STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă ştiinţifică a Universităţii de Stat din Moldova, 2008, nr.8(18)

ALGORITM CU MODIFICAREA ALEATORIE A COMPONENTELOR GRADIENTULUI PENTRU UN MODEL CONVEX DE OPTIMIZARE

Pavel BALAN

Catedra Informare şi Optimizare Discretă

A stochastic algorithm is proposed and analyzed, that is a probabilistic generalization of gradient method, for solving convex models. A random change of „old” partial derivatives with „new” ones is performed from one iteration to another. Convergence aspects of this scheme are analyzed for the case when the step is adjusted programmatically. Certain conditions are indicated, that, being respected, ensure the convergence of this scheme to the optimal solution with probability 1.

Se consideră următoarea problemă:

$$\begin{cases} F(x) \to \min \\ x \in X \quad , \end{cases} \tag{1}$$

unde X reprezintă o mulţime compactă şi convexă în spaţiul euclidian E^n.

Definim $V(X,\varepsilon) = \bigcup_{x\in X} V(x,\varepsilon)$ – vecinătatea de rază ε a mulţimii X. Cu $V(x,\varepsilon)$ se notează vecinătatea sferică de raza $\varepsilon > 0$ a punctului $x \in E^n$, sau formal:

$$V(x,\varepsilon) = \left\{ y \in E^n : \|x - y\| < \varepsilon \right\}$$

Fie pentru un careva $\varepsilon > 0$, funcţia $F(x)$ – convexă şi diferenţiabilă (cu gradientul continuu) pe $V(X,\varepsilon)$. Deci, în $\forall x \in X$ este definit vectorul

$$\left(g_1(x),\dots,g_i(x),\dots,g_n(x)\right) = g(x) = gradF(x) = \left(\frac{dF(x)}{dx_1},\dots,\frac{dF(x)}{dx_i},\dots,\frac{dF(x)}{dx_n}\right)$$

Evident, norma $\|g(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i^{\,2}(x)}$ este o funcţie continuă pe compactul X. Deci, există constanta $C < \infty$, încât $\|g(x)\| \le C$ pentru $\forall x$. Prin urmare, $\|g_i(x)\| \le C,\ \forall i = \overline{1,n},\ \forall x \in X$.

Metoda numerică, care se propune pentru soluţionarea problemei (1), poartă un caracter iterativ. În presupunere că ne aflăm la iteraţia k, schema este următoarea:

1) Într-o serie $m_k \ge 1$ de probe independente se simulează o variabilă aleatoare ξ^k cu legea de distribuţie discretă a priori definită:

ξ^k	1	2	$\dots$	n
P	P_1^k	P_2^k	$\dots$	P_n^k

Astfel, la fiecare iteraţie k se generează mulţimea $I_k = \left\{ i_1, i_2, \dots, i_{m_k} \right\}$ ale cărei elemente sunt realizări independente ale variabilei ξ^k cu legea de distribuţie definită mai sus, unde

$$P_i^k \ge \underline{P} > 0,\ \forall i = \overline{1,n},\ \forall k = 0,1,\dots \tag{2}$$

În particular, putem lua $m_k = 1$, adică se poate efectua o singură simulare la fiecare iteraţie.

2) Se calculează vectorul $g^k(x^k)$ conform regulii:

$$g^k(x^k) = \left(g_1^k, g_2^k, \ldots, g_i^k, \ldots, g_n^k\right),\ g_i^k = \begin{cases} g_i^{k-1}, \text{ daca } i \notin I_k \\ \dfrac{dF(x)}{dx_i}, \text{ daca } i \in I_k \end{cases},\ \forall i = \overline{1,n} \tag{3}$$

3) Se determină elementul x^{k+1} conform relației:

$$x^{k+1} = \prod\nolimits_X \left(\tilde{x}^{k+1}\right), \text{ unde } \tilde{x}^{k+1} = x^k - \rho_k \eta^k \tag{4}$$

$\prod_X \left(\tilde{x}^{k+1}\right)$ reprezintă proiecția elementului $\tilde{x}^{k+1} \in E^n$ pe mulțimea X. Punctul de start x^0 este luat arbitrar din X (în situații concrete poate fi indicat din anumite considerente).

În mod necesar, asupra şirului $\{\rho_k\}$ se impun condiții clasice pentru asigurarea convergenței, într-un anumit sens probabilist, a procesului iterativ (4), şi anume:

$$\left\{\rho_k \geq 0;\ \rho_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0;\ \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty\right\} \tag{5}$$

Suplimentar vom mai cere existența unui asemenea număr $\overline{\varepsilon} > 0$, astfel încât pentru $\forall r \in \left(0, \overline{\varepsilon}\right]$ şi $\forall \tau \in (0,1)$ să aibă loc convergența seriei [1]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau^{L(k,r)} < \infty,\ L(k,r) = \begin{cases} 0, \text{ daca } \rho_k \geq r \text{ sau } k = 0 \\ s_k, \text{ daca } \displaystyle\sum_{l=k-s_k}^{k} \rho_l < r \text{ si } \sum_{l=k-s_k-1}^{k} \rho_l \geq r \end{cases} \tag{6}$$

Adică, s_k este cel mai mare număr întreg dintre toate numerele $j \geq 0$, pentru care $\sum\limits_{l=k-j}^{k} \rho_l < r$.

Remarca 1. În particular, se poate uşor constata că şirul numeric $\rho_k = \dfrac{R}{(k+1)^\alpha},\ R > 0,\ \alpha \in (0,1]$ respectă condițiile (5)-(6).

Șirul vectorial $\{\eta^k\}$ este definit în modul următor:

$$\eta^k = \begin{cases} \dfrac{g^k}{\left\|g^k\right\|}, \text{ daca } g^k \neq \overline{0},\ k = 1,2,\ldots \\ \overline{0}, \text{ pentru } g^k = \overline{0} \end{cases} \tag{7}$$

Remarca 2. Procesul iterativ poate fi modificat, şi anume: de la o iterație la alta se poate de operat cu diferite legi de distribuție, cu condiția că se îndeplineşte relația (2). Aceasta ar putea favoriza creşterea vitezei de convergență a şirului $\{x^k\}$.

Aplicabilitatea algoritmului descris poate fi confirmată, în primul rând, stabilind convergența, desigur, în termeni probabilişti, a şirului $\{x^k\}$ către domeniul optim de soluții X^*. Prezintă un deosebit interes convergența cu probabilitatea 1 (doar asemenea tip de convergență poate fi acceptat cu toată încrederea din punct de vedere aplicativ).

Teoremă. Pentru $\forall \varepsilon > 0$ fixat toate elementele şirului aleator $\{x^k\}_{k\geq 0}$, obținute în rezultatul aplicării schemei descrise, se localizează aproape sigur (cu probabilitatea 1) în vecinatatea $V\left(X^*, 2\varepsilon\right)$, doar cu excepția unui număr finit de elemente. Din punct de vedere formal:

$P\left\{\theta : \lim_{k\to\infty} \min_{x^*\in X^*} \left\|x^k - x^*\right\| = 0\right\} = 1$, unde $x^k = x^k\left(\theta\right)$, iar $\theta = \left(\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^k, \ldots\right)$,

$\theta^k = \left(i^0, i^1, \ldots, i^k\right) \in B_k$ - σ – algebra generată de produsul cartezian $I_0 \times I_1 \times \ldots \times I_k$.

Demonstrație. Dacă $X \subset V\left(X^*, 2\varepsilon\right)$, afirmația este evidentă.

Fie $X \setminus V\left(X^*, 2\varepsilon\right) \neq \varnothing$. Vom evidenția două etape pentru expunerea demonstrației.

Etapa 1. Se va arăta, în primul rând, că există un subșir $\{x^{k_l}\} \subset \{x^k\}_{k\geq 0}$, care aproape sigur se conține în $V_X\left(X^*, \varepsilon\right)$, adică $P\left\{\exists\left\{x^{k_l}\right\} \subset \left\{x^k\right\}_{k\geq 0} : x^{k_l} \in V_X\left(X^*, \varepsilon\right)\right\} = 1$.

Să presupunem contrariul. În acest caz, pentru un oarecare $q \in \left(0,1\right)$ poate fi indicat un asemenea număr natural $K_q < \infty$, astfel încât se produce evenimentul

$$A_1 = \left\{\exists K_q : \forall k \geq K_q, \left\|x^k - x^*\right\| \geq \varepsilon, \text{ sau } x^k \notin V_x\left(X^*, \varepsilon\right), \forall x^* \in X^*\right\} \tag{8}$$

cu probabilitatea $P\left(A_1\right) \geq q$.

Notăm $X_\varepsilon = X \setminus V\left(X^*, \varepsilon\right)$.

$F(x)$, fiind convexă şi diferențiabilă, respectă inegalitatea [2]:

$$F(x^*) - F(x^k) \geq \left(\frac{dF(x^k)}{dx}, x^* - x^k\right), \text{ pentru } \forall x^* \in X^*,\ \forall x^k \in X$$

Se va nota cu $\Delta_F = \min_{x\in X_\varepsilon}\left[F(x) - F(x^*)\right],\ x^* \in X^*$.

Evident, dacă $\varepsilon > 0$, $\Delta_F > 0$ şi pentru toți $x^k \in X_\varepsilon$ $F(x^k) - F(x^*) \geq \Delta_F$, sau

$$\left(\frac{dF(x^k)}{dx}, x^k - x^*\right) \geq \Delta_F \tag{9}$$

Reieşind din proprietățile enumerate mai sus, pot fi indicate două constante: $C_1 > 0,\ C_2 > 0$ pentru care $\left\|x' - x''\right\| \leq C_1,\ \forall x', x'' \in X$ şi $\left\|\frac{dF(x)}{dx}\right\| \leq C_2,\ \forall x \in X$.

Prin urmare,

$$\frac{\left(\frac{dF(x^k)}{dx}, x^k - x^*\right)}{\left\|\frac{dF(x^k)}{dx}\right\| \cdot \left\|x^k - x^*\right\|} \geq \frac{\left(\frac{dF(x^k)}{dx}, x^k - x^*\right)}{C_2 \cdot C_1} \geq \frac{\Delta_F}{C_1 \cdot C_2}$$

Fixăm un careva număr δ_F de pe intervalul $\left(0, \frac{\Delta_F}{C_1 \cdot C_2}\right)$ şi, în rezultat, se obține:

$$\left(\frac{dF(x^k)}{dx}, x^k - x^*\right) \geq 2\delta_F \left\|\frac{dF(x^k)}{dx}\right\| \cdot \left\|x^k - x^*\right\| \tag{10}$$

Considerăm evenimentele

$A_1^k = \left\{\left(\eta^k, x^k - x^*\right) \geq \delta_F \left\|x^k - x^*\right\|, \forall x^* \in X^*\right\}$. Evident, evenimentul contrar în raport cu A_1^k are aspectul $\overline{A_1^k} = \left\{\exists x^* \in X^* : \left(\eta^k, x^k - x^*\right) < \delta_F \left\|x^k - x^*\right\|\right\}$.

$D_1 = \left\{ \bigcup_{k=K_\delta}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} A_1^i \right\}$, sau, cu alte cuvinte, au loc toate A_1^k ($k \geq K_q$), poate, în afară de un număr finit. E clar că $\bar{D}_1 = \left\{ \bigcap_{k=K_\delta}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} \overline{A_1^i} \right\}$, sau, cu alte cuvinte, se produce o infinitate de evenimente $\overline{A_1^k}$.

Vom evalua $P(A_1)$. Pentru aceasta prezentăm

$$P(A_1) = P\left(A_1 \cap \left(D_1 \cup \bar{D}_1\right)\right) = P\left(A_1 \cap D_1\right) + P\left(A_1 \cap \bar{D}_1\right)$$

Vom estima ambii termeni din ultima expresie.

Din producerea evenimentului $A_1 \cap D_1$ rezultă că există un număr natural $K_\delta < \infty$, încât pentru toți $k \geq K_\delta$ și $\forall x^* \in X^*$ are loc inegalitatea

$$\left(\eta^k, x^k - x_k^*\right) \geq \delta_F \left\|x^k - x_k^*\right\| \tag{11}$$

Luând în considerație (11), pentru $k \geq K_\delta$ vom avea următorul șir de relații:

$$\left\|x^{k+1} - x^*\right\|^2 \leq \left\|x^k - \rho_k \eta^k - x^*\right\|^2 = \left\|x^k - x^*\right\|^2 - 2\rho_k (x^k - x^*, \eta^k) + \rho_k{}^2 \left\|\eta^k\right\|^2 \leq$$
$$\leq \left\|x^k - x^*\right\|^2 - 2\rho_k \delta_F \left\|x^k - x^*\right\| + \rho_k{}^2 \leq \left\|x^k - x^*\right\|^2 - 2\rho_k \delta_F \varepsilon + \rho_k{}^2 = \left\|x^k - x^*\right\|^2 - \rho_k (2\delta_F \varepsilon - \rho_k)$$

Deoarece $\rho_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, pentru un careva K_ε, $\rho_k \leq \delta_F \varepsilon$, imediat ce $k \geq K_\varepsilon$. Evident, pentru $k \geq \tilde{k} = \max\{K_\delta, K_\varepsilon\}$:

$$\left\|x^{k+1} - x^*\right\|^2 \leq \left\|x^k - x^*\right\|^2 - \rho_k \delta_F \varepsilon,$$
$$\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \left\|x^{k-1} - x^*\right\|^2 - \rho_{k-1} \delta_F \varepsilon \leq \left\|x^{k-2} - x^*\right\|^2 - \delta_F \varepsilon (\rho_{k-2} + \rho_{k-1}), \ldots$$
$$\left\|x^{k+1} - x^*\right\|^2 \leq \left\|x^{\tilde{k}} - x^*\right\|^2 - \delta_F \varepsilon \sum_{i=\tilde{k}}^{k} \rho_i \to -\infty, \text{ pentru } k \to \infty \tag{12}$$

Obținem contrazicere, deoarece norma oricărui vector, cu atât mai mult pătratul ei, nu pot fi negative. Prin urmare, producerea evenimentului $A_1 \cap D_1$ implică producerea evenimentului, practic irealizabil, $F_1 = \left\{ \left\|x^{k+1} - x^*\right\|^2 < 0,\ k \to \infty \right\}$. Adică, $P\left(A_1 \cap D_1\right) \leq P\left(F_1\right) = 0$. Deci, $P\left(A_1\right) = P\left(A_1 \cap \bar{D}_1\right)$.

Vom evalua $P\left(A_1 \cap \bar{D}_1\right)$. Definim evenimentul B_1^k:

B_1^k ={cel puțin o singură dată la una din iterațiile de forma $j = \overline{k - s_k, k}$ se generează fiecare dintre valorile posibile ale variabilei aleatoare discrete ξ^k }.

Vom demonstra că $P\left(B_1^k\right) \underset{k\to\infty}{\to} 1$. Admitem contrariul: $P\left(B_1^k\right) \leq p < 1$, pentru $\forall k$. Vom evalua $P\left(\overline{B_1^k}\right) = 1 - P\left(B_1^k\right)$. Este absolut clar că $P\left(\overline{B_1^k}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(1 - P_i^k\right)^{s_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Într-adevăr, avem următorul șir de relații:

$$P\left(\overline{B_1^k}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(1 - P_i^k\right)^{s_k} \leq n \cdot \max_{1\leq i\leq n} \left(1 - P_i^k\right)^{s_k} \leq \left(\sqrt[s_k]{n}\left(1 - \underline{P}\right)\right)^{s_k} \tag{13}$$

Deoarece $k \to \infty$, atunci $s_k \to \infty$ şi $\sqrt[s_k]{n} \to 1+0$. Pentru o valoare arbitrară, dar fixată $\tau \in (1-\underline{P},1) : \exists K_\tau \in \mathbb{N}$, încât pentru $k \geq K_\tau$ are loc inegalitatea $\sqrt[s_k]{n}\left(1-\underline{P}\right) \leq \tau < 1$. Prin urmare, $\left(\sqrt[s_k]{n}\left(1-\underline{P}\right)\right)^{s_k} \leq \tau^{s_k} \to 0$. Sau $P\left(\overline{B_1^k}\right) \leq \tau^{s_k}$. Urmează că $P\left(\overline{B_1^k}\right) \to 0$, iar $P\left(B_1^k\right) \to 1$ pentru $k \to \infty$.

Producerea evenimentului B_1^k semnifică: pe parcursul a s_k iterații de la $k-s_k$ şi până la k (inclusiv) are loc „reînnoirea” tuturor componentelor vectorului g^{k-s_k}. Cu alte cuvinte, vectorul deplasării g^k conține în calitate de componente derivatele parțiale, toate evaluate după iterația $k-s_k$.

Realizarea evenimentului B_1^k şi faptul că derivatele parțiale sunt continue conduc la producerea evenimentului:

$$\left\{\forall \tilde{\tilde{\varepsilon}} > 0 : \left\| g^i - \frac{\partial F(x^k)}{\partial x} \right\| \leq \tilde{\tilde{\varepsilon}}, \forall i = k-s_k, \dots, k \right\} \tag{14}$$

Luând în considerație (14), continuitatea produsului scalar şi respectarea condițiilor (8), (10), concluzionăm producerea evenimentului A_1^k, începând cu un careva $k \geq \tilde{\tilde{k}} = \max\left\{K_\tau, \tilde{k}\right\}$.

Deci, $B_1^k \subset A_1^k$. În aşa caz, $P\left(B_1^k\right) \leq P\left(A_1^k\right)$ şi, prin urmare, $P\left(\overline{A_1^k}\right) \leq P\left(\overline{B_1^k}\right)$. Dar, conform (2), (6) şi (13), rezultă că:

$$P\left(\overline{B_1^k}\right) \leq \tau^{L(k,r)}, \text{ adica } \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\overline{A_1^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\overline{B_1^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{L(k,r)} < \infty$$

Ne aflăm aici în condițiile lemei Borel-Cantelli. Rezultă $P\left(\overline{D}_1\right) = 0$.

Prin urmare,

$$q \leq P\left(A_1\right) = P\left(A_1 \cap \overline{D}_1\right) \leq P\left(\overline{D}_1\right) = 0$$

Deci, $q = 0$.

Contrazicere, deoarece am presupus că $q > 0$. Astfel, există un subşir $\{x^{k_l}\} \subset \{x^k\}_{k \geq 0}$ care aproape sigur se conține în $V_X\left(X^*, \varepsilon\right)$.

Etapa II. În continuare vom demonstra că toate elementele şirului $\left\{x^k\right\}$, în afară doar de un număr finit, aparțin mulțimii $V_X\left(X^*, 2\varepsilon\right)$ cu probabilitatea 1.

Vom defini următoarele evenimente:

$$\begin{aligned} A_2 &= \left\{\exists \left\{x^{k_l}\right\} \subset \left\{x^k\right\} : \left\{x^{k_l}\right\} \subset V_X\left(X^*, \varepsilon\right)\right\}, \\ B_2 &= \left\{\exists \left\{z^{k_m}\right\} \subset \left\{x^k\right\} : \left\{z^{k_m}\right\} \not\subset V_X\left(X^*, 2\varepsilon\right)\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

Vom evalua $P\left(B_2\right)$. Putem constata că $P\left(B_2\right) = P\left(B_2 \cap A_2\right)$. Într-adevăr,

$P\left(B_2\right) = P\left(\left(B_2 \cap A_2\right) \cup \left(B_2 \cap \overline{A}_2\right)\right) = P\left(B_2 \cap A_2\right) + P\left(B_2 \cap \overline{A}_2\right) = P\left(B_2 \cap A_2\right)$, deoarece

$P\left(B_2 \cap \overline{A}_2\right) \leq P\left(\overline{A}_2\right) = 0$.

Vom considera în continuare evenimentul $D_2 = A_2 \cap B_2$. Fie $P\left(D_2\right) > 0$. Realizarea evenimentului D_2 semnifică faptul că trecerea din $V_X\left(X^*, \varepsilon\right)$ în $X \setminus V_X\left(X^*, 2\varepsilon\right)$ şi viciversa are loc de o infinitate de ori.

Notăm prin: K_1 – numărul primei iterații la care se produce evenimentul $\left\{x^{K_1} \in V_X\left(X^*,\varepsilon\right)\right\}$;

K_2 – numărul primei iterații la care se produce evenimentul $\left\{x^{K_2} \in V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)\right\}$;

K_3 – numărul primei iterații pentru care are loc inegalitatea $\rho_{K_3} \le 2\varepsilon\delta_F$;

$\bar{K} = \max\left\{K_1, K_2, K_3\right\}$.

Dacă pentru un oarecare $k \ge \bar{K}$ şi $x^k \notin V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$ are loc inegalitatea care defineşte evenimentul A_1^k, atunci va avea loc şirul de inegalitați: $\left\|x^{k+1}-x^*\right\|^2 \le \left\|x^k-x^*\right\|^2 - \rho_k(2\varepsilon\delta_F-\rho_k) < \left\|x^k-x^*\right\|^2$, deoarece $\left\|x^k-x^*\right\| > \varepsilon$.

Adică, imediat ce $k \ge \bar{K}$ şi $x^k \notin V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$ are loc:

$$\left\|x^{k+1}-x^*\right\| < \left\|x^k-x^*\right\| \tag{16}$$

Dat fiind că $\rho_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, se va găsi $K^* \ge \bar{K}$, pentru care $x^{K^*} \in V_X\left(X^*,2\varepsilon\right)\setminus V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$. Aceasta se va întâmpla neapărat. În particular, pentru $\rho_k < \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\left\|x^{k+1}-x^k\right\| \le \left\|x^k-\rho_k\eta^k-x^k\right\| \le \rho_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

Deci, există k, pentru care $x^k \in V_X\left(X^*,2\varepsilon\right)\setminus V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$.

În conformitate cu (16), $\left\|x^{K^*+1}-x^*\right\| < \left\|x^{K^*}-x^*\right\|$. Dacă $x^{K^*+1} \notin V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$, atunci $\left\|x^{K^*+2}-x^*\right\| < \left\|x^{K^*+1}-x^*\right\| < \left\|x^{K^*}-x^*\right\|$, şi aşa mai departe. Pentru toți $j \ge 0$, pentru care $x^{K^*+j} \notin V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$, vom avea:

$$\min_{x^*\in X^*}\left\|x^{K^*+j}-x^*\right\| < \min_{x^*\in X^*}\left\|x^{K^*}-x^*\right\| < 2\varepsilon \tag{17}$$

Dacă prin $\left\{x^{k^l}\right\}_{l\ge1}$ notăm şirul tuturor elementelor $\left\{x^k\right\}$ cu proprietatea că

$k^l \ge K^*,\ x^{k^l} \in V_X\left(X^*,2\varepsilon\right)\setminus V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$ şi $x^{k^l-1} \in V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$, atunci pentru

$l \ge 1,\ k^l < j < k^{l+1}$ şi $x^j \notin V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right)$ este justă inegalitatea:

$$\min_{x^*\in X^*}\left\|x^j-x^*\right\| < \min_{x^*\in X^*}\left\|x^{k^l}-x^*\right\| < 2\varepsilon \tag{18}$$

Adică, cu alte cuvinte, dacă pentru un oarecare K admitem că elementele de tipul $x^k \notin V_X\left(X^*,\frac{3}{2}\varepsilon\right),\ k<\infty,\ k \ge K$ satisfac inegalitatea din evenimentul A_1^k, atunci evenimentul B_2 nu se poate produce cu probabilitate pozitivă. În presupunere că D_2 se realizează, înseamnă că în afara stratului $V_X\left(X^*, \frac{3}{2}\varepsilon\right)$ străbaterea stratului $X \setminus V_X\left(X^*, 2\varepsilon\right)$ poate avea loc doar la realizarea de o infinitate de ori a evenimentului $\overline{A_1^k}$ considerat anterior. Însă, $P\left(\overline{D}_1\right) = 0$. În concluzie rezultă că trecerea din stratul $V_X\left(X^*, 2\varepsilon\right) \setminus V_X\left(X^*, \frac{3}{2}\varepsilon\right)$ în stratul $X \setminus V_X\left(X^*, 2\varepsilon\right)$ poate avea loc doar de un număr finit de ori. Adică, $P\left(D_2\right) = 0$, de unde şi urmează că $P\left(B_2\right) = 0$.

Teorema este demonstrată.

Referințe:

1. Ермольев Ю.М., Гайворонский А.А. Стохастический метод решения минимаксных задач // Кибернетика. - Киев: Наукова Думка, 1983.
2. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации - Москва: Наука, 1978. - 351 с.
3. Ширяев А.Н. Вероятность. - Москва: Наука, 1980 - 576 с.

Prezentat la 04.11.2008