ASUPRA INTERPRETĂRII GEOMETRICE A GRUPURILOR MINORE DE $\overline{P}$-SIMETRIE CU FIGURI „INDEXATE"

Marina BRANIŞTE, Alexandru LUNGU

Catedra Algebră şi Geometrie

In the present paper is studied the problem of geometrical interpretation of junior, semijunior and pseudojunior groups of $\overline{P}$-symmetry with „indexed" geometrical figures. Are determined the conditions in which one junior, semijunior and pseudojunior group of $\overline{P}$-symmetry has or not geometrical interpretation. Is explained the methodology of construction of „indexed" geometrical figure, which interprets group gave. Are also constructed respectively „indexed" figures and analysed results.

1. Problema interpretării grupurilor minore de $\overline{P}$-simetrie cu figuri „indexate" staţionare se rezolvă mult mai dificil decât în cazul grupurilor minore de P-simetrie.

Scopul cercetării acestei probleme este: în primul rând, de a determina condiţiile în care un grup minor de $\overline{P}$-simetrie are sau nu interpretare geometrică; în al doilea rând, de a explica metodica de construire a figurii geometrice „indexate" ce interpretează grupul minor dat; în al treilea rând, de a construi figurile „indexate" respective şi de a analiza rezultatele.

2. Vom aminti, întâi de toate, unele aspecte ale teoriei generale a grupurilor de $\overline{P}$-simetrie [1-3]. Atribuim fiecărui punct al figurii F cel puţin unul din „indicii" mulţimii ordonate $N=\{1,2,...,m\}$, care reprezintă m calităţi de aceeaşi natură generală cu orientaţie (faze ale aceluiaşi fenomen, de exemplu, vectori cu module egale). Fixăm grupul P de substituţii al acestor „indici". În rezultat se obţine figura „indexată" $F^{(N)}$.

Aplicaţia $f: F^{(N)} \to F^{(N)}$, unde $f=g^{(p)}=pg$ se numeşte transformare de $\overline{P}$-simetrie, dacă componenta geometrică g acţionează atât asupra punctelor M din F, cât şi asupra „indicilor" i, localizaţi în punctele M, conform unei legi date independente de poziţia punctelor M, iar p este o transformare suplimentară a indicilor şi $p \in P$.

Mulţimea $G^{(\overline{P})}$ a tuturor transformărilor de $\overline{P}$-simetrie ale oricărei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează grup cu operaţia:

$$g_1^{(p_1)} \cdot\ g_2^{(p_2)} = g_3^{(p_3)}, \tag{1}$$

unde $g_3=g_1g_2$, $p_3=p_1p_2^{g_1}$, iar $p_2^{g_1}=g_1p_2g_1^{-1}=\bar{\varphi}_{g_1}(p_2)$.

Fie $G^{(\overline{P})}$ un grup arbitrar de $\overline{P}$-simetrie. Notăm prin G şi P_1, respectiv, totalitatea transformărilor de simetrie şi totalitatea substituţiilor „indicilor" care intră în transformările grupului $G^{(\overline{P})}$ în calitate de componente. Evident, G este grup, iar P_1 verifică condiţia $e \subseteq P_1 \subseteq P$. Grupul G se numeşte grup generator, P – grup de definire pentru $G^{(\overline{P})}$, iar totalitatea grupurilor de $\overline{P}$-simetrie cu acelaşi grup generator – familie. În orice familie de grupuri $G^{(\overline{P})}$ de $\overline{P}$-simetrie poate fi cel puţin unul din următoarele tipuri de grupuri: generator, major, minor, mijlociu, semimajor, semiminor, semimijlociu, pseudominor sau pseudomijlociu, în dependenţă de coraportul dintre grupul de definire P, totalitatea P_1 de substituţii componente în transformările $g^{(p)}$ din grupul $G^{(\overline{P})}$, subgrupul de transformări P-identice Q $(Q=G^{(\overline{P})} \cap P' = G^{(\overline{P})} \cap P)$ al grupului $G^{(\overline{P})}$ şi unitatea grupului P [1-3].

Vom menţiona că grupurile $G^{(\overline{P})}$ de $\overline{P}$-simetrie cu grupul generator G şi grupul de definire P sunt subgrupuri ale produsului semidirect de dreapta $P\lambda_{\varphi H(\Phi)}G$ [4], unde omomorfismul însoţitor $\varphi: G \to AutP$ are nucleul $Ker\varphi = H$, iar $\operatorname{Im}\varphi = \Phi \le AutP$. Dacă $Ker\varphi = G$, atunci produsul semidirect menţionat degenerează în produsul direct $P \times G$, iar operația (1) degenerează în produs pe componente. Din cele expuse reiese că, în acest caz, grupurile $G^{(\bar{P})}$ formal pot fi considerate ca grupuri de P-simetrie [5,6,7].

Grupul $G^{(\bar{P})}$ de $\bar{P}$-simetrie se numește minor, dacă intersecția sa Q cu grupul de substituții P coincide cu unitatea. Menționăm că în acest caz totalitatea P_1 de substituții suplimentare în calitate de componente ale elementelor $g^{(p)}$ din grupul $G^{(\bar{P})}$ coincide cu grupul de definire P.

3. Pentru interpretarea geometrică a grupurilor minore de $\bar{P}$-simetrie $G^{(\bar{P})}$ cu grupul generator G trebuie să cunoaştem legea dinainte dată, conform căreia componenta geometrică g acționează asupra calităților (legea menționată în definiție). Considerăm că elementele mulțimii N sunt vectori egali după modul. Depunem aceşti vectori din acelaşi punct – puctul singular al grupului punctual de simetrie considerat G. Sunt două posibilități de aranjare a vectorilor: plană sau spațială. Analizăm situația când vectorii sunt coplanari. Deoarece grupul de substituții P acționează asupra elementelor mulțimii N şi fiindcă studiem mai întâi grupurile minore ale $\bar{P}$-simetriilor cristalografice ciclice ($P \cong C_n$, $n = 2,3,4,6$), considerăm că mulțimea N este, respectiv: a) $N = \{1,2\}$; b) $N = \{1,2,3\}$; c) $N = \{1,2,3,4\}$ şi d) $N = \{1,2,3,4,5,6\}$. Pentru mulțimile N de mai sus sunt posibile următoarele poziții ale vectorilor prezentate grafic în Figura 1. Trebuie de menționat că în Figura 1 „indicii” sunt repartizați în ordine crescătoare la rotirea în jurul centrului O în direcție pozitivă, dar este posibilă şi o repartizare în ordine crescătoare a „indicilor” la rotirea în direcția negativă, unde O este originea vectorilor (punctul singular al grupului), iar $1,2,3,...,m$ – extremitățile (vârfurile) vectorilor.

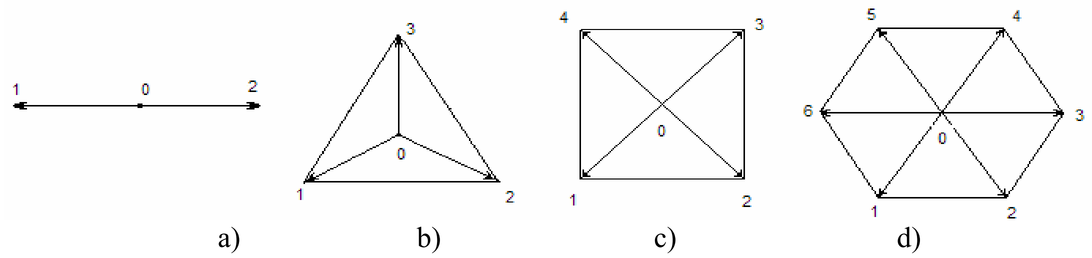

Fig.1. Poziții posibile ale vectorilor coplanari.

Vom menționa că substituțiile derivate $[g]$ de către toate elementele g din G formează grup. Într-adevăr, construim aplicația η a grupului G pe mulțimea $[G] = \{[g] | g \in G\}$ după regula $\eta(g) = [g]$. Aplicația η este omomorfism, deoarece ea verifică proprietatea din definiția omomorfismului. Prin urmare, $[G]$ este grup ca imagine omomorfă a grupului G.

Este evident că grupurile de substituții derivate de transformările de simetrie ale poligoanelor regulate specificate sunt izomorfe cu grupurile de simetrie respective, anume: a) $P \cong 2 \cdot m$, b) $P \cong 3 \cdot m$, $P \cong 4 \cdot m$, $P \cong 6 \cdot m$.

Legătura dintre substituția suplimentară p şi substituția derivată $[g]$ a componentei geometrice g din transformarea de simetrie $g^{(p)} \in G^{(\bar{P})}$ cu substituția totală a „indicilor” ε are forma $p[g] = \varepsilon$. Dacă deopotrivă cu substituția p cunoaştem şi substituția derivată $[g]$ pentru toți $g^{(p)} \in G^{(\bar{P})}$, atunci putem găsi substituțiile totale $\varepsilon = p[g]$, care împreună cu transformările de simetrie corespunzătoare $s = [g]^{-1} g$ (evidențiem că s acționează numai asupra punctelor) formează mulțimea perechilor $\{\varepsilon s\} = S^{(P')}$, care formal este un grup de P'-simetrie cu grupul generator S, unde $S = \left\{ s \middle| s = [g]^{-1} g, g^{(p)} \in G^{(\bar{P})} \right\}$, iar $P' = \left\{ \varepsilon \middle| \varepsilon = p[g], pg = g^{(p)} \in G^{(\bar{P})} \right\}$. Dacă $P' = e$, atunci grupul $S^{(P')} = S$ este grup generator; dacă P' este un subgrup netrivial din grupul P, atunci grupul $S^{(P')}$ este grup P'-semiminor; dacă $P' = P$, atunci $S^{(P')}$ este grup minor de P-simetrie. În general, grupul P' este mai bogat decât grupul P. Mai mult, grupul P este un subgrup în grupul $P' = [G] \cong G$.

Din faptul că, pentru grupurile minore $G^{(\bar{P})}$ cu grupul generator G, subgrupul de transformări P-identice Q (unde $Q = G^{(\bar{P})} \cap P$) este unitar, urmează că în fiecare punct al figurii „indexate", ce interpretează geometric grupul minor considerat, este localizat un singur „indice". Mai mult, toate punctele interioare ce aparţin aceluiaşi domeniu de echivalenţă faţă de G sunt „indexate" cu acelaşi „indice" – calitate.

În cele ce urmează vom analiza câteva exemple concrete de interpretare a unor grupuri minore, deduse în [2-3].

4. Fie grupul minor de $\bar{3}$-simetrie $G_1^{(\bar{P})} = \{e1, p3, p^{-1}3^{-1}, em_1, p^{-1}m_2, pm_3\}$ este dat prin simbolul complex $C_{3v} \,|\, C_{1v}^{(1)}((C_3, C_1) \,|\, C_3; C_3 / C_1)$. În acest caz, $P = \{e, p = (123), p^{-1} = (132)\}$, $G = \{1, 3, 3^{-1}, m_1, m_2, m_3\}$, $H' = \{1, m_1\}$ şi $H = Ker\varphi = \{1, 3, 3^{-1}\}$. Din simbolul complex al grupului $G_1^{(\bar{P})}$ evidenţiem următoarea informaţie: $G = C_{3v}$ – grup generator; $H' = C_{1v}^{(1)}$ – subgrup de simetrie; $H = C_3$ – nucleul omomorfismului însoţitor $\varphi: C_{3v} \to AutP$.

Pentru a interpreta geometric grupul $G_1^{(\bar{P})}$, trebuie de luat o figură cu grupul de simetrie C_{3v}, de exemplu: triunghiul echilateral. Împărţim triunghiul în domenii echivalente, indicând elementele de simetrie (Fig.2).

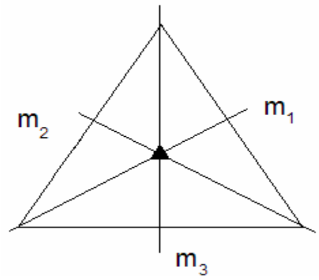

Fig.2. Figura geometrică cu grupul de simetrie C_{3v}.

Deoarece grupul ciclic de substituţii $P(\cong C_3) = \{e, p, p^{-1}\}$ acţionează asupra mulţimii $N = \{1, 2, 3\}$, atunci substituţiile $[g]$ vor aparţine grupului maximal de substituţii ce acţionează asupra lui N, adică asupra grupului de simetrie neciclic de ordinul 6: $S_3 \cong C_{3v}$. În calitate de substituţii $[m_i]$ $(i = \overline{1,3})$ pot fi alese numai elemente de ordinul 2, iar pentru $[3]$ şi $[3^{-1}]$ – elemente de ordinul 3.

Ca urmare a faptului că în calitate de nucleu H al omomorfismului însoţitor $\varphi: C_{3v} \to AutP(\cong C_2)$ este subgrupul C_3, avem că $\varphi(C_3) = 1^\alpha$, iar $\varphi(m_1C_3) = 2^\alpha$ (unde $\{1^\alpha, 2^\alpha\} = C_2^\alpha$) [7].

Din cele relatate mai sus reiese că elementele $m_i \in C_{3v}$ $(i = \overline{1,3})$ în calitate de componente geometrice ale transformării $g^{(p)} \in G_1^{(\bar{P})}$ generează automorfismele 2^α ale grupului $P(\cong C_3)$. De aceea, m_i pot deriva numai acele substituţii $[m_i]$, care prin conjugare generează anume automorfismul 2^α ($2^\alpha: (123) \leftrightarrow (132)$, adică $[m_i](123)[m_i]^{-1} = (132)$ şi $[m_i](132)[m_i]^{-1} = (123)$).

Nemijlocit se verifică că toate cele 3 elemente de ordinul 2 ale grupului S_3 ((12), (13), (23)) generează automorfismul 2^α.

În ceea ce priveşte substituţiile derivate posibile pentru elementele subgrupului C_3, ele trebuie să genereze anume automorfismul identic 1^α al grupului P. Pentru 1 va fi posibilă substituţia unitară e, deoarece ea întotdeauna generează automorfismul identic, iar pentru elementele 3 şi 3^{-1} substituţiile (123) şi (132).

Analizând diferite combinări din substituţiile posibile $[g]$ şi utilizând legătura dintre substituţia suplimentară p şi substituţia derivată $[g]$ cu substituţia totală a indicilor ε – $p[g] = \varepsilon$, pentru toţi $g^{(p)} \in G_1^{(\bar{P})}$, obţinem diferite grupuri concrete de P-simetrie, unde grupul P este izomorf cu C_{3v}, iar totalităţile P' pot fi diferite la diferite combinări din substituţiile posibile $[g]$. Vom menţiona că toate grupurile concrete ce se vor obţine trebuie să fie izomorfe cu grupul generator $G = C_{3v}$.

Într-adevăr, fie: 1) $[1]=e,[3]=(123),[3^{-1}]=(132),[m_1]=(12),[m_2]=(23),[m_3]=(13)$. Atunci $P'=(e,(123),(132),(12),(13),(23))\cong C_{3v}$, iar $S^{(P')}=\{e1,(132)3,(123)3^{-1},(12)m_1,(13)m_2,(23)m_3\}$. Acest grup se interpretează de figura cu „indici” prezentată în Figura 3, a).

Pentru 2) $[1]=e,[3]=(123),[3^{-1}]=(132),[m_1]=(13),[m_2]=(12),[m_3]=(23)$ şi pentru 3) $[1]=e,[3]=(123),[3^{-1}]=(132),[m_1]=(23),[m_2]=(13),[m_3]=(12)$ se obțin, respectiv, grupurile $S^{(P')}=\{e1,(132)3,(123)3^{-1},(13)m_1,(23)m_2,(12)m_3\}$ $S^{(P')}=\{e1,(132)3,(123)3^{-1},(23)m_1,(12)m_2,(13)m_3\}$ ce se interpretează prin figurile cu „indici” prezentate în Figura 3, b) şi c), respectiv.

Fie 4) $[1]=e,[3]=(132),[3^{-1}]=(123),[m_1]=(12),[m_2]=(13),[m_3]=(23)$. Atunci, obținem că $P'=\{\varepsilon \mid \varepsilon=p[g],pg=g^{(p)}\in G_1^{(\bar{P})}\}=\{e,(12)\}\cong C_2$, iar $S^{(P')}=\{e1,e3,e3^{-1},(12)m_1,(12)m_2,(12)m_3\}$. Acest grup este interpretat de figura cu „indici” prezentată în Figura 3, d).

Rezultate asemănătoare se obțin şi pentru cazurile:

5) $[1]=e,[3]=(132),[3^{-1}]=(123),[m_1]=(13),[m_2]=(23),[m_3]=(12)$ cu $P'=\{e,(13)\}\cong C_2$ şi $S^{(P')}=\{e1,e3,e3^{-1},(13)m_1,(13)m_2,(13)m_3\}$;

6) $[1]=e,[3]=(132),[3^{-1}]=(123),[m_1]=(23),[m_2]=(12),[m_3]=(13)$ cu $P'=\{e,(23)\}\cong C_2$ şi $S^{(P')}=\{e1,e3,e3^{-1},(23)m_1,(23)m_2,(23)m_3\}$.

Figurile cu „indicii” ce le interpretează sunt prezentate în Figura 3, e) şi f), respectiv.

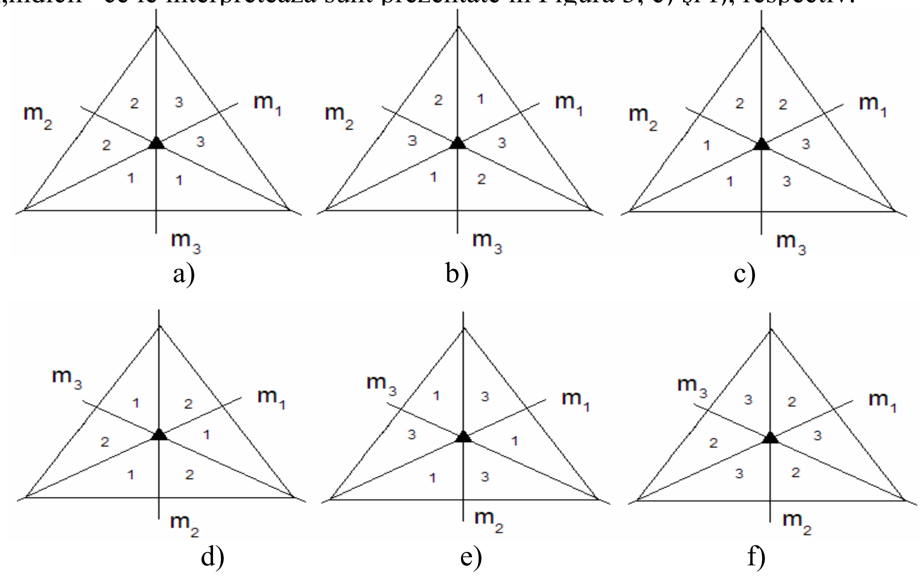

Fig.3. Interpretarea geometrică a grupului $G_1^{(\bar{P})}$.

Vom remarca faptul că cazurile 4), 5) şi 6) au fost obținute în situația când „indicii” mulțimii $N=\{1,2,3\}$ au fost repartizați în ordine crescătoare la rotirea în jurul centrului O al triunghiului echilateral în direcția negativă.

Alte combinări, cu excepția celor menționate mai sus, din substituțiile posibile $[g]$ pentru transformările corespunzătoare g nu formează grup, din care cauză au fost eliminate din cercetare.

5. În continuare vom analiza interpretarea grupului minor de $\bar{4}$-simetrie cu grupul generator $G\cong C_{2v}$: $G_2^{(\bar{P})}=\{e1,p^2 2,pm_1,p^{-1}m_2\}$, (adică $P=\{e,p=(1234),p^2=(13)(24),p^{-1}=(1432)\}$ şi $G=\{1,2,m_1,m_2\}$).

Grupul $G_2^{(\bar{P})}$ are simbol complex $C_{2v}|C_1((C_4,C_1)|C_2;C_2/C_1)$, din care folosim următoarea informație: $G=C_{2v}$ – grup generator; $H'=C_1$ – subgrup de simetrie; $H=C_2$ – nucleul omomorfismului însoțitor $\varphi: C_{2v}\to AutP(\cong C_2)$.

Continuăm analizarea grupului folosind acelaşi raţionament ca şi în exemplul precedent. Deci, pentru interpretarea geometrică a grupului $G_2^{(\bar{P})}$ găsim o figură cu grupul de simetrie C_{2v} (de exemplu, dreptunghiul), pe care o împărţim în domenii echivalente şi în care indicăm elementele de simetrie.

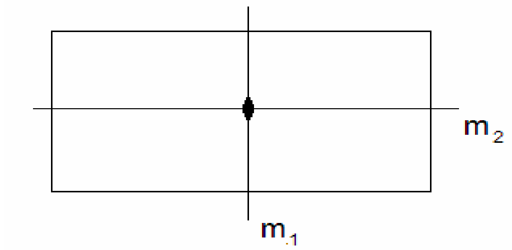

Fig.4. Figura geometrică cu grupul de simetrie C_{2v} .

Substituţiile $[g]$ vor aparţine grupului maximal de substituţii ce acţionează asupra lui $N=\{1,2,3,4\}$, adică unui grup de substituţii neciclic de ordinul 8; iar grupul ciclic de substituţii $P(\cong C_4)=\{e,p,p^2,p^{-1}\}$ este un subgrup al acestui grup. În calitate de substituţii $[m_i]$ $(i=\overline{1,2})$ şi $[2]$ pot fi doar elemente de ordinul 2.

Având ca nucleu H al omomorfismului însoţitor $\varphi: C_{2v} \to AutP(=C_2^{\alpha})$ subgrupul C_2, reiese că $\varphi(C_2)=1^{\alpha}$, iar $\varphi(m_1C_2)=2^{\alpha}$ (unde $\{1^{\alpha},2^{\alpha}\}=C_2^{\alpha}$).

Prin urmare, elementele $m_i \in C_{2v}$ $(i=\overline{1,2})$ ca componente geometrice ale transformărilor $g^{(p)} \in G_2^{(\bar{P})}$ generează automorfismul 2^{α} al grupului $P(\cong C_4)$. De aceea, m_i pot deriva numai acele substituţii $[m_i]$ care prin conjugare generează anume automorfismul 2^{α} ($2^{\alpha}:(1234)\leftrightarrow(1432)$ şi $2^{\alpha}:(13)(24)\leftrightarrow(13)(24)$, adică $[m_i](1234)[m_i]^{-1}=(1432)$, $[m_i](1432)[m_i]^{-1}=(1234)$ şi $[m_i](13)(24)[m_i]^{-1}=(13)(24)$).

Nemijlocit se verifică că din cele 5 elemente de ordinul 2 ale grupului de substituţii P $(\cong C_{4v})$ ($(13)(24)$, (24), $(12)(34)$, (13), $(14)(23)$) doar 4 generează automorfismul 2^{α}, şi anume: (24), $(12)(34)$, (13), $(14)(23)$.

Privitor la substituţiile derivate posibile pentru elementele subgrupului C_2, ele trebuie să genereze anume automorfismul identic 1^{α} al grupului P. Pentru 1 e posibilă substituţia unitară e, deoarece ea întotdeauna generează automorfismul identic, iar pentru 2 – substituţia $(13)(24)$.

Analizând diferite combinări din substituţiile posibile $[g]$ şi utilizând legătura dintre substituţia suplimentară p şi substituţia derivată $[g]$ cu substituţia totală a indicilor ε – $p[g]=\varepsilon$, pentru toţi $g^{(p)} \in G_2^{(\bar{P})}$, obţinem diferite grupuri concrete de P-simetrie, unde totalitatea P' poate fi diferită la diferite combinări din substituţiile posibile $[g]$.

1) Fie $[1]=e,[2]=(13)(24),[m_1]=(24),[m_2]=(13)$. Atunci $P'=\{e,(12)(34)\}$ este un grup de substituţii cu două domenii de tranzitivitate, iar $S^{(P')}=\{e1,e2,(12)(34)m_1,(12)(34)m_2\}$. Acest grup se interpretează de fiecare din următoarele figuri cu „indici" prezentată în Figura 5, a).

2) Pentru $[1]=e,[2]=(13)(24),[m_1]=(12)(34),[m_2]=(14)(23)$ se obţine grupul $S^{(P')}=\{e1,e2,(13)m_1,(13)m_2\}$, unde $P'=\{e,(13)\}$. Figura cu „indici" ce interpretează acest grup este prezentată în Figura 5, b).

3) Fie $[1]=e,[2]=(13)(24),[m_1]=(13),[m_2]=(24)$. Atunci, $P'=\{e,(14)(23)\}$ este un grup de substituţii cu două domenii de tranzitivitate, iar $S^{(P')}=\{e1,e2,(14)(23)m_1,(14)(23)m_2\}$. Interpretarea geometrică a acestui grup este prezentată în Figura 5, c).

4) Pentru $[1]=e,[2]=(13)(24),[m_1]=(14)(23),[m_2]=(12)(34)$ obţinem grupul $S^{(P')}=\{e1,e2,(24)m_1,(24)m_2\}$, unde $P'=\{e,(24)\}$. Grupul dat este interpretat de figura cu „indici" prezentată în Figura 5, d).

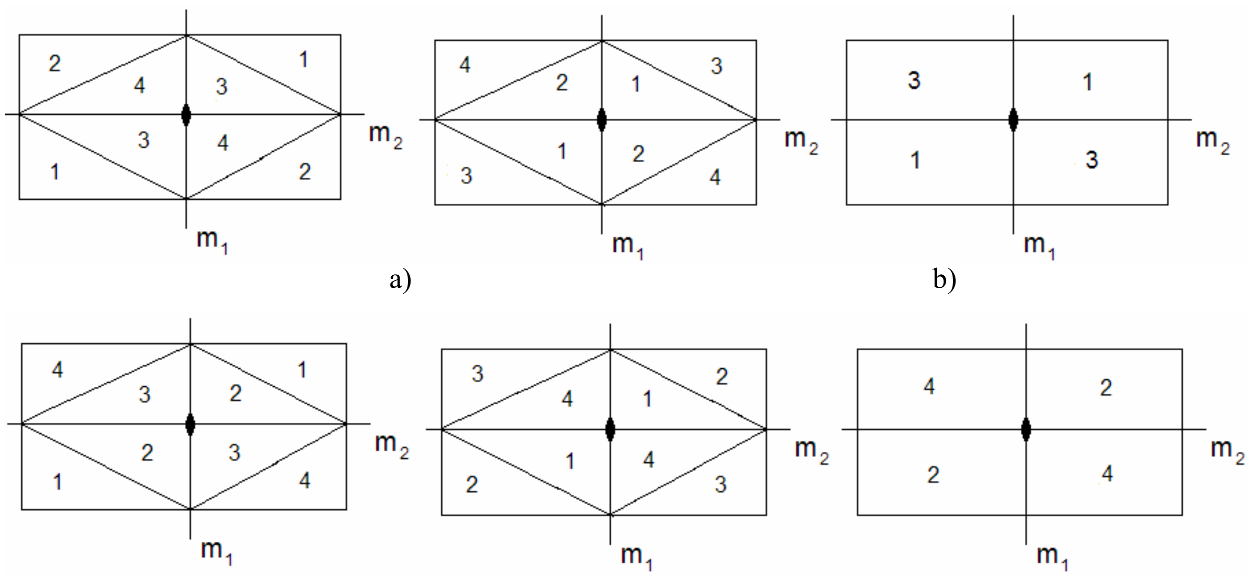

Fig.5. Interpretarea geometrică a grupului $G_2^{(\bar{P})}$.

Precizăm că în toate cazurile 1) - 4) analizate grupurile de P-simetrie obținute sunt de tipul 2-semiminore. Mai mult, în clasificarea pe tipuri aceste grupuri sunt 2-semiminore atât pentru 4-simetrie ($P \cong C_4$), cât și pentru $(42D_1)$-simetrie ($P \cong C_{4v}$, iar subgrupul staționar P_i se include în P deopotrivă cum D_1 se include în $D_4 \cong C_{4v}$).

Considerăm acum grupul $G_3^{(\bar{P})} = \{e1, p2, p^2 m_1, p^{-1} m_2\}$ cu simbolul complex $C_{2v} | C_1((C_4, C_1) | C_2; C_{1v} / C_1)$, care de asemenea este un grup minor de $\bar{4}$-simetrie cu grupul generator $G \cong C_{2v}$. Deosebirea față de grupul precedent analizat este că acesta din urmă are în calitate de nucleu al omomorfismului însoțitor subgrupul $H \cong C_{1v}$. Grupul $G_3^{(\bar{P})}$ se analizează în mod analog cazurilor precedente. Se obține că acest grup nu se interpretează geometric de o figură cu „indici”. Menționăm că pentru interpretarea geometrică a grupurilor minore de $\bar{P}$-simetrie cu figuri geometrice cu „indici” trebuie să ținem cont de legătura dintre acțiunea directă a transformărilor de simetrie asupra calităților şi de acțiunea automorfismului asupra elementelor grupului (la înmulțire).

În încheere, vom remarca că interpretarea geometrică a grupurilor semiminore şi pseudominore de $\bar{P}$-simetrie poate fi făcută în acelaşi mod.

Referințe:

1. Лунгу А.П. К теории $\bar{P}$ -симметрии. Рукопись депонирована в ВИНИТИ (Москва). – 1978. - № 1709-78Деп. - 16 с.
2. Лунгу А.П. К методике вывода младших групп $\bar{P}$ -симметрии. Рукопись депонирована в ВИНИТИ (Москва). - 1979. - № 1587-79Деп. - 22 с.
3. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С, Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. /Р-симметрия и ее дальнейшее развитие. - Кишинев: Штиинца, 1986. - 156 с.
4. Lungu A. Aplicații cvasiomomorfe şi produse semidirecte de grupuri // Conferința ştiințifică jubiliară. - Chişinău: USM, 1996, p.22-24.
5. Заморзаев А.М. О группах квазисимметрии (Р-симметрии) // Кристаллография. - 1967. - Т.12. - Вып.5. - С.819-825.
6. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, ее обобщения и приложения. - Кишинев: Штиинца, 1978. - 275 с.
7. Lungu A., Branişte M. Structura automorfismelor grupurilor cristalografice de categorie G_{30} // Studia Universitatis. Seria „Ştiințe exacte şi economice”. - 2007. - №8. - Chişinău: CEP USM, p.5-11.

Prezentat la 12.08.2008