O PROBLEMĂ DESPRE CENTRUL PROBABILIST AL ARBORELUI

Andrei POŞTARU, Daniela MOFTULEAC.
Catedra Informatică şi Optimizare Discretă

In this paper we consider the weighted minimax (1-center) location problem on the tree with uniform distributed weights. The set of the T-centres and one algorithm of a finding of the center of a tree with constant wieghteds is described.

Introducere

Fie $G = (V, E)$ un graf finit simplu neorientat cu mulţimea de vârfuri $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi mulţimea de muchii E, $|E| = n$. Presupunem că fiecărui vârf $v_i \in V$ i se asociază o pondere pozitivă $w_i = w(v_i)$. Distanţa dintre două vârfuri $v', v'' \in V$, notată $d(v', v'')$, este, prin definiţie, numărul de muchii care se conţin în cel mai scurt lanţ ce uneşte aceste vârfuri. Excentricitatea unui vârf $v \in V$ este mărimea

$$e(v) = max\left\{w_i d(v, v_i) : v_i \in V\right\}. \tag{1}$$

Mulţimea vârfurilor v care minimizează funcţia (1) se numeşte centrul grafului $G = (V, E)$ şi se notează $C(G)$. Vârfurile, aparţinând lui $C(G)$, se numesc vârfuri centrale.

Bibliografia problemei centrului este foarte bogată. Unul dintre rezultatele clasice se referă la centrul unui arbore în cazul unor ponderi unitare ale vârfurilor: centrul oricărui arbore constă dintr-un vârf sau din două vârfuri adiacente.

În prezenta lucrare definiţia centrului este extinsă pentru cazul când ponderile vârfurilor nu sunt constante, ci reprezintă nişte variabile aleatoare. Ponderi stohastice în probleme de amplasare pe grafuri au fost introduse prima dată de către Frank [1]. Wesolowsky introduce în 1977 ponderi stohastice pentru probleme de amplasare în planul euclidian [2]. Problema centrului probabilist al unei mulţimi finite de puncte pe plan este examinată în [3].

Problema centrului probabilist al unui graf

Dacă w_i ale vârfurilor grafului $G = (V, E)$ reprezintă nişte constante pozitive, atunci vârful $v^* \in V$ este un vârf central dacă şi numai dacă pentru orice vârf $v \in V$

$$\max_{v_i \in V} w_i d(v^*, v_i) \leq \max_{v_i \in V} w_i d(v, v_i) \tag{2}$$

sau

$$\min_{v \in V} \max_{v_i \in V} w_i d(v, v_i) = \max_{v_i \in V} w_i d(v^*, v_i). \tag{3}$$

Mărimea $R = \max\limits_{v_i \in V} w_i d(v^*, v_i)$ se numeşte rază (ponderată) a grafului.

În acest caz, când ponderile sunt nişte constante pozitive, este firesc să-i dăm vârfului central v^* de rază R următoarea interpretare:

v^* este situat, de la orice alt vârf $v \in V$, la o distanţă (ponderată) nu mai mare decât R. Prin urmare,

$$P\left(\max_{v_i \in V} w_i d(v^*, v_i) > T\right) = 0, \quad T \geq R. \tag{4}$$

În continuare vom presupune că ponderile vârfurilor grafului nu sunt constante, ci reprezintă nişte variabile aleatoare independente $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ cu repartiţii uniforme pe segmentele respective $[a_i, b_i]$, ξ_i fiind ponderea vârfului v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pentru a defini noţiunea de vârf central vom porni de la relaţia (4). Fiind dat un număr pozitiv T, prin analogie, obiectivul nostru va fi determinarea vârfului (vârfurilor) $v* \in V$ care minimizează probabilitatea

$$P\left(\max_{v_i \in V} \xi_i d(v^*, v_i) \geq T\right). \tag{5}$$

Orice vârf $v^* \in V$ care verifică condiţia (4) se numeşte vârf T-central al grafului $G = (V, E)$. T-centrul grafului este mulţimea vârfurilor T-centrale. Astfel, un vârf T-central este un vârf pentru care distanţa ponderată de la cel mai "depărtat" vârf rămâne, cu o probabilitate maximală, în limitele date $(0, T)$. Obiectivul nostru este examinarea vârfurilor T-centrale ale grafului. Deoarece excentricitatea

$$e(v^*) = \max_{v_i \in V} \xi_i d(v^*, v_i) \tag{6}$$

este o variabilă aleatoare, iar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt variabile aleatoare independente cu repartiţii uniforme, rezultă că

$$\begin{aligned} &P\left(\max_{v_i \in V} \xi_i d(v^*, v_i) \geq T\right) = 1 - P\left(\max_{v_i \in V} \xi_i d(v^*, v_i) < T\right) = \\ &= 1 - P\left(\xi_1 d(v^*, v_1) < T, \xi_2 d(v^*, v_2) < T, \ldots, \xi_n d(v^*, v_n) < T\right) = \\ &= 1 - \prod_1^n P\left(\xi_i d(v^*, v_i) < T\right) = 1 - \prod_1^n P\left(\xi_i < \tfrac{T}{d(v^*, v_i)}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Cum ξ_i are lege uniformă de repartiţie pe segmentul $[a_i, b_i]$ $(a_i > 0)$, putem scrie:

$$P\left(\xi_i < \frac{T}{d(v^*, v_i)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \dfrac{T}{d(v^*, v_i)} \leq a_i, \\ \dfrac{T - a_i d(v^*, v_i)}{(b_i - a_i)\, d(v^*, v_i)} & \text{dacă} \quad a_i d(v^*, v_i) < T \leq b_i d(v^*, v_i), \\ 1 & \text{dacă} \quad T > b_i d(v^*, v_i). \end{cases} \tag{8}$$

Din definiţie, ţinând cont de (5) şi (8), se poate conchide că determinarea vârfului (vârfurilor) T-central v^* se reduce la determinarea vârfurilor v^* care maximizează funcţia

$$F(v^*) = \prod_1^n P\left(\xi_i < \frac{T}{d(v^*, v_i)}\right). \tag{9}$$

Problema principală de care ne vom ocupa în continuare este descrierea, pentru orice $T > 0$, a T-centrului arborelui $G = (V, E)$. Este evident că dacă T este suficient de mic (de exemplu, $T < \min_i a_i$), atunci pentru orice vârf $v \in V$,

$$P\left(\min_{v_i \in V} \xi_i d(v, v_i) \geq T\right) = 1. \tag{10}$$

Fie $r = \min\limits_{v \in V} \max\limits_{v_i \in V} a_i d(v, v_i)$, $R = \min\limits_{v \in V} \max\limits_{v_i \in V} b_i d(v, v_i)$. Este limpede că relaţia (10) are loc pentru orice $T \in (0, r)$, iar relaţia (6) are loc pentru orice $T > R$.

Astfel, dacă $T \in (0, r)$, atunci, cu probabilitatea 1, T-central este fiecare vârf al arborelui, adică în acest caz T-centrul arborelui coincide cu mulţimea vârfurilor arborelui V.

Prin urmare, dacă $T \in (0, r)$, atunci

$$\forall v \in V, \ P\left(e(v) \in (T, \infty)\right) = 1. \tag{11}$$

În continuare vom examina vârfurile T-centrale pentru $T \in (r, R)$, problema fiind interesantă, de fapt, anume pentru astfel de valori ale lui T. Aici un rol important îl are mulţimea de vârfuri

$$S = \{v \in V : a_i d(v, v_i) \leq T \ \textit{pentru orice}\ v_i\} \tag{12}$$

(orice vârf din V "îl vede" pe fiecare din celelalte vârfuri la o distanţă "ponderată" nu mai mare decât T).

Teorema 1. *Dacă $T \in (r, R)$, atunci vârfurile T-centrale se conţin în mulţimea S.*

Demonstraţie. Este evident că $S \neq V$, în caz contrar afirmaţia teoremei este trivială. Deci, fie $S \neq V$. Atunci, în primul rând, dacă $T \in (r, R)$, atunci pentru orice vârf T-central v

$$P\left(\max_{v_i \in V}(\xi_i d(v, v_i)) \geq T\right) < 1. \tag{13}$$

În al doilea rând, dacă $v^0 \in V \setminus S$, atunci pentru orice $v_i \in V$, $a_i d(v^0, v_i) \geq T$ sau, echivalent, $P(\xi_i d(v^0, v_i) \geq T) = 1$. Deoarece T-centrale (cu $T \in (r, R)$) sunt acele vârfuri $v \in V$ care minimizează probabilitatea

$$P\left(\xi_i d(v, v_i) \geq T\right), v_i \in V, \tag{14}$$

rezultă că aceste vârfuri nu pot aparţine mulţimii $V \setminus S$, adică aparţin mulţimii S. Teorema este demonstrată.

Centrul unui arbore ponderat

Se consideră un arbore finit $G = (V, E)$, vârfurilor v ale căruia le sunt atribuite ponderi constante $w(v) > 0$.

Teorema 2. *Orice lanţ elementar $c(v_1, v_k) = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ al arborelui $G = (V, E)$ conţine un vârf v_s, astfel încât*

$$e(v_1) > e(v_2) > \ldots > e(v_s) \leq e(v_{s+1}) < e(v_{s+2}) < \ldots < e(v_k). \tag{15}$$

Această teoremă afirmă, deci, că pe orice lanţ elementar excentricitatea, în general, mai întâi descreşte pâna atinge valoarea minimală într-un vârf sau în două vârfuri adiacente, după care creşte. Nu se exclude cazul când $s = 1$ sau $s = k$.

Demonstraţie. Presupunem contrariul. Atunci, pe lanţul $c(v_1, v_k)$ există 3 vârfuri consecutive v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, astfel încât

$$e(v_i) < e(v_{i+1}) > e(v_{i+2}). \tag{16}$$

Este evident că există un vârf $v^* \in V$, astfel încât $e(v_{i+1}) = w(v^*) d(v_{i+1}, v^*)$. Pentru v^* sunt posibile două cazuri:

1) v^* este situat pe un lanţ care conţine muchia $(v_{i+1}, : v_i)$;

2) v^* este situat pe un lanţ care nu conţine muchia $(v_{i+1}, : v_i)$ (Fig. 1);

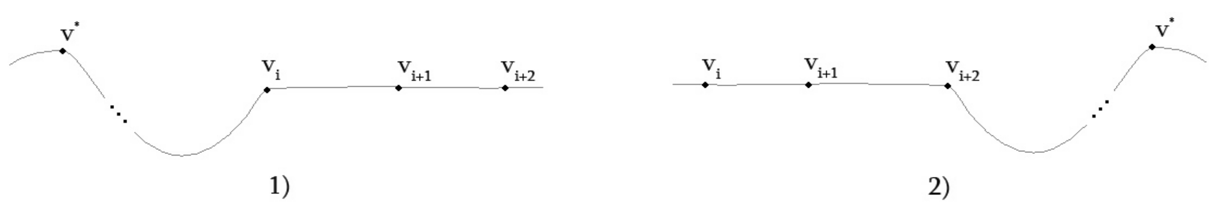

Fig. 1

Se observă cu uşurinţa că în primul caz $e(v_{i+1}) = w(v^*) d(v_{i+1}, v^*) = w(v^*)(1 + d(v_{i+1}, v*)) \leq e(v_{i+2})$, iar în al doilea caz $e(v_{i+1}) = w(v^*) d(v_{i+1}, v^*) = w(v^*)(d(v_i, v^*) - 1) \leq e(v_i)$.

Prin urmare, obţinem sau inegalitatea $e(v_{i+1}) \leq e(v_{i+2})$ sau inegalitatea $e(v_{i+1}) \leq e(v_i)$, ambele fiind in contradicţie cu inegalităţile (16). Teorema este demonstrată.

Consecinţa 1. *Într-un arbore există un singur vârf central sau două vârfuri centrale, acestea fiind adiacente.*

Demonstraţie. Dacă am presupune că există două vârfuri centrale şi ele nu sunt adiacente, atunci pe lanţul elementar care uneşte aceste două vârfuri, orice vârf are excentricitatea mai mare decât a acestor două. Dar, în baza teoremei 2, aceasta este imposibil. Deci, dacă există două vârfuri centrale, atunci ele trebuie să fie adiacente.

Dacă ar exista mai mult de două vârfuri centrale, atunci din adiacenţa a două vârfuri centrale ar rezulta că oricare trei dintre ele, notate, de exemplu, v_1, v_2, v_3, ar trebui să formeze un lanţ din două muchii (ca în Fig. 2).

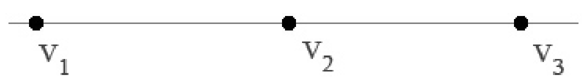

Fig. 2

Dacă v^* este un vârf pentru care $e(v_2) = w(v^*)d(v_2, v^*)$, atunci pentru v_1 sunt posibile două cazuri:
1) v_1 aparţine lanţului ce uneşte vârfurile v_2 şi v^*;
2) v_1 nu aparţine lanţului ce uneşte vârfurile v_2 şi v^*.

În cazul 1,

$$e(v_2) = w(v^*)d(v_2, v^*) = w(v^*)\left(d(v_2, v_1) + d(v_1, v^*)\right) = w(v^*)\left(1 + d(v_1, v^*)\right) \leq w(v^*) + e(v_1) \quad (17)$$

şi, prin urmare, $e(v_2) \neq e(v_1)$, ceea ce contrazice ipoteza că centrale sunt toate aceste 3 vârfuri v_1, v_2, v_3. La contradicţia aceasta conduce şi cazul 2, ceea ce se verifică cu usurinţă în mod similar. Aşadar, într-un arbore nu pot exista mai mult de două vârfuri centrale.

Consecinţa 2. *Dacă $v \in V$ nu este un vârf central, atunci în vecinătatea acestui vârf $O(v)$, unde $O(v) = \{u \mid v \in V,\ (v, u) \in E\}$, excentricitatea atinge valoarea minimală într-un singur vârf şi acest vârf este diferit de vârful v.*

Demonstraţie. Presupunem că există cel puţin două vârfuri u',$u'' \in O(v)$, în care excentricitatea ia valoare minimală: $e(u') = e(u'') < e(v)$ şi $min_{u \in O(V)} e(v) = e(u') = e(u'')$. Fie $v^* \in V$ un vârf, astfel încât $e(v) = w(v^*)d(v, v^*)$. Sunt posibile trei cazuri: 1) muchia aparţine lanţului $c[v, v^*]$; 2) lanţului $c[v, v^*]$ îi aparţine muchia (v, v''); 3) nici una din muchiile (v, u'),(v, v'') nu aparţine lanţului $c[v, v^*]$. Fiecare dintre aceste cazuri conduce la contradicţie cu ipoteza că $e(u') < e(v)$, $e(u'') < e(v)$ şi $e(u') = e(u'')$. Într-adevar, în cazul 1) obţinem $e(u'') \geq [1 + d(v, v*)]\, w(v*)$ şi deci, $e(u'') > e(v)$; în cazul 2) obţinem $e(u') > e(v)$; în cazul 3) obţinem $e(u') > e(v)$, $e(u'') > e(v)$.

Remarcă. *Dacă vârfurile adiacente $u' \in V$ si $u'' \in V$ nu sunt centrale, atunci $e(u') = e(u'')$.*

Un algoritm de determinare a centrului arborelui

Din teorema 2 putem conchide că pe orice lanţ elementar excentricitatea se comportă în felul următor: la început descreşte atingând minimul într-un vârf sau în două vărfuri adiacente, după care creşte; sau pe întregul lanţ doar descreşte până atinge valoarea minimă; sau pe întregul lanţ excentricitatea doar creşte (de la valoare minimă). Aceasta în mod firesc conduce la formularea următorului algoritm pentru determinarea centrului unui arbore.

Algoritm

Pasul 0. Se ia un vârf oarecare $v^0 \in V$ şi se calculează excentricitatea lui v^0 şi excentricităţile vârfurilor adiacente v; $v \in O(v^0) = \left\{v| : v \in V, : (v^0, v) \in E\right\}$.

Dacă $e(v^0) \leq e(v)$ pentru orice $v \in O(v^0)$, atunci v^0 este un vârf central al arborelui. În caz contrar, vârful din $O(v^0)$ cu excentricitate minimă se notează prin v^1 şi se trece la pasul 1.

Pasul k, $k \geq 1$. Se calculează excentricitatea vârfurilor $v \in O(v^k)$. Dacă $e(v^k) \leq e(v)$ pentru orice $v \in O(v^k)$, atunci v^k este un vârf central al arborelui. În caz contrar, vârful din $O(v^k)$ cu excentricitate minimă se notează prin v^{k+1} şi se trece la pasul $k+1$.

Corectitudinea algoritmului

Deoarece se presupune că arborele este finit, după un număr finit de paşi va fi găsit un vârf v^s, astfel încât $e(v^s) \leq e(v)$ pentru orice $v \in O(v^s)$.

Acest vârf v^s este vârf central. Să admitem contrariul şi fie v^* vârful central (sau unul dintre vârfurile centrale). Atunci, examinând lanţul elementar $c[v^0, v^*] = (v^0, v^1, v^2, \ldots, v^s, \ldots, v^*)$ vom observa că comportarea excentricităţii de-a lungul acestui lanţ contrazice teorema 2: există un vârf $\bar{v} \in c[v^0, v^*]$, astfel încât

$$e(v^0) > e(v^1) > \ldots > e(v^s) < e(\bar{v}) < \ldots < e(v^*). \tag{18}$$

Pe lanţul $c[\bar{v}, v^*]$, în baza teoremei 2 (şi a consecinţelor), există 3 vârfuri v', v'', v''', astfel încât $(v', v'') \in E$, $(v'', v''') \in E$ şi $e(v') < e(v'') > e(v''')$, ceea ce contrazice afirmaţia teoremei 2.

Referinţe.

1. Frank H. Optimum Locations on a Graphs with Probabilistic Demands //Operations Research. -1967. -$\mathcal{N}_0$14.-P. 404-421.

2. Wesolowsky G. O. Probabilistic weights in the one-dimensional facility location problem //Management Science. - 1977. -$\mathcal{N}_0$24(2). -P. 224–229.

3. Berman O., Wang J., Drezner Z., and Wesolowsky G. O. A Probabilistic Minimax Location Problem on The Plane //Annals of Operations Reserch. -2003. -$\mathcal{N}_0$122. -P 59-70.

Prezentat la 20.10.2008