ТРЁХМЕРНЫЕ ГЕМИСИММОРФНЫЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ РОЗЕТОЧНЫХ *P*-СИММЕТРИЙ И ИХ МНОГОМЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

Teoria generală a *P*-simetriei este folosită pentru a extinde grupurile hemisimorfe liniare cristalografice tridimensionale cu *P*-simetriile de rozetă. În lucrare sunt prezentate lista completă a *P*-simetriilor minore de rozetă şi caracteristicile numerice complete ale listelor de grupuri Q-medii de *P*-simetrie din categoriile indicate. De asemenea, pe baza teoriei generale a *P*-simetriei au fost obținute toate versiunile posibile de grupuri tridimensionale, hemisimorfe cristalografice, liniare ale *P*-simetriilor de rozetă, fără a se ține cont de enantimorfismul lor. Aceasta a permis evaluarea numerică a tuturor grupurilor „hemisimorfe" de simetrie ale spațiului euclidian de dimensiunea cinci, care păstrează invariant în acest spațiu un plan tridimensional şi o dreaptă pe plan.

Based on the general *P*-symmetry theory, three–dimensional hemisimmorfic crystallographic linear groups are expanded up to groups of rosettal *P*-symmetries. The list of junior rosettal *P*-symmetries of this category is completely presented and the full numerical review of Q-middle groups of noted *P*-symmetries of the mentiomed above category is given. The number of different „hemisymmorfhic" symmetry groups of five-dimensional Euclidian space, which keep in it invariant the three-dimensional plane with straight line in it is established by means of revealed every possible (from the point of view of general *P*-symmetries theory) different, without taking into account enantiomorphism, three-dimensional crystallographic linear rosettal *P*-symmetries.

1. Группы изометрических преобразований трёхмерного эвклидова пространства, сохраняющих в нём инвариантной некоторую прямую, называемую осью группы, но не сохраняющих инвариантной одну и ту же точку этого пространства, называются *трёхмерной линейной*, *или цилиндрической*, *или стержневой* группой симметрии. Таких групп бесконечное число, из которых выделяются так называемые *кристаллографические группы симметрии стержней*, если ограничиться трёхмерными линейными группами симметрии, не содержащими поворотных, винтовых, либо зеркально-поворотных осей, а также группами, содержащими поворотные, винтовые и зеркально-поворотные оси порядка два, три, четыре и шесть, лежащими на оси группы. Следовательно, элементами симметрии стержневых кристаллографических групп симметрии могут быть только переносы на векторы, лежащие на оси группы, повороты вокруг осей второго порядка и отражения оси плоскостей, перпендикулярных оси группы, повороты, в том числе винтовые и зеркальные, на кристаллографические углы вокруг оси группы, а также отражения и скользящие отражения от плоскостей, проходящих через ось группы, так как все эти преобразования симметрии переводят в себя ось группы. Таких групп ровно 75, из которых 31 симморфная, 13 гемисимморфных и 31 асимморфная. Все они полностью выписаны в таблице 1 в [1] в двух символиках – А.М. Заморзаева и интернациональной, извлечённой из [2].

Трёхмерные симморфные кристаллографические линейные группы симметрии, записанные в интернациональной символике, расширены в [3] до трёхмерных симморфных линейных групп розеточных *P*-симметрий, и полученные новые группы использованы для выявления количества различных "симморфных" групп симметрии пятимерного эвклидова пространства, сохраняющих в нём трёхмерную плоскость и прямую в ней, то есть групп симметрии категории G_{531}. Настоящая статья является логическим продолжением [3] и посвящается расширению гемисимморфных трёхмерных линейных кристаллографических групп симметрии до гемисимморфных трёхмерных линейных кристаллографических групп розеточных *P*-симметрий и применению полученных групп для выявления количества различных "гемисимморфных" групп симметрии категории G_{531}.

2. Приведём некоторые сведения, связанные с решением поставленной задачи. Заметим, что в самом общем случае трёхмерная линейная кристаллографическая группа симметрии S = T ($\widetilde{f}$), где T – циклическая группа, порожденная переносом t на вектор $\bar{a}$, лежащий на оси группы, а ($\widetilde{f}$) – набор

из преобразований симметрии, разлагающихся в произведение переноса s и “поворота” v. Так вот, интересующей нас гемисимморфной называется такая трёхмерная линейная кристаллографическая группа симметрии, подгруппа преобразований симметрии первого рода которой симморфная, но сама группа не симморфная, ибо набор ($\tilde{f}$) нельзя свести к точечной группе V, так как этот набор обязательно включает скользящие отражения от плоскостей. В этом случае трехмерная линейная группа $S = TV_t$, где T сохраняет прежний смысл, $V_t = \{V_0, v_t\}$ – неточечная группа, а v_t – преобразование симметрии второго рода, не разлагающееся на перенос и “поворот” из группы S. Иначе говоря, в гемисимморфной цилиндрической группе S имеются такие преобразования f = sm , что по отдельности s и m не принадлежат S, но её преобразования симметрии первого рода образуют симморфную группу $S_0 = TV_0$ [3,4].

Из описания цилиндрической гемисимморфной группы непосредственно следует, что для её получения нужно преобразовать цилиндрическую симморфную группу таким образом, чтобы в её наборе ($\bar{f}$) = V отражения от плоскостей, проходящих через ось группы, превратились в плоскости скользящих отражений $\frac{p}{2}m$, где $\bar{d} = \frac{\bar{p}}{2}$ – вектор скольжения, $\bar{p}$ – основной вектор переноса симморфной группы S, лежащий на оси группы, а *m* – плоскость отражения, проходящая через ось симморфной группы. Таким образом, из 13 симморфных цилиндрических групп в интернациональной символике *pm, p2/m, pmm2, p2mm, p3m, p4mm, p6mm, pmmm,* $p\bar{4}2m$, $p\bar{6}2m$, *p4/mmm, p6/mmm и* $p\bar{3}m$, взятых из [3], путём превращения в этих группах плоскостей отражения, проходящих через ось группы, в плоскости скользящих отражений $c = \frac{p}{2}m$, получаем последовательно следующие 13 цилиндрических гемисимморфных групп симметрии: *pc11, p2/c11, pcc2, p2cm, p3c, p4cc, p6cc, pccm,* $p\bar{4}2c$, $p\bar{6}2c$, *p4/mcc, p6/mcc и* $p\bar{3}c$, записанных в интернациональной символике. При записи цилиндрических групп в этой символике на первом месте пишут букву *p*, характеризующую одномерную цилиндрическую группу параллельных переносов, порождённую основным вектором $\bar{p}$, лежащим на оси группы и направленным по оси OZ декартовой прямоугольной системы координат. Ориентировка остальных элементов симметрии (поворотных осей *2, 3, 4, 6* соответствующих порядков, инверсионно поворотных осей $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$, плоскостей отражения *m* и скользящего отражения *c*) по отношению к вектору основного переноса $\bar{p}$ рассматриваемой группы, лежащего на её оси, и друг к другу соответствует правилам, принятым в [2]. Именно поворотная ось второго порядка, идущая по оси OX, записывается на первом месте после символа *p*, а если эта ось направлена по оси OY в этой группе , то её символ записывается на втором месте после символа *p*, если же ось второго порядка направлена по оси OZ, то ее символ в соответствующей группе записывается на третьем месте после символа *p*. В свою очередь, если плоскость скользящего отражения *c* перпендикулярна оси OX, то её символ в рассматриваемой группе записывается на первом месте после буквы *p*, а если плоскость скользящего отражения перпендикулярна оси OY, то её символ *c* записывается на втором месте после *p* в символе группы (например, *pcc2*), а плоскость отражения *m*, перпендикулярная оси группы, записывается на третьем месте в символе рассматриваемой группы после буквы *p* (например, *p2cm* и *pccm*).

Далее, поворотные оси *3, 4* и *6*, идущие по оси OZ (оси группы), записываются на первом месте в символе рассматриваемой группы после *p*; плоскости скользящих отражений *c*, характеризующих эти оси, – на втором и третьем месте после символа *p* (например, *p4cc* и *p6cc*), а плоскости отражений *m*, перпендикулярные осям *4* и *6,* записываются на первом месте после *p* в символе рассматриваемой группы (например, *p4/mcc* и *p6/mcc*). Наконец, символы инверсионно поворотных осей $\bar{3}$, $\bar{4}$ и $\bar{6}$ записываются на первом месте в рассматриваемой группе после буквы *p*, символ оси второго порядка *2*, перпендикулярной инверсионно поворотным осям $\bar{4}$ и $\bar{6}$, записывается на втором месте после буквы *p*, а символ плоскости скользящего отражения *c*, проходящей через оси групп $\bar{4}$ и $\bar{6}$, записывается на третьем месте после буквы *p* в символе рассматриваемой группы (например, $p\bar{4}2c$ и $p\bar{6}2c$).

Таким образом, соотношение между элементами симметрии в гемисимморфных стержневых группах после их получения из симморфных остается таким же, каким оно было между соответствующими элементами в симморфных цилиндрических группах, из которых они получены (ср.[3]).

3. Имея список гемисимморфных цилиндрических групп симметрии и зная структуру каждой из них, можем приступить к выводу гемисимморфных цилиндрических групп розеточных *P*-симметрий.

Искомые группы G_{31}^{P}, как отмечено в [5,6], делятся на порождающие, старшие, младшие и *Q*-средние. Порождающие группы любой *P*-симметрии совпадают с рассматриваемыми классическими группами симметрии *S* ввиду того, что они получаются из классических групп при их обобщении с *1*-симметрией (т.е. симметрией), когда всем точкам преобразуемой фигуры придаётся один и тот же индекс и симметрия "индексированной" фигуры полностью сохраняется. Вывод старших групп *G* любой *P*-симметрии из классических *S* тривиален: $G = S \times P$, где *S* – порождающая (классическая) группа симметрии, а *P* – группа подстановок индексов, приписываемых каждой точке преобразуемой фигуры, группа подстановок которых характеризует рассматриваемую *P*-симметрию. Отсюда следует, что в старшей группе *G* рассматриваемой фигуры с группой симметрии *S* при данной *P*-симметрии с каждым преобразованием симметрии $s \in S$ имеется соответствующее ему преобразования *P*-симметрии $g = s \cdot \varepsilon$, где $\varepsilon \in P$. Следовательно, система образующих элементов старшей группы *G* состоит из системы образующих элементов группы *S* и системы образующих элементов группы *P*. Но это означает, что старшая группа *G* рассматриваемой фигуры с группой симметрии *S* при данной *P*-симметрии разлагается в прямое произведение группы симметрии *S* этой фигуры и группы *P*, характеризующей рассматриваемую *P*-симметрию (т.е. $G = S \times P$) [5, 6].

Младшие группы *G* рассматриваемой *P*-симметрии выводятся из определенной порождающей *S*, согласно основной теореме о *P*-симметрии [5, 6], только в том случае, если *S* обладает таким нормальным делителем *H*, что фактор-группа $S/H \cong P$, а $H = G \cap S$ – подгруппа симметрии в *G*. Изучение *Q*-средних групп *G* *P*-симметрии , где $Q = G \cap P$ есть подгруппа подстановок индексов в группе *G*, согласно той же основной теореме о *P*-симметрии, связано с перебиранием нетривиальных нормальных делителей *Q* группы *P*, а сам подсчет этих групп становится сразу возможным, если предварительно выявлены младшие группы, ибо, как доказано в [7], число различных *Q*-средних групп *P*-симметрии в данном семействе равно числу различных младших групп P_0-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа $P/Q \cong P_0$. При этом в семействах групп изоморфных *P*-симметрий с общей порождающей совпадают не только числа младших групп, но и числа различных *Q*-средних групп. Это позволяет существенно сократить числовой обзор исследуемых нами групп, так как для подсчета гемисимморфных цилиндрических групп G_{31}^{P} розеточных *P*-симметрий нужно проделать подробное исследование не для всех *P*-симметрий, а только для одной из каждого класса изоморфности [7]. В настоящем исследовании используется такая возможность (ср. [3]).

Что касается недостающих для решения поставленной задачи розеточных *P*-симметрий, то они впервые были выявленны в [6, с. 90] при геометрическом способе классификации групп подстановок *P*, когда эти группы были последовательно изоморфны каждой из десяти кристаллографических групп симметрии односторонних розеток G_{20}, что послужило поводом назвать эти 10 *P*-симметрий розеточными [8]. Записывать розеточные *P*-симметрии оказалось весьма удобным с помощью групп *P*, задающих *p*- и (*p*/)- симметрию при *p* = 1, 2, 3, 4, 6, ибо нульмерными группами G_{0}^{P} этих 10 *P*-симметрий полностью моделируются все различные кристаллографические группы симметрии розеток G_{20} [6, 8], а сами группы подстановок *P*, характеризующие розеточные *P*-симметрии, распределяются по 9 классам сильной изоморфности следующим образом: *1; 2, 1/; 3; 4; 6; 2/; 3/; 4/; 6/* (ср. [3]).

4. Опираясь на результаты, изложенные в п.3 данной статьи, выведем гемисимморфные стержневые группы розеточных *P*-симметрий.

При *1*-симметрии, геометрической схемой которой является группа изоморфических преобразований асимметричной точки с индексом 1 (рис.1*a* в [8]), получаются эти же 13 классических гемисимморфных групп симметрии *pc11, p2/c11, pcc2, p2cm, p3c, p4cc, p6cc, pccm,* $p\bar{4}2c$, $p\bar{6}2c$, *p4/mcc, p6/mcc* и $p\bar{3}c$, называемых порождающими, ввиду того, что *1*-симметрия является классической симметрией, характеризуемой группой $P=\{e\}$, где *e* – тождественное преобразование.

Далее, так как при любой P-симметрии, отличной от классической, каждая группа симметрии порождает по одной старшей, то всего старших гемисимморфных цилиндрических групп розеточных P-симметрии будет 117(13×9).

Таким образом, чтобы найти количество всех различных гемисимморфных цилиндрических групп розеточных P-симметрий, нужно вывести все младшие группы, порождаемые 13 стержневыми гемисимморфными группами при каждой из остальных 8 нетривиальных розеточных P-симметриях и подсчитать количество Q-средних групп при отмеченных 9 розеточных P-симметриях.

При *2*-симметрии, геометрической схемой которой является группа $P=\{(1,2)\}$ изометрических преобразований пары симметричных друг другу относительно центра асимметричных точек с индексами 1 и 2 (рис.1*в* в [8]), методом Шубникова [9] (поочередной заменой в системе образующих элементов исходных 13 гемисимморфных цилиндрических групп симметрии на соответствующие преобразования *2*-симметрии) получаются следующие младшие группы: $pc^{(2)}11$; $p2^{(2)}/c11$, $p2/c^{(2)}11$, $p2^{(2)}/c^{(2)}11$; $pc^{(2)}c2^{(2)}$ $pc^{(2)}c^{(2)}2$; $p2c^{(2)}m^{(2)}$, $p2^{(2)}cm^{(2)}$, $p2^{(2)}c^{(2)}m$; $p3c^{(2)}$; $p4c^{(2)}c^{(2)}$, $p4^{(2)}cc^{(2)}$; $p6c^{(2)}c^{(2)}$, $p6^{(2)}cc^{(2)}$; $pc^{(2)}cm$, $pccm^{(2)}$, $pc^{(2)}c^{(2)}m$, $pc^{(2)}cm^{(2)}$, $pc^{(2)}c^{(2}m^{(2)}$; $p\bar{4}2^{(2)}c^{(2)}$, $p\bar{4}^{(2)}2^{(2)}c$, $p\bar{4}^{(2)}2c^{(2)}$; $p\bar{6}2^{(2)}c^{(2)}$, $p\bar{6}^{(2)}2^{(2)}c$, $p\bar{6}^{(2)}2c^{(2)}$; $p4/m^{(2)}cc$, $p4/mc^{(2)}c^{(2)}$, $p4/m^{(2)}c^{(2)}c^{(2)}$, $p4^{(2)}/mcc^{(2)}$, $p4^{(2)}/m^{(2)}cc^{(2)}$; $p6/m^{(2)}cc$, $p6/mc^{(2)}c^{(2)}$, $p6/m^{(2)}c^{(2)}c^{(2)}$, $p6^{(2)}/mcc^{(2)}$, $p6^{(2)}/m^{(2)}cc^{(2)}$; $p\bar{3}c^{(2)}$, $p\bar{3}^{(2)}c$, $p\bar{3}^{(2)}c^{(2)}$, и ни одной Q-средней, так как при *2*-симметрии группа подстановок P, задающая *2*-симметрию, не имеет нетривиальных нормальных делителей.

В итоге имеем, что рассматриваемые нами цилиндрические гемисимморфные группы порождают 38 младших групп *2*–симметрии, а при изоморфных *2*- и (*1/*)-симметриях 38×2 = 76 младших и ни одной Q-средней.

Впервые младшие цилиндрические гемисимморфные группы *2*-симметрии были выписаны в [2] в используемой нами интернациональной символике в виде младших групп антисимметрии и заново воспроизведены в [1] в символике А.М. Заморзаева.

При *3*-симметрии, геометрической схемой которой является группа $P=\{(1,2,3)\}$ изометрических преобразований ориентированного правильного треугольника, вершины которого занумерованны индексами 1, 2 и 3 (*рис. 2а* в [8]), методом Шубникова – Заморзаева [3] из используемых нами стержневых гемисимморфных групп симметрии выводятся следующие пять младших групп *3*-симметрии: $p^{(3)}c^{(-3)}11$; $p^{(3)}c^{(3)}c^{(-3)}2$; $p^{(3)}3c^{(-3)}$; $p^{(3)}4c^{(3)}c^{(-3)}$; $p^{(3)}6c^{(3)}c^{(-3)}$, и ни одной Q-средней, ввиду того, что группа P, задающая *3*-симметрию, как и группа P, задающая *2*-симметрию, не имеет нетривиальных нормальных делителей.

При *4*-симметрии, геометрической схемой которой является группа $P = \{(1, 2, 3, 4)\}$ изометрических преобразований ориентированного квадрата, вершины которого занумерованы числами 1, 2, 3, 4 (рис. *2б* в [8]), отмеченным методом из рассматриваемых нами гемисимморфных стержневых групп выводятся следующие девять младших групп *4*- симметрии: $p^{(2)}c^{(4)}11$; $p^{(2)}c^{(4)}c^{(-4)}2$; $p^{(2)}c^{(4)}c^{(4)}2^{(2)}$; $p^{(2)}3c^{(4)}$; $p^{(2)}4c^{(4)}c^{(-4)}$; $p^{(2)}4^{(2)}c^{(4)}c^{(4)}$, $p^{(2)}6c^{(4)}c^{(-4)}$, $p^{(2)}6^{(2)}c^{(4)}c^{(4)}$; $p^{(2)}\bar{4}^{(4)}2c^{(-4)}$, и 38 *две*-средних, ибо группа P, задающая 4-симметрию, имеет нетривиальный нормальный делитель $Q=2$, а фактор-группа $4/2 \cong 2$, поэтому, согласно п.3, число *2*-средних групп при *4*-симметрии совпадает с числом 38 младших групп при *2*-симметрии. Таким образом, интересующие нас гемисиммофные группы G_{31} при *4*-симметрии порождают 47 новых групп, из которых 9 младших и 38 *2*-средних.

При *6*-симметрии, геометрической схемой которой является группа $P=\{(1,2,3,4,6)\}$ изометрических преобразований ориентированного правильного 6-угольника, вершины которого занумерованы числами 1,2,3,4,6 (*рис.2в* в[8]), используемым методом из 13 гемисимморфных стержневых групп выводятся следующие 8 младших групп *6*-симметрии: $p^{(3)}c^{(6)}11$; $p^{(3)}c^{(6)}c^{(-6)}2$, $p^{(3)}c^{(-3)}c^{(-6)}2^{(2)}$; $p^{(3)}3c^{(6)}$; $p^{(3)}4c^{(6)}c^{(-6)}$, $p^{(3)}4^{(2)}c^{(-3)}c^{(-6)}$; $p^{(3)}6c^{(6)}c^{(-6)}$, $p^{(3)}6^{(2)}c^{(-3)}c^{(-6)}$, а также 5 *две*-средних и 38 *три*-средних группы, ввиду того, что группа P, задающая 6-симметрию, имеет два нетривиальных нормальных делителя $Q_1 = 2$ и $Q_2 = 3$. Вследствие этого, фактор-группа $6/2 \cong 3$, поэтому число *2*-средних групп при *6*-симметрии, согласно п.3, равно числу младших групп при *3*-симметрии, а так как фактор–группа $6/3 \cong 2$, то число *3*-средних групп, согласно тому же п.3 настоящей статьи, равно количеству младших групп при *2*-симметрии.

Таким образом, при *6*-симметрии 13 гемисимморфных классических стержневых групп порождают 51 новую группу, среди которых 8 младших, 5 *две*-средних и *38 три*-средних.

Заметим, что младшие стержневые группы p-симметрии при p = 3,4 и 6 впервые были получены в символике А.М. Заморзаева, выписаны в таблице 6 диссертации [10] и вновь воспроизведены в интернациональной символике в настоящей статье.

При *(2/)*-симметрии, геометрической схемой которой является группа изометрических преобразований прямоугольника (равноугольно-полуправильного 4-угольника), вершины которого занумерованы индексами *1,2* и $\bar{1}$, $\bar{2}$ так, что его полная группа симметрии моделируется группой подстановок $P = \{(1,2)\ (\bar{2},\bar{1}),\ (1,\bar{1})\ (2,\bar{2})\}$номеров его вершин (рис.*3 а* в [8]), из 13 гемисимморфных стержневых групп две группы, *pc11* и *p3c*, не порождают младших, так как указанные группы не обладают таким нормальным делителем H, чтобы фактор-группа $S/H \cong P = \{(1,2)(\bar{2};\bar{1}),\ (1,\bar{1})\ (2,\bar{2})\}$, где $S = pc11$ либо *p3c*.

Список младших групп (*2*/)-симметрии, порождаемых остальными 11 стержневыми гемисимморфными группами, выглядит следующим образом: $p2^{(2}/c^{/)}11$, $p2^{/)}/c^{2)}11$, $p2^{(2'}/c^{/)}11$ (всего 3 группы, в которых символ (2, приписанный справа вверху к образующему элементу группы, указывает на подстановку $(1,2)(\bar{2},\bar{1})$, а символ /) – на замену индексов 1 и $\bar{1}$, а также 2 и $\bar{2}$ друг на друга. В свою очередь, символ (2*'*, приписанный справа вверху к образующему элементу группы, указывает на комбинацию соответствующего преобразования симметрии с подстановкой $(1,\bar{2})(\bar{1},2)$ (ср. рис. *3а* в [8]); $pc^{(2}c^{/)}2^{(2'}$, $pc^{/)}c^{(2'/}2^{(2}$, $pc^{(2'}c^{(2}2^{/)}$ (3 группы); $p2^{(2'}c^{(2}c^{/)}$, $p2^{(2}c^{/)}c^{(2'}$, $p2^{/)}c^{(2}c^{(2'}$ (3 группы); $p4^{/)}c^{(2'}c^{(2}$, $p4^{(2}c^{/)}2^{(2'}$ (2 группы); $p6^{/)}c^{(2'}c^{(2}$, $p6^{(2}c^{/)}c^{(2'}$ (2 группы); $pc^{(2}c^{(2}m^{/)}$, $pc^{/)}c^{/)}m^{(2}$, $pc^{/)}c^{/)}m^{(2'}$ (3 группы), $pcc^{(2}m^{/)}$, $pcc^{/)}m^{(2}$, $pcc^{/)}m^{(2'}$ (3 группы), $pc^{/)}c^{(2}m^{(2}$, $pc^{(2}c^{/)}m^{/)}$, $pc^{(2'}c^{/)}m^{/)}$ (3 группы), $pc^{/)}c^{(2}m^{(2}$, $pc^{(2}c^{/)}m^{(2'}$ (2 группы), $pc^{(2}c^{/)}m$, $pc^{/)}c^{(2'}m$ (2 группы); $p\bar{4}^{/)}2^{(2'}c^{(2}$, $p\bar{4}^{(2}2^{/)}c^{(2'}$, $p\bar{4}^{/)}2^{(2}c^{(2'}$(3 группы); $p\bar{6}^{(2}2^{/)}c^{(2'}$, $p\bar{6}^{/)}2^{(2'}c^{(2}$,$p\bar{6}^{(2}2^{(2'}c^{/)}$ (3 группы); $p4/m^{/)}c^{(2}c^{(2}$, $p4/m^{(2}c^{/)}c^{/)}$, $p4/m^{(2'}c^{/)}c^{/)}$ (3 группы), $p4^{(2}/m^{/)}cc^{(2}$, $p4^{/)}/m^{(2'}cc^{/)}$, $p4^{/)}/m^{(2}cc^{/)}$ (3 группы), $p4^{(2}/m^{/)}c^{/)}c^{(2'}$, $p4^{(2'}/m^{/)}c^{/)}c^{(2}$, $p4^{/)}/m^{(2}c^{(2}c^{(2'}$(3 группы), $p4^{(2}/mc^{/)}c^{(2'}$, $p4^{/)}/mc^{(2'}c^{(2}$(2 группы), $p4^{(2}/m^{(2}c^{(2'}$, $p4^{/)}/m^{/)}c^{(2'}c^{(2}$ (2 группы). Группа *p6/mcc* также порождает 13 младших групп *(2/)*- симметрии, которые получаются из 13 младших групп *(2/)*-симметрии, порождаемых группой *p4/mcc*, если в символах этих 13 групп цифру *4* заменить на цифру *6*; $p\bar{3}^{(2}c^{/)}$, $p\bar{3}^{/)}c^{(2}$, $p\bar{3}^{/)}c^{(2'}$ (3 группы). Кроме младших, гемисимморфные стержневые группы порождают также и Q-средние, ввиду того, что группа P, задающая (*2*/)-симметрию, обладает двумя нетривиальными нормальными делителями $Q_1 = 2$ и $Q_2 = 1/$, и таких групп будет 38×2 = 76, ибо фактор-группа $(2/)/2 \cong 1/$, а фактор-группа $(2/)/(1/) \cong 2$, поэтому *2*-средних групп при *(2/)*-симметрии будет столько, сколько имеется младших гемисимморфных стержневых групп при (*1/*)-симметрии, а (*1/*)-средних групп при (*2/*)- симметрии будет столько, сколько имеется младших гемисимморфных стержневых групп при *2*-симметрии (см. п.2). Таким образом, стержневые гемисимморфные группы симметрии при (2/)-симметрии порождают 137 новых групп, из которых 61 младшая и 76 Q-средних.

При (3/)-симметрии, геометрической схемой которой является группа изометрических преобразований равноугольно-полуправильного 6-угольника, вершины которого занумерованы индексами *1, 2, 3* и $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ так, что его полная группа симметрии моделируется группой подстановок $P = \{(1,2,3)(\bar{3},\bar{2},\bar{1}),\ (1,\bar{1})(2,\bar{2})(3,\bar{3})\}$ номеров его вершин (рис. *3б* в [8]), три группы, *pc11, pcc2* и *p4cc*, не порождают младших, а из остальных 10 гемисимморфных стержневых групп симметрии методом Шубникова – Заморзаева выводится 13 младших, список которых выглядит следующим образом: $p^{(3}2^{/)}/c^{-3}11$; $p^{(3}2^{/)}c^{(-3}m^{///)}$; $p3^{(3}c^{//)}$; $p6^{(3}c^{/)}c^{//)}$; $p^{(3}c^{(-3}c^{(-3}m^{/)}$; $p^{(3}\bar{4}^{/)}2^{///)}c^{(-3}$; $p\bar{6}^{(3}2^{/)}c^{//)}$; $p^{(-3}\bar{6}^{/)}2^{//)}c^{(3}$; $p^{(3}4/m^{/)}c^{(-3)}$; $p6^{(3}/mm^{/)}m^{//)}$; $p^{(3}6/m^{/)}c^{(3}c^{(-3}$; $p\bar{3}^{(2}c^{/)}$; $p^{(3}\bar{3}^{/)}c^{(-3}$.

В интернациональных символах этих групп положительное или отрицательное число 3 со скобкой слева, "(3 или (-3", приписанное справа вверху к образующему элементу группы, указывает на подстановку $(1,2,3)(\bar{3},\bar{2},\bar{1})$ или $(3,2,1)(\bar{1},\bar{2},\bar{3})$ соответственно, штрих со скобкой справа "/)" – на замену индексов *1* и $\bar{1}$, *2* и $\bar{2}$, *3* и $\bar{3}$ одного на другой, два штриха со скобкой справа "//)" – на подстановку индексов *1* и $\bar{3}$, *2* и $\bar{1}$, *3* и $\bar{2}$, а символ три штриха со скобкой справа "///)" – на подстановку индексов *1* и $\bar{2}$, *2* и $\bar{3}$, *3* и $\bar{1}$ (см. *рис.а* в [11], где среди младших гемисимморфных стержневых групп (*3/*)-симметрии отсутствуют две группы $p^{(3}\bar{4}^{/)}2^{//)}c^{(-3}$ и $p^{(3}\bar{3}^{/)}c^{(-3)}$.

Кроме младших, классические стержневые гемисимморфные группы порождают при (*3/*)-симметрии также 38 *три*-средних групп, ввиду того, что группа *P*, задающая (*3/*)-симметрию, обладает нормальным делителем $Q=3$, а фактор-группа $(3/)3/\cong 1/$, поэтому число таких групп совпадает с числом младших гемисимморфных стержневых групп при (*1/*)-симметрии (см. п.3). Следовательно, при (*3/*)-симметрии различается 51 гемисимморфная стержневая группа, из которых 13 младших и 38 *три*-средних.

При (*4/*)-симметрии, геометрической схемой которой является группа изометрических преобразований равноугольно-полуправильного 8-угольника, вершины которого занумерованы индексами *1; 2, 3, 4* и $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ так, что его полная группа симметрии интерпретируется группой подстановок $P = \{(1, 2, 3, 4)(\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1}), (1, \bar{1})(2, \bar{2})(3, \bar{3})(4, \bar{4})\}$ номеров его вершин (*рис.3в* в [8]), методом Шубникова – Заморзаева находим следующие младшие гемисимморфные группы: $p^{(2}2^{/)}/c^{(4}11$; $p^{(2}2^{/)}c^{(4}m^{//)}$; $p4^{(4}c^{/)}c^{//)}$; $p^{(2}c^{(4}c^{(4}m^{/)}$, $p^{(2}c^{(4}c^{(-4}m^{/)}$; $p\bar{4}^{(4}2^{/)}c^{//)}$, $p^{(2}\bar{4}^{/)}2^{//)}c^{(4}$; $p^{(2}\bar{6}^{/)}2^{//)}c^{(4}$; $p4^{(4}/mc^{/}c^{//)}$, $p4^{(4}/m^{(2}c^{/)}c^{//)}$, $p^{(2}4/m^{/)}c^{(4}c^{(4}$, $p^{(2}4^{(2}/m^{/)}c^{(4}c^{(4}$; $p^{(2}6/m^{/)}c^{(4}c^{(-4}$, $p^{(2}6^{(2}/m^{/)}c^{(4}c^{(4}$; $p^{(2}\bar{3}^{/)}c^{(4}$.

В списке 15 младших гемисимморфных стержневых групп (*4/*)-симметрии цифра *4* или *-4* со скобкой слева, приписанная справа вверху к образующему элементу группы, указывает на подстановку $(1,2,3,4)(\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1})$ или $(4,3,2,1)(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3},\bar{4})$ соответственно, число (*2* – на подстановку индексов *1* и *3*, *2* и *4*, $\bar{1}$ и $\bar{3}$, $\bar{2}$ и $\bar{4}$, символ /) – на замену индексов *1* и $\bar{1}$, *2* и $\bar{2}$, *3* и $\bar{3}$, *4* и $\bar{4}$ одного на другой, а символ //) – на замену индексов *1* и $\bar{4}$, *2* и $\bar{1}$, *3* и $\bar{2}$, *4* и $\bar{3}$ одного на другой (см. *рис.б* в [11]), где среди младших гемисимморфных стержневых групп (*4/*)-симметрии отсутствуют две группы $p^{(2}\bar{4}^{/)}2^{//)}c^{(4}$ и $p^{(2}\bar{3}^{/)}c^{(4)}$.

Кроме выписанных младших, при (*4/*)-симметрии имеются также 38 *четыре*-средних, 38 *(2/)*-средних и 61 *две*-средняя гемисимморфная стержневая группа, вследствие того, что группа *P*, задающая (*4/*)-симметрию, имеет три нетривиальных нормальных делителя $Q_1 = 4$, $Q_2 = 2/$ и $Q_3 = 2$, но $(4/)/4 \cong 1/$, $(4/)/(2/) \cong 2$, а $(4/)/2 \cong (2/)$ (см.п.3).

В итоге имеем, что при (*4/*)-симметрии различаются 152 гемисимморфных стержневых группы, из которых 15 младших и 137 *Q*-средних.

Наконец, при (*6/*)-симметрии, геометрической схемой которой является группа изометрических преобразований равноугольно-полуправильного 12-угольника, вершины которого занумерованы индексами *1,2,3,4,5,6* и $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5},\bar{6}$ так, что его полная группа симметрии моделируется группой подстановок $P = \{(1,2,3,4,5,6)(\bar{6},\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1}), (1,\bar{1})(2,\bar{2})(3, \bar{3})(4,\bar{4})(5,\bar{5})(6,\bar{6})\}$номеров его вершин (*рис.3г* в [8]), используемым нами методом Шубникова – Заморзаева получаем следующие младшие гемисимморфные стержневые группы: $p^{(3}2^{/)}/c^{(6}11$; $p^{(3}2^{/)}c^{(6}m^{//)}$; $p6^{(6}c^{/)}c^{//)}$; $p^{(3}c^{(-3}c^{(6}m^{/)}$, $p^{(3}c^{(6}c^{(-6}m^{/)}$; $p^{(3}\bar{4}^{/)}2^{//)}c^{(6}$, $p^{(3}\bar{6}^{/)}2^{//)}c^{(6}$, $p\bar{6}^{(6}2^{/)}c^{//)}$; $p^{(3}4/m^{/)}c^{(6}c^{-6}$, $p^{(3}4^{(2}/m^{/)}c^{(-3}c^{(6}$; $p6^{(3}/m^{(2}c^{/)}c^{IV)}$, $p6^{(6}/mc^{/)}c^{//)}$, $p6^{(6}/m^{(2}c^{/)}c^{//)}$, $p^{(3}6/m^{/)}c^{(6}c^{(-6}$; $p^{(3}6^{(2}/m^{/)}c^{(-3}c^{(6}$; $p\bar{3}^{(6}c^{/)}$, $p^{(3}\bar{3}^{/)}c^{(6}$.

В интернациональных символах этих 17 младших гемисимморфных стержневых групп при (6/)-симметрии цифра 6 или -6 со скобкой слева, приписанная справа вверху к образующему элементу группы, указывает на постановку $(1,\ldots,6)(\bar{6},\ldots,\bar{1})$ или $(6,\ldots,1)(\bar{1},\ldots\ldots,\bar{6})$ соответственно, цифра *3* или *-3* со скобкой слева, приписанная справа вверху к образующему элементу, указывает на подстановку $(1, 3, 5)(2,4,6)(\bar{5},\bar{3},\bar{1})(\bar{6},\bar{4},\bar{2})$ или $(1, 5, 3)(2, 6, 4)(\bar{1}, \bar{3}, \bar{5})(\bar{2}, \bar{4}, \bar{6})$ соответственно, число (2 – на подстановку индексов 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6, $\bar{1}$ и $\bar{4}$, $\bar{2}$ и $\bar{5}$, $\bar{\bar{3}}$ и $\bar{6}$, символ /) – на замену индексов *1* и $\bar{1}$, *2* и

$\bar{2}$, …, *6* и $\bar{6}$ одного на другой, символ //) – на замену индексов *1* и $\bar{6}$, *2* и $\bar{1}$, *3* и $\bar{2}$, *4* и $\bar{3}$, *5* и $\bar{4}$, *6* и $\bar{5}$ одного на другой, а символ *IV*)- на замену индексов *1* и $\bar{5}$, *2* и $\bar{6}$, *3* и $\bar{1}$, *4* и $\bar{2}$, *5* и $\bar{3}$, *6* и $\bar{4}$ одного на другой и т.д.: см. *рис.* на с.59 в работе [11] , в которой пропущены две младшие гемисимморфные стержневые группы (*6/*)-симметрии $p^{(3}\bar{4}^{/)}2^{//)}c^{(6}$ и $p^{(3}\bar{3}^{/)}c^{(6}$.

Но при (*6/*)-симметрии, кроме перечисленных младших групп, имеются еще и *Q*-средние гемисимморфные стержневые группы, ввиду того, что группа *P*, задающая (*6/*)-симметрию, обладает четырьмя нетривиальными нормальными делителями $Q_1 = 2$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 6$ и $Q_4 = 3/$. Следовательно, среди *Q*-средних гемисимморфных стержневых групп при (*6/*)-симметрии различаются 13 *две*-средних, так как фактор-группа $(6/)/2 \cong 3/$, 61 *три*-средняя, ибо фактор-группа $(6/)/3 \cong 2/$, 38 *шесть*-средних, ввиду того, что фактор-группа $(6/)/6 \cong 1/$, а также 38 *(3/)*-средних, потому что фактор-группа $(6/)/(3/) \cong 2$. Следовательно, при *(6/)*-симметрии рассматриваемые нами гемисимморфные стержневые группы порождают 17 младших и 13 + 61 + 38×2 = 150 *Q*-средних, т.е. всего 167 новых групп.

В итоге имеем, что при обобщении 13 трехмерных гемисимморфных линейных групп симметрии с десятью розеточными *P*-симметриями $(P \cong G_{20})$ получаем 816 различных групп, из которых 13 порождающих, 117 старших, 204 младших и 482 *Q*-средних.

5. Заметим, что индексы и знаки, приписываемые точкам фигуры при обобщении их групп симметрии с определённой *P*-симметрией, имеют внегеометрический смысл по отношению к пространству, в котором рассматривается фигура; в добавочном измерении этим индексам и знакам можно придать геометрический смысл, что позволяет применить собранные в [12, 5, 6] одно-, двух- и трёхмерные кристаллографические группы *P*-симметрии к выявлению многомерных групп симметрии. Так, например, 1651 шубниковской группой G_3^1 можно изображать с точностью до строения группы симметрии четырёхмерного эвклидова пространства, сохраняющие вложенную в неё трёхмерную плоскость, т.е. группы симметрии категории G_{43}. Для этого знаки + или –, приписанные точкам трёхмерного пространства, при выводе шубниковских групп G_3^1 следует толковать геометрически как знаки координаты в четвёртом измерении, что означает расположение точки по ту или иную сторону от фиксированной трёхмерной плоскости в четырёхмерном пространстве. Однако соответствие между группами G_3^1 и G_{43} не будет взаимно однозначным ввиду того, что в четырёхмерном пространстве трёхмерная плоскость (гиперплоскость) может переводиться в себя путем поворота вокруг лежащей в ней двумерной плоскости. В результате устраняется различие между левыми и правыми винтовыми движениями вокруг двумерной плоскости и, следовательно, отличающимся между собой только за счет энантиоморфизма шубниковским группам G_3^1 сопоставляются одинаковые гиперслоевые группы G_{43}. Исключив повторяющиеся с этой точки зрения шубниковские группы G_3^1, получаем по 219 порождающих и старших (вместо 230), 1156 младших (вместо 1191) и, следовательно, 1594 группы G_{43} [12, 6]. Аналогично для выявления различных четырёхмерных групп симметрии категории G_{431} с помощью групп антисимметрии стержней G_{31}^1 нужно выяснить, сколько имеется различных таких групп без учёта энантиоморфизма. При этом следует различать 67 порождающих и старших (вместо 75 G_{31}) и 226 младших (вместо 244) [12, 6].

В свою очередь, нульмерными группами *p*- и (*p/*)- симметрии G_0^p и $G_0^{p/}$ при *p = 1, 2, 3, 4, 6* интерпретируются десять групп симметрии односторонних розеток G_{20}. В самом деле, обобщение группы *1* категории G_0, порождаемой тождественным преобразованием нульмерного пространства E_0, с *p- и (p/)*-симметрией при отмеченных значениях *p*, приводит к одной порождающей группе *1* и девяти старшим группам $1\times1^{(2)}$, $1\times1^{(3)}$, $1\times1^{(4)}$, $1\times1^{(6)}$, $1\times1^{/)}$, $1\times(1^{(2}\bullet1^{1)})$, $1\times(1^{(3}\bullet1^{1)})$, $1\times(1^{(4}\bullet1^{1)}$, $1\times(1^{(6}\bullet1^{1)})$, не отличающимся от самих групп *P* подстановок индексов. Но отмеченные нами наглядные геометрические схемы этих десяти групп *P* на плоскости явно дают их интерпретацию в виде групп симметрии односторонних розеток G_{20} [8], благодаря чему *p*- и *(p/)*-симметрии при *p=1,2,3,4,6* были названы розеточными *P*-симметриями.

Полное сопоставление нульмерных групп G_0^p розеточных P-симметрий в порядке их перечисления с соответствующими двумерными кристаллографическими точечными группами G_{20} (розеток) приведено в таблице 1.

Таблица 1

Сопоставление нульмерных групп G_0^p розеточных P-симметрий с группами симметрии G_{20} (розеток)

Нульмерные группы розеточных P-симметрий	Двумерные точечные кристаллографические группы симметрии G_{20}.
$1,\ 1\times1^{(2)},\ 1\times1^{(3)},\ 1\times1^{(4)},\ 1\times1^{(6)},\ 1\times1^{1)}$	$1, 2, 3, 4, 6, m$
$1\times(1^{(2}\bullet 1^{1)},\ 3\times1^{(2}\bullet1^{1)},\ 4\times1^{(2}\bullet1^{1)},\ 6\times(1^{(2}\bullet1^{1)})$	$mm, 3m, 4mm, 6mm$

Подобным образом группы симметрии конечных цилиндров G_{310} или таблеток G_{320} (двусторонних розеток) можно сопоставить с сильно изоморфными им группами розеточных P-симметрий отрезков G_{10}^P совершенно аналогично сопоставлению линейных одномерных групп G_1^P розеточных P-симметрий со стержневыми группами симметрии G_{31}, выписанными в таблице П. 12 монографии [5], а группами розеточных P-симметрий конечных бордюров G_{210}^P можно изображать сильно изоморфные им группы симметрии 4-мерного пространства категории G_{4210}. Действительно, обобщая 5 групп симметрии конечных бордюров G_{210} *1, 1m, m1, 2* и *mm* с десятью розеточными P-симметриями, получим: 5 G_{210} + (6 младших + 5 старших) $G_{210}^{1/}$ + (6 младших + 5 старших) G_{210}^{2} + (0 младших + 5 старших) G_{210}^{3} + (0 + 5 +6) G_{210}^{4} (младших, старших и 2-средних) + (0 + 5 + 6 +0) G_{210}^{6} (младших, старших, 3- и 2-средних) + (3 +5 + 2×6) $G_{210}^{2'}$ (младших, старших, (*1/*)- и 2-средних) + (0 + 5 + 6) $G_{210}^{3/}$ (младших, старших и 3-средних + (210 + 5 + 2×6 + 3) $G_{210}^{4/}$ (младших, старших, (*2/*)-, 4- и 2-средних) + (0 + 5 + + 2×6 + 6 + 0) $G_{210}^{6/}$ (младших, старших, (3/)-, 6-, 3- и 2- средних) = 125 G_{210}^P , которыми изображаются группы симметрии категории G_{4210}, совпадающие с 125 группами симметрии категории G_{4320}, подсчитанными с помощью групп симметрии и антисимметрии таблеток G_{320}^1 [5, 6].

Из всего сказанного выше следует, что между подсчитанными нами гемисимморфными стержневыми группами розеточных P-симметрий и пятимерными "гемисимморфными" группами симметрии категории G_{531} устанавливается сильно изоморфное соответствие ввиду того, что среди полученных нами 816 трехмерных линейных гемисимморфных групп розеточных P-симметрий нет энантиоморфных пар. Таким образом, все различные "гемисимморфные" группы симметрии 5-мерного пространства категории G_{531} интерпретируются в виде трехмерных гемисимморфных цилиндрических групп G_{31}, $G_{31}^{1/}$, G_{31}^{p} и $G_{31}^{P/}$ при $p = 2,3,4,6$ (где выписываются только группы полных P-симметрий) через сложное толкование знаков "+" или "–", индексов *1,…., p* или индексов *1, …, p* со знаком +, а также индексов $\overline{1}$, …, $\overline{p}$ со знаком – .

Итак, с помощью трёхмерных гемисимморфных линейных групп розеточных P-симметрий установлено, что в пятимерном эвклидовом пространстве существует 816 различных групп симметрии, сохраняющих в нем трёхмерную плоскость и прямую в ней, то есть 816 различных групп симметрии категории G_{531}. Следовательно, поставленная в данной статье задача решена полностью.

Решением этой задачи еще раз подтверждено, что кристаллографические группы P-симметрии при их полной классификации с точки зрения теории P-симметрии позволяют продвинуть вперед принципиальное решение задачи n-мерной кристаллографии при $n \geq 4$.

6. В заключение отметим, что при поиске решения поставленной задачи по выявлению числа различных "гемисимморфных" групп симметрии категории G_{531} в духе работы [3], нами получены следующие побочные результаты и использованы факты из [3]:

1. Из 75 кристаллографических стержневых групп симметрии выделены содержащиеся в них 13 гемисимморфных групп с демонстрацией способа их получения из симморфных стержневых групп симметрии, выписанных в [3].

2. Осуществленное в [3] распределение розеточных *P*-симметрий по классам изоморфности, то есть по классам, содержащим *P*-симметрии, характеризующим группы подстановок *P*, имеющие одинаковое строение, использовано при решении интересующей нас задачи.

3. Выявлены пропуски младших стержневых гемисимморфных кристаллографических групп ($p/$)- симметрии при $p = 3, 4, 6$ в [11].

4. Составлены фактор-группы групп подстановок *P*, задающих розеточные *P*-симметрии, по их нормальным делителям и указаны группы подстановок, которым эти фактор-группы сильно изоморфны.

Опираясь на общую теорию *P*-симметрии и перечисленные выше факты, удалось существенно сократить числовой обзор полного вывода гемисимморфных стержневых групп розеточных *P*-симметрий и убедиться, что среди полученных 816 новых групп не имеется энантиоморфных пар.

Литература:

1. Галярский Э.И., Заморзаев А.М. Полный вывод кристаллографических групп симметрии и различного рода антисимметрии стержней // Кристаллография. - 1965. - Т.10. - Вып.2. - С.147-154.
2. Неронова Н.Н., Белов Н.В. Единая схема кристаллографических групп симметрии классических и черно-белых // Кристаллография. - 1961. - Т.6. - Вып. 1. - С. 3-12.
3. Палистрант А.Ф. Трёхмерные симморфные кристаллографические линейные группы розеточных *P*-симметрий и их многомерные приложения // Revista Ştiinţifică STUDIA UNIVERSITATIS. Seria "Ştiinţe exacte şi economice (Matematică, Informatică, Economie)". - 2008. - Nr.3(13). - P.14-22.
4. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Теория дискретных групп симметрии. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1977. - 100 с.
5. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, её обобщения и приложения. - Кишинев: Штиинца, 1978. - 275 с.
6. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. *P*-симметрия и ее дальнейшее развитие. - Кишинев: Штиинца, 1986. - 156 с.
7. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме *P*-симметрий // Известия АН РМ: Математика. - 1994. - №1. - С.75-84.
8. Палистрант А.Ф. О группах (p, 2)- и ($p^{/}$, 2)-симметрии и их геометрических приложениях // Алгебраические структуры и геометрия. - Кишинев: Штиинца, 1991. - С.92-105.
9. Шубников А.В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. - Москва: Изд-во АН СССР, 1951. - 172 с.
10. Галярский Э.И. Группы симметрии подобия и их обобщения: Дис….кандидата физ.-матем. наук. - Кишинев, 1970. - 297 с.
11. Палистрант А.Ф. Трехмерные линейные и плоскостные группы (p/)-симметрии // Общая алгебра и дискретная геометрия. - Кишинев: Штиинца, 1980. - С.58-71.
12. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинев: Штиинца, 1976. - 283 с.

Prezentat la 17.09.2008