grafurile d-convex simple fără subgrafuri F sunt din $\mathcal{A}$, rezultă că o clasă nouă de grafuri d-convex simple va trebui să conțină doar grafuri ce îl conțin pe F ca subgraf și vârfuri ce nu sunt dominate, cel puțin unul.

Să notăm prin $\mathcal{C}$ orice clasă de grafuri d-convex simple, de exemplu una din cele menționate mai sus.

**Definiția 1.6:** *Mulțimea tuturor grafurilor ce pot fi obținute din graful G și grafurile mulțimii $\mathcal{C}$ prin aplicarea operației M de un număr finit de ori se va numi **extinderea clasei $\mathcal{C}$ prin graful G** și se va nota prin **$\mathcal{C}[G]_M$**.*

Sunt adevărate următoarele proprietăți:

1. $\mathcal{C}[G]_M$ – este o clasă de grafuri d-convex simple;
2. $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}[G]_M$;
3. Dacă $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ atunci $\mathcal{C}_1[G]_M \subset \mathcal{C}_2[G]_M$;
4. Dacă $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ și $G \notin \mathcal{C}_2$ atunci $\mathcal{C}_1[G]_M \not\subset \mathcal{C}_2$;

Se pot forma extinderile claselor de grafuri d-convex simple prin graful H din Fig.1b). Se va obține $\mathcal{P}[H]_M$, $S\mathcal{H}_i[H]_M$, $i = 1, 2, 3$; $\mathcal{F}[H]_M$, $\mathcal{A}[H]_M$. Atunci este adevărată următoarea relație:

$$\mathcal{P}[H]_M \subset S\mathcal{H}_3[H]_M \subset S\mathcal{H}_2[H]_M \subset S\mathcal{H}_1[H]_M \subset S\mathcal{F}[H]_M \subset \mathcal{A}[H]_M.$$

Mai mult, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}[H]_M$; deci, clasa $\mathcal{A}[H]_M$ este mai mare decât toate clasele de grafuri cunoscute până acum.

Graful H nu este însă unicul cu această proprietate, și orice graf nou d-convex simplu, cu cel puțin o pereche de vârfuri copii, împreună cu $\mathcal{A}$ generează alte extinderi. Putem de asemenea forma o nouă extindere asupra extinderii clasei $\mathcal{A}$ deja formate. Fie σ o mulțime de grafuri d-convex simple și $\mathcal{C}$ o clasă de grafuri d-convex simple. Avem:

**Definiția 1.7:** *Mulțimea tuturor grafurilor ce pot fi obținute din grafurile mulțimii σ și grafurile clasei $\mathcal{C}$ prin aplicarea operației M de un număr finit de ori se va numi **extinderea clasei $\mathcal{C}$ prin mulțimea σ** și se va nota prin **$\mathcal{C}[\sigma]_M$**.*

Sunt adevărate următoarele proprietăți:

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}[\sigma]_M \subset \mathcal{G}$, unde $\mathcal{G}$ este mulțimea tuturor grafurilor d-convex simple;
2. $\mathcal{C}[\sigma_1 \cup \sigma_2]_M = \mathcal{C}[\sigma_1]_M[\sigma_2]_M = \mathcal{C}[\sigma_2]_M[\sigma_1]_M$;

**Definiția 1.8:** *Se zice că graful d-convex simplu G **se divide,** sau **este divizibil** în raport cu operația M, dacă există două grafuri d-convex simple $G_1$ și $G_2$, astfel încât $G = M(G_1, G_2)$. În acest caz, $G_1$ și $G_2$ se vor numi **divizorii** grafului G.*

**Definiția 1.9:** *Graful d-convex simplu G se numește graf **M-prim** dacă el nu este divizibil în raport cu operația M și **prim** dacă el nu este divizibil în raport cu operațiile M, W.*

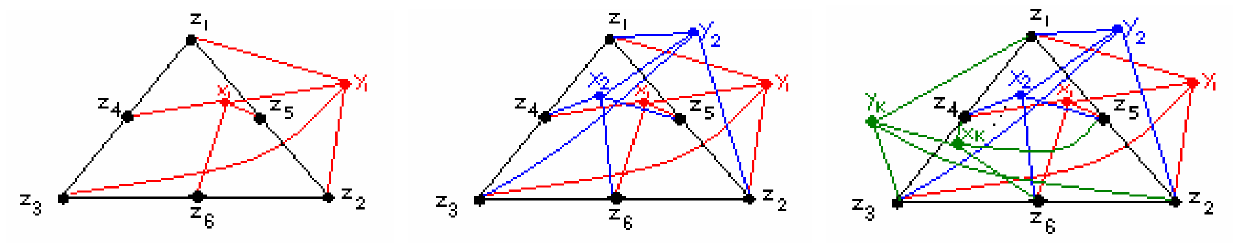
Ușor se observă că graful H din Fig.1b) este un graf prim.

**Teorema 1.10:** *Pentru ca graful d-convex simplu G să fie divizibil în raport cu operația M, este necesar și suficient să existe o pereche de vârfuri copii în G, care este o mulțime de articulație a acestui graf.*

**Consecință:** *Descompunerea unui graf d-convex simplu în grafuri M-prime este unică.*

Fie că se notează prin $\mathcal{B}$ <u>mulțimea tuturor grafurilor prime</u> din $\mathcal{G} \setminus \mathcal{A}$, prin $\mathcal{B}_1$ – acele grafuri din $\mathcal{B}$ în care există cel puțin câte o pereche de vârfuri copii și prin $\mathcal{B}_2$ – restul, adică acele grafuri din $\mathcal{B}$ în care nu există perechi de vârfuri copii. Avem $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$, fiindcă $H \in \mathcal{B}_1$ (Fig.1b). Se va arăta acum că și $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Pentru aceasta se construiesc grafurile $J_k = (X_k, U_k)$, $\forall\ k \in \mathcal{N}$, unde $X_k = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_k, y_k\}$, $U_k = \{(z_1, z_4); (z_1, z_5); (z_2, z_5); (z_2, z_6); (z_3, z_4); (z_3, z_6)\} \cup \{(x_i, z_4); (x_i, z_5); (x_i, z_6) \mid \forall\ i \in \{1, 2, ..., k\}\} \cup \{(y_i, z_1); (y_i, z_2); (y_i, z_3) \mid \forall\ i \in \{1, 2, ..., k\}\} \cup \{(x_i, y_i) \mid \forall\ i \in \{1, 2, ..., k\}\}$ (Fig.3).

Se verifică nemijlocit că grafurile $J_k$, $\forall\ k \in \mathcal{N}$ sunt d-convex simple și că în ele nici un vârf nu este dominat și, respectiv, nu există nici o pereche de vârfuri copii deci $\{J_k, \forall\ k \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{B}_2$.




a) $J_1$ b) $J_2$ c) $J_k$

**Fig.3.**

Operația de multiplicare a vârfurilor permite să se multiplice într-un graf d-convex simplu orice vârf şi graful nou va rămâne la fel d-convex simplu. Acest lucru permite să se construiască din grafurile mulțimii $\mathcal{B}_2$ grafuri din $\mathcal{B}_1$ sau chiar $\mathcal{A}$, dacă vom multiplica toate vârfurile nedominate. Graful H, de exemplu, poate fi obținut prin multiplicarea vârfului $y_1$ a grafului $J_1$ din Fig.3a). În următoarea figură sunt desenate alte grafuri ce derivă din acelaşi graf $J_1$.

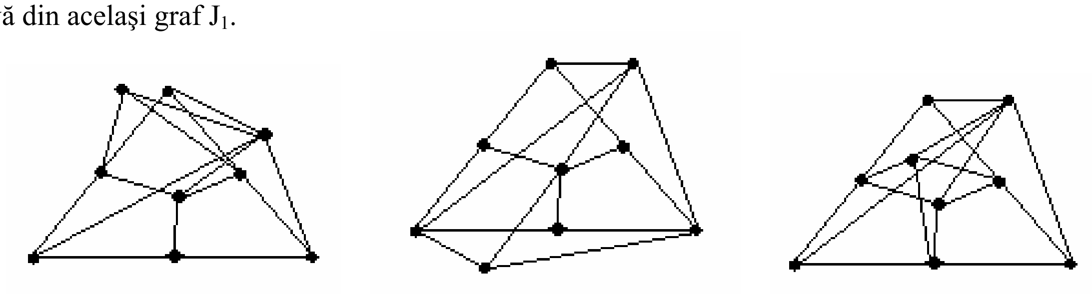


**Fig.4.**

Astfel, a fost atins, pe cât a fost posibil, scopul de a descrie mulțimea grafurilor d-convex simple prime cu vârfuri nedominate, iar din definirea acestor clase se obține relația:

$$\mathcal{A}[\mathcal{B}] = \mathcal{A}[\mathcal{B}_1] \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{G}.$$

În continuare se va da o interpretare nouă extinderilor de clase prin noțiunile de mulțimi închise şi mulțimi complete în raport cu o clasă de grafuri.

**Definiția 1.10:** *Mulțimea tuturor grafurilor ce pot fi obținute din grafurile mulțimii σ prin aplicarea operației M de un număr finit de ori se va numi **închiderea mulțimii σ în raport cu operația M** şi o vom nota prin* $[\sigma]_M$.

**Definiția 1.11:** *Mulțimea tuturor grafurilor ce pot fi obținute din grafurile mulțimii σ prin aplicarea operațiilor M, W, multiplicare, precum şi inversele lor, de un număr finit de ori se va numi **închiderea mulțimii σ** şi se va nota prin* $[\sigma]$.

Sunt adevărate următoarele proprietăți:

1. $[\sigma]$ – este o clasă de grafuri d-convex simple;
2. $[\sigma] \supseteq \sigma$;
3. Dacă $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$ atunci $[\sigma_1] \supseteq [\sigma_2]$;
3. $[[\sigma]] = [\sigma]$;
4. $[\sigma_1 \cup \sigma_2] \supseteq [\sigma_1] \cup [\sigma_2]$;

**Definiția 1.12:** *Mulțimea σ se numeşte **închisă în raport cu operația M** dacă* $[\sigma]_M = \sigma$ *şi **închisă** dacă* $[\sigma] = \sigma$.

Mulțimile $\mathcal{P}$, $S\mathcal{H}_3$, $S\mathcal{H}_2$, $S\mathcal{H}_1$, $S\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_2$, precum şi extinderile lor prin orice mulțimi de grafuri d-convex simple, sunt închise în raport cu operația M, iar $\{H\}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ nu sunt închise.

**Definiția 1.13:** *Mulțimea σ se numeşte **completă în raport cu operația M în clasa** $\mathcal{C}$ dacă* $[\sigma]_M = \mathcal{C}$ ***şi completă în clasa*** $\mathcal{C}$ *dacă* $[\sigma] = \mathcal{C}$.

Mulțimea $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ este completă în $\mathcal{G}$. Problema este de a găsi mulțimi de grafuri complete cu un număr minim de elemente pentru fiecare dintre clasele de grafuri descrise mai sus, inclusiv pentru $\mathcal{G}$. Grafurile acestor mulțimi se vor numi ***generatori*** ai clasei date.

**Teorema 1.11:** *Sunt adevărate relaţiile:*

a) $[P_3]_M = \mathcal{P}$;

b) $[P_3] = \mathcal{A}$.

Astfel, s-a obţinut că orice graf din clasa grafurilor d-convex simple planare $\mathcal{P}$ poate fi obţinut din graful $P_3$ şi operaţia M, iar orice graf d-convex simplu cu vârfurile dominate din $\mathcal{A}$ poate fi obţinut din graful $P_3$, operaţiile M, W şi operaţia de incrementare a vârfurilor.

Fie $G = (X_1, X_2; U)$ un graf d-convex simplu şi bipartit, în care $|X_1| = k$, $|X_2| = m$ şi $|U| = p$. Conform [11], este adevărată relaţia: $p \geq 2 * (k + m) - 4$. În plus, aşa cum orice graf bipartit complet este şi d-convex simplu, se obţine $p \leq k * m$. În legătură cu aceasta, în [11] este formulată ipoteza, care afirmă că pentru orice numere naturale k, m, p, unde p este între limitele menţionate, poate fi construit un graf d-convex simplu bipartit cu aceşti parametri şi este demonstrată ilustrativ pentru grafuri cu mai puţin de 10 vârfuri. Afirmaţia acestei ipoteze s-a dovedit a fi adevărată.

**Teorema 1.12:** *Pentru orice numere naturale $k \geq 1$, $m \geq 1$, $2 * (k + m) - 4 \leq p \leq k * m$, poate fi construit un graf d-convex simplu şi bipartit $G = (X_1, X_2; U)$, unde $|X_1| = k$, $|X_2| = m$, $|U| = p$.*

Următoarea teoremă permite să se afirme că problemele ce ţin de distanţă se reduc la rezolvarea lor pe componente, dacă se cunoaşte structura grafurilor.

**Teorema 1.13:** *Fie G orice graf conex şi fără triunghiuri şi $L(G, G_0)$ – graful d-convex simplu obţinut din G şi atomul lui. Atunci:*

*1. $r[L(G, G_0)] = r[G]$;*

*2. $d[L(G, G_0)] = d[G]$;*

*3. $c[L(G, G_0)] = c[G] \cup \{x \in G_0 |$ x este copie a unui vârf din $c[G]\}$;*

Este cunoscut că dacă $(X', \rho)$ este un spaţiu metric finit, cu metrica definită în numere întregi, atunci indiferent de metrica ρ, întotdeauna există un graf G = (X, U), astfel încât $X' \subseteq X$ şi distanţa dintre vârfurile submulţimii $X'$ în G coincide cu distanţa ρ a aceloraşi elemente în spaţiul $X'$. În acest caz se zice că metrica ρ este scufundată în graful G sau ρ este realizată în graful G. Prezintă interes atât practic, cât şi teoretic problema inversă. Se spune că graful G = (X, U) este *scufundat* sau *amplasat* în spaţiul metric $(X', \rho)$, dacă există o aplicaţie $\varphi : X \to X'$, astfel încât orice două vârfuri x, y adiacente în G au imaginile φ(x), φ(y) în $X'$ aflate la distanţa 1 a acestui spaţiu. În particular, prezintă interes cazul când spaţiul metric $X'$ este unul euclidian.

**Definiţia 1.14:** *Prin dimensiunea unui graf G = (X, U) se înţelege dimensiunea minimă a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^m$, cu proprietatea că graful G poate fi scufundat în el, astfel încât orice două vârfuri adiacente din G (adică la distanţa 1 în G) să fie la distanţa (euclidiană) 1 în $\mathbb{R}^m$. Se va nota dimG = m.*

Problema care prezintă interes poate fi formulată astfel: să se afle dimensiunea pentru orice graf G = (X, U). De asemenea, aici se poate vorbi şi despre elaborarea unor algoritmi ce ar permite calcularea dimensiunii unui graf neorientat. Astfel formulată, în caz general, această problemă este destul de dificilă. Rezultatul obţinut ţine de dimensiunea clasei de grafuri d-convex simple planare şi modul de amplasare a acestor grafuri în spaţiu. De asemenea, în [6,7] sunt descrişi algoritmii ce efectuează acest lucru.

**Teorema 1.14:** *Dacă G = (X, U), $|X| > 3$ este un graf d-convex simplu planar, atunci dimG = 3.*

## 2. Grafuri d-convex quasi-simple neorientate

În continuare se va descrie clasa grafurilor d-convex quasi-simple.

**Definiţia 2.1:** *Graful G = (X; U) se numeşte **d-convex quasi-simplu** dacă nu conţine mulţimi d-convexe $A \neq X$, care să genereze subgrafuri incomplete.*

Din definiţiile 1.3 şi 2.1 grafurile d-convex quasi-simple se deosebesc de cele d-convex simple numai prin faptul că în ele există mulţimi d-convexe ce generează subgrafuri complete cu mai mult de 2 vârfuri. Toate grafurile complete $K_n$, $n \in N$, satisfac definiţiei 2.1 şi, deci, sunt d-convex quasi-simple. Astfel, d-convexitatea simplă este un caz particular al d-convexităţii quasi-simple. Ca şi în cazul grafurilor d-convex simple, este adevărată următoarea teoremă:

**Teorema 2.1** [11, 15]: *Un graf G = (X; U) este d-convex quasi-simplu dacă şi numai dacă G = d-conv({p, q}) pentru orice două vârfuri p şi q neadiacente; dacă şi numai dacă G = d-conv({p, q}) pentru orice două vârfuri p şi q aflate la distanţa 2 în G.*

Se consideră următoarea clasă de grafuri $\mathcal{G}_Q$ definită recursiv după cum urmează:

I. În clasa $\mathcal{G}_Q$ sunt toate grafurile $G_0 = (X_{G_0}, U_{G_0})$, unde:

$X_{G_0} = \{u, v, x_1, x_2,\ldots, x_n\}$,

$U_{G_0} = \{(u, x_j); (x_j, v) \mid j = 1, 2,\ldots, n\} \cup$ {orice mulțime de muchii $(x_j, x_k)$, $j \neq k$, de care avem nevoie};

II. Din $G_{i-1}$ ($i\geq 1$) definim graful $G_i$, unde:

$X_{G_i} = X_{G_{i-1}} \cup \{y_1, y_2,\ldots, y_m\}$, $m \geq 1$,

$U_{G_i} = U_{G_{i-1}} \cup \{(a, b) \mid a, b \in X_{G_i}$, şi nu ambele din $X_{G_{i-1}}$, astfel încât sunt satisfăcute condițiile a) şi b)}.

a) Pentru orice $y_j$ există $p, q \in X_{G_{i-1}}$, astfel încât $y_i \in$ d-conv($\{p, q\}$);

b) Pentru toate $a, b \in X_{G_i}$ la distanța 2, există $p, q \in X_{G_{i-1}}$, p, q diferite de a, b, astfel încât $d_{G_{i-1}}(p, q) = 2$ şi $p, q \in$ d-conv($\{a, b\}$);

III. În $\mathcal{G}_Q$ nu sunt alte grafuri în afară de $G_i$, $\forall\ i \in N$.

**Teorema 2.2:** *Un graf $G = (X, U)$, $G \neq K_n$, $n \in N$, este d-convex quasi-simplu dacă şi numai dacă $G\in \mathcal{G}_Q$.*

Asupra grafurilor d-convex quasi-simple se definesc în mod analogic operațiile M, W şi de multiplicare şi decrementare a vârfurilor. Următoarele teoreme indică condițiile în care aceste operații pot fi aplicate asupra grafurilor din $\mathcal{G}_Q$.

**Teorema 2.3:** *Dacă $G_1$ şi $G_2$ sunt două grafuri d-convex quasi-simple în care există câte o pereche de vârfuri copii, $x_1$, $x_2$ în $G_1$ şi $y_1$, $y_2$ în $G_2$, atunci graful $G = M^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}(G_1, G_2)$ este d-convex quasi-simplu.*

Din teorema 2.3 rezultă că operația introdusă mai sus M este operație algebrică şi pe mulțimea grafurilor d-convex quasi-simple $\mathcal{G}_Q$.

**Teorema 2.4:** *Dacă G este un graf d-convex quasi-simplu cu numărul de muchii $m<[(n^2-n)/2]-1$, atunci $G^{++}$ este, de asemenea, un graf d-convex quasi-simplu.*

**Teorema 2.5:** *Dacă G este un graf d-convex quasi-simplu, atunci $G^{--}$ este, de asemenea, un graf d-convex quasi-simplu.*

**Teorema 2.6:** *Dacă G este un graf d-convex quasi-simplu în care există două perechi de vârfuri copii, $x_1$, $x_2$ şi $y_1$, $y_2$, care satisfac condiția $d(x_1, y_1) > 2$, atunci graful $H = W^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}(G)$ este, de asemenea, d-convex quasi-simplu.*

Fie $G = (X, U)$ orice graf neorientat cu n vârfuri: $X = \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$. Cu ajutorul lui se formează un graf nou, notat prin $G^{+2} = (X^{+2}, U^{+2})$, în modul următor:

$$X^{+2} = X \cup \{u, u_0\},\ U^{+2} = U \cup \{(u, x_i); (u_0, x_i) \mid i = 1, 2,\ldots, n\}.$$

Graful $G^{+2}$ are, astfel, cel puțin o pereche de vârfuri copii: $u$, $u_0$. Dacă G este diferit de graful vid $O_n$ şi deci are cel puțin o muchie $(x_k, x_l)$, atunci $G^{+2}$ nu este d-convex simplu, fiindcă are cicluri de lungimea trei: $u, x_k, x_l$ şi $u_0, x_k, x_l$.

**Lema 2.1:** *Fie G orice graf neorientat, atunci $G^{+2}$ este un graf d-convex quasi-simplu.*

Fie că se notează prin $\mathcal{J} = \{G^{+2} \mid G$ este conex$\}$, iar prin $\mathcal{A}^q = \{L^k(G) \mid G$ este conex$\}$.

**Definiția 2.2:** *Se zice că graful d-convex quais-simplu G **se divide,** sau **este divizibil** în raport cu operația M dacă există două grafuri d-convex quasi-simple $G_1$ şi $G_2$, astfel încât $G = M(G_1, G_2)$. În acest caz, $G_1$ şi $G_2$ se vor numi **divizorii** grafului G.*

**Definiția 2.3:** *Graful d-convex quasi-simplu G se numeşte graf **M-prim** dacă el nu este divizibil în raport cu operația M şi **prim** dacă el nu este divizibil în raport cu operațiile M, W.*

**Teorema 2.7:** *Pentru ca graful d-convex quasi-simplu G să fie divizibil în raport cu operația M este necesar şi suficient să existe o pereche de vârfuri copii în G, care să fie o mulțime de articulații ale acestui graf.*

În continuare se vor introduce noțiunile de mulțimi închise şi mulțimi complete în raport cu o clasă de grafuri pentru grafurile d-convex quasi-simple. Fie $\sigma$ o clasă de grafuri d-convex quasi-simple.

**Definiția 2.4:** *Mulțimea tuturor grafurilor ce pot fi obținute din grafurile mulțimii $\sigma$ prin aplicarea operației M de un număr finit de ori se va numi **închiderea mulțimii $\sigma$ în raport cu operația M** şi se va nota prin $[\sigma]^q_M$.*

**Definiția 2.5:** *Mulțimea tuturor grafurilor ce pot fi obținute din grafurile mulțimii σ prin aplicarea operațiilor M, W, multiplicare, precum şi inversele lor, de un număr finit de ori, se va numi* ***închiderea mulțimii σ*** *şi se va nota prin* $[\sigma]^q$.

Sunt adevărate următoarele proprietăți:

1. $[\sigma]^q$ – este o clasă de grafuri d-convex simple;
2. $[\sigma]^q \supseteq \sigma$;
3. Dacă $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$ atunci $[\sigma_1]^q \supseteq [\sigma_2]^q$;
3. $[[\sigma]^q]^q = [\sigma]^q$;
4. $[\sigma_1 \cup \sigma_2]^q \supseteq [\sigma_1]^q \cup [\sigma_2]^q$;

**Definiția 2.6:** *Mulțimea σ se numeşte* ***închisă în raport cu operația M*** *dacă* $[\sigma]_M^q = \sigma$ *şi* ***închisă*** *dacă* $[\sigma]^q = \sigma$.

**Definiția 2.7:** *Mulțimea σ se numeşte* ***completă în raport cu operația M în clasa*** $\mathcal{C}$ *dacă* $[\sigma]_M^q = \mathcal{C}$ ***şi completă în clasa*** $\mathcal{C}$ *dacă* $[\sigma]^q = \mathcal{C}$.

Problema este de a găsi mulțimi de grafuri complete cu un număr minim de elemente pentru fiecare dintre clasele de grafuri descrise mai sus, inclusiv pentru $\mathcal{G}^q$. Grafurile acestor mulțimi se vor numi ***generatori*** ai clasei date.

**Teorema 2.8.** *Sunt adevărate relațiile:*

*a)* $G^{+2} \in [J]_M^q$*, pentru orice graf G.*

*b)* $[K_{2.2}]^q = [\mathcal{A}^q]^q$.

Aşa cum $P_3$, $K_{2,2} \in [J]_M^q$, rezultă $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^q \subset [\mathcal{J}]^q$. Iar dacă se notează prin $\mathcal{P}^q$ mulțimea grafurilor d-convex quasi-simple planare, atunci cea mai largă clasă de grafuri cunoscută de acest fel, care au structura transparentă, este mulțimea:

$$[\mathcal{J} \cup \mathcal{P}^q \cup \mathcal{B}]^q \cup \{K_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Pentru grafurile d-convex quasi-simple s-a cercetat, de asemenea, problema calculării dimensiunii lor.

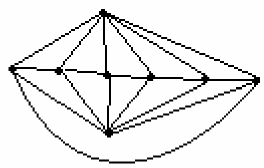


**Fig.5.** Graful $Q_6$.

**Teorema 2.9:** *Dacă* $G = (X, U)$, $|X| > 4$, $G \neq Q_6$ (Fig.5), *este un graf d-convex quasi-simplu planar, atunci* $\dim G = 3$.

## 3. Grafuri d-convex simple orientate

În cele ce urmează se vor studia grafuri orientate, fără bucle şi arce multiple. Un graf orientat $\vec{G} = (X; \vec{U})$ se numeşte *tare conex* sau *conex forte* dacă pentru oricare două vârfuri x, y $\in$ X există cel puțin un drum (lanț orientat) ce porneşte din vârful x spre vârful y şi cel puțin un drum ce porneşte din vârful y spre vârful x. Fie $D = (x = z_1, z_2, \ldots, z_p = y)$ este un drum ce porneşte din x spre y. În acest caz vom mai spune că drumul D leagă vârfurile x şi y în ordinea indicată, care se numesc *extremități* ale lui D. Numărul p se numeşte *lungime* a drumului

$$D = (x = z_1, z_2, \ldots, z_p = y)$$

şi vom scrie $l(D) = p$.

Fie $\mathcal{D}(x, y)$ familia tuturor drumurilor din $\vec{G}$ ce leagă vârfurile x şi y. Lungimea celui mai scurt drum din $\mathcal{D}(x, y)$ o vom numi *distanță* dintre vârfurile x şi y şi o vom nota prin d(x, y). Astfel:

$$d(x,y) = \min_{D \in \mathcal{D}(x,y)} \{l(D)\}.$$

În cazul când între două vârfuri x, y $\in$ X nu există drum care le leagă, se va considera că d(x, y) = $\infty$.

Astfel introdusă noțiunea de distanță nu posedă proprietatea comutativă; adică, la general vorbind, d(x, y) $\neq$ d(y, x). Distanța este o funcție d: X×X $\to \mathbb{N}$ ce posedă proprietățile:

1. d(x, y) $\geq$ 0, pentru oricare două vârfuri x, y $\in$ X, şi d(x, y) = 0 dacă şi numai dacă x = y;
2. d(x, y) $\leq$ d(x, z) + d(z, y), pentru oricare trei vârfuri x, y, z $\in$ X.

Astfel definită funcția – distanță d: X×X $\to \mathbb{N}$ este o *pseudo-metrică* în graful orientat $\vec{G}$.

Mulțimea < $\overrightarrow{x, y}$ > = { z $\in$ X | d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)} se numeşte *d-segment orientat* de la x spre y. Evident, noțiunea de segment orientat < $\overrightarrow{x, y}$ > are sens doar în cazul când în graful $\vec{G}$ există cel puțin un drum ce leagă x cu y. Din aceste considerente, în continuare vom studia doar grafuri tare conexe.

**Definiția 3.1:** *Mulțimea A $\subseteq$ X se numeşte **d-convexă** în graful $\vec{G}$ = (X; $\vec{U}$) dacă pentru orice x, y $\in$ A, luate în ordinea indicată, are loc relația < $\overrightarrow{x, y}$ > $\subseteq$ A.*

Se observă că pentru orice mulțime A, |A| = 0 sau 1, este d-convexă.

**Lema 3.1:** *Dacă A şi B sunt două mulțimi d-convexe ale unui graf orientat $\vec{G}$ = (X; $\vec{U}$), atunci intersecția lor A $\cap$ B este de asemenea o mulțime d-convexă în $\vec{G}$.*

**Definiția 3.2:** *Intersecția tuturor mulțimilor d-convexe ale unui graf orientat $\vec{G}$ = (X; $\vec{U}$), ce conțin o submulțime de vârfuri B $\subseteq$ X, se numeşte **învelitoare d-convexă** a mulțimii B şi se notează prin **d-conv(B).***

Dacă B $\subseteq$ X este deja o mulțime d-convexă, atunci d-conv(B) = B.

În cazul studierii învelitoarei convexe sunt evidente relațiile:

1. d-conv($\emptyset$) = $\emptyset$;
2. d-conv({x}) = {x};
3. d-conv(X) = X;
4. A $\subseteq$ d-conv(A);
5. d-conv(d-conv(A)) = d-conv(A);

În baza relațiilor menționate 1-5, putem spune ca noțiunea de d-convexitate pentru cazul grafurilor orientate se încadrează în axiomatica teoriei generale a convexității [12].

**Definiția 3.3:** *Graful orientat şi tare conex $\vec{G}$ = (X; $\vec{U}$) se numeşte **d-convex simplu** dacă nu conține mulțimi d-convexe A $\subset$ X, astfel încât 1 < |A| < |X|.*

**Teorema 3.1:** *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

*1. $\vec{G}$ = (X; $\vec{U}$) este un graf d-convex simplu orientat;*
*2. d-conv({x, y}) = X, pentru orice două vârfuri distincte x, y $\in$ X;*
*3. d-conv({x, y}) = X, pentru orice două vârfuri adiacente x, y $\in$ X;*

Se consideră următoarea clasă de grafuri orientate $\mathfrak{D}$, definită recursiv după cum urmează:

I. În clasa $\mathfrak{D}$ sunt toate grafurile $\vec{G}_0 = (X_{\vec{G}_0}, \vec{U}_{\vec{G}_0})$, unde:

$X_{\vec{G}_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, n $\geq$ 3,

$\vec{U}_{\vec{G}_0} = \{(x_n, x_1)\} \cup \{(x_i, x_{i+1}) \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\}$,

adică $\vec{G}_0$ este un contur elementar cu n vârfuri;

II. În baza grafului $\vec{G}_{i-1}$ (i $\geq$ 1) construim graful $\vec{G}_i = (X_{\vec{G}_i}, \vec{U}_{\vec{G}_i})$, unde:

$X_{\vec{G}_i} = X_{\vec{G}_{i-1}} \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, m $\geq$ 1,

$\vec{U}_{\vec{G}_i} = \vec{U}_{\vec{G}_{i-1}} \cup \{(a, b) \mid a, b \in X_{\vec{G}_i}$, şi nu ambele din $X_{\vec{G}_{i-1}}$, astfel încât sunt satisfăcute condițiile a), b)}.

d) Pentru orice vârf $y_j$ există două vârfuri distincte p, q $\in X_{\vec{G}_{i-1}}$, astfel încât

$y_j \in$ d-conv({p, q});

e) Pentru orice două vârfuri adiacente a, b $\in X_{\vec{G}_i}$, există două vârfuri distincte p, q $\in X_{\vec{G}_{i-1}}$, astfel încât au loc relațiile:

1. p, q $\in$ d-conv({a, b});
2. $d_{\vec{G}_{i-1}}(p, q) = d_{\vec{G}_i}(p, q)$;
3. $d_{\vec{G}_{i-1}}(q, p) = d_{\vec{G}_i}(q, p)$;

III. În $\mathfrak{D}$ nu sunt alte grafuri în afară de grafurile descrise iterativ în I şi II.

**Teorema 3.2:** *Un graf orientat tare conex $\vec{G} = (X, \vec{U})$, $|X| \geq 3$, este d-convex simplu dacă şi numai dacă $\vec{G} \in \mathfrak{D}$.*

Pentru grafurile orientate au fost definite: operația L, astfel încât perechi de vârfuri care erau copii în grafurile neorientate au devenit perechi de vârfuri anticopii [1]; operațiile M, W asupra perechilor de vârfuri care se află la distanțe egale unele de altele, precum şi multiplicarea vârfurilor prin copii sau, în anumite condiții prin anticopii; de asemenea, operația de decrementare, în grafurile d-convex simple orientate, poate să elimine vârfurile copii sau anticopii de prisos. Acest lucru a fost necesar nu doar pentru a pune în evidență, ca şi până acum, structura grafurilor d-convex simple orientate şi a determina careva clase de astfel de grafuri, ceea ce este de asemenea important, dar şi pentru a putea indica relația dintre grafurile d-convex simple orientate şi cele neorientate.

Fie G = (X, U) un graf neorientat. Aceasta înseamnă că G este un graf orientat complet simetric, în care fiecare muchie u = (x, y) $\in$ U este privită ca două arce (x, y) şi (y, x). Fie că se elimină din fiecare muchie a grafului G unul şi numai unul dintre aceste două arce. Graful orientat obținut este antisimetric şi se numeşte *orientarea* grafului inițial G, care se va nota prin $\vec{G} = (X, \vec{U})$. În dependență de arcele care sunt eliminate, pentru graful neorientat G se pot obține mai multe orientări ale sale.

**Teorema 3.3:** *Dacă G este un graf d-convex simplu neorientat din mulțimea $\mathcal{A}$, atunci există cel puțin o orientare a lui G, care este un graf d-convex simplu orientat.*

În baza acestui rezultat, s-a obținut că într-un graf d-convex simplu orientat $\vec{G}$, care reprezintă orientarea grafului G, orice vârf are o anticopie. Deci, perechile de vârfuri copii din G s-au transformat în perechi de vârfuri anticopii în $\vec{G}$. Graful orientat şi d-convex simplu din următoarea figură, care reprezintă o orientare a grafului $J_1$ din Fig.3a), notat $\vec{J_1}$, are proprietatea că dacă oricărui vârf i se va adăuga o anticopie, atunci graful nou va fi de asemenea d-convex simplu.

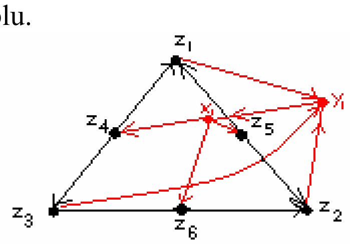



**Fig.6.** Graful $\vec{J_1}$.

Astfel, s-a obținut că toate grafurile prime d-convex simple neorientate posedă cel puțin câte o orientare, care este un graf d-convex simplu orientat. Mai mult, orientarea poate fi luată astfel încât perechile de vârfuri copii să se transforme în perechi de vârfuri anticopii, ceea ce va permite ca aceste grafuri orientate să participe în operația M, W pentru a forma alte grafuri noi care vor fi orientările grafurilor respective d-convex simple neorientate.

Rezultă că orice graf d-convex simplu neorientat G, a cărui structură este cunoscută, are cel puțin o orientare $\vec{G}$, care este un graf d-convex simplu orientat. Aceasta înseamnă că mulțimea grafurilor d-convex simple orientate conține, în acest sens, mulțimea grafurilor d-convex simple neorientate cunoscute.

**Referințe:**

1. Sur N., Cataranciuc S. About directed d-convex simple Graphs // Computer Science Journal of Moldova, 2008.
2. Sur N. About Division of d-Convex Simple Graphs in M-Prime Graphs // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei, 2008.
3. Sur N. Mulțimi închise şi complete de grafuri d-convex simple şi generatorii lor // Modelare Matematică, Optimizare şi Tehnologii Informaționale: Materialele Conferinței Internaționale, ATIC. - Chişinău: Evrica, 2008, p.199-204.
4. Sur N. Despre o clasă nouă de grafuri d-convex simple // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe fizico-matematice". - Chişinău, 2006, p.123-126.
5. Sur N. O operație algebrică în mulțimea grafurilor d-convex simple // Conferința ştiințifică internațională dedicată jubileului de 60 ani ai USM. - Chişinău, 2006, p.55-56.
6. Sur N., Cataranciuc S. Involving d-Convex Simple and Quasi-simple Planar Graphs in $R^3$ // Computer Science Journal of Moldova. - 2005. - Vol.13. - No2(38). - P.151-167.
7. Sur N. Algorithm for Involving d-Convex Simple Planar Graphs in $R^3$ // Conferința Internațională a Tinerilor Cercetători 2005. Rezumatele lucrărilor, p.124.
8. Sur N. About Dimension of d-Convex Simple and Quasi-simple Planar Graphs // Scientific Works „Integral Equations and Modeling of Applied problems" in memory of univ. prof. V. Zolotarevschi. - 2005. - Vol.1. - P.196-197.
9. Sur N. A Method of Description for d-Convex Simple and Non-Oriented Graphs // Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. Vol.3. - Cluj-Napoca, 2005, p.35-38.
10. Cataranciuc S., Vicol N. Covexitatea în grafuri orientate // Bilanțul activității ştiințifice a USM în anii 2000-2002, 2003, p.104-106.
11. Катаранчук С. О выпуклой простоте градов: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Кишинев, с.178.
12. Солтан В. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. - Кишинев, с.222.
13. Berge C. Theorie des graphes et ses applications. - Paris: 277. DUNOD, 1958, p.277.
14. Rao S., Hebbare S. Characterization of planar distance convex simple graphs // Proc. Symp. in Graph Theory ISI, Calcuta, 1976, p.138-150.
15. M. Batten. Geodesic Subgraphs // Journal of Graph Theory. - 1983. - Vol.7. - P.159-163.
16. Болтянски В., Солтан П. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. - Кишинев: Ştiinţa, 1978, c.278.

*Prezentat la 01.07.2008*