STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2008, nr.8(18)

МЛАДШИЕ АСИММОРФНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГРУППЫ ТРЁХ НЕЗАВИСИМЫХ РОДОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АНТИСИММЕТРИИ, ($22\underline{1}$)-СИММЕТРИИ И ($2\underline{2}1'$)-СИММЕТРИИ

Александр ПАЛИСТРАНТ, Алла ШЕНЕШЕУЦКАЯ

Кафедра алгебры и геометрии

Deducerea grupurilor minore asimorfe spațiale de antisimetrie de multiplicitatea trei a fost obținută prin metoda Şubnikov – Zamorzaev. De asemenea, a fost stabilită legătura acestor grupuri cu grupurile minore asimorfe spațiale de tipurile ($22\underline{1}$) şi ($2\underline{2}1'$). Această legătură a dat posibilitatea de a stabili numărul tuturor grupurilor minore diferite, obținute din grupurile asimorfe spațiale la generalizarea lor cu ($22\underline{1}$)-simetria şi ($2\underline{2}1'$)-simetria.

Junior asimmorfic space groups of three – fold antisimmetry have been derived using Shubnikov – Zamorzaev method. The connection of these groups with junior asimmorfic spase groups of ($22\underline{1}$)-symmetry and ($2\underline{2}1'$)-symmetry has been discovered. This connection permitted to establish the number of different junior groups which asimmorfic space groups generate for ($22\underline{1}$)-symmetry and ($2\underline{2}1'$)-symmetry.

1. Хорошо известно, что в самом общем случае трехмерная федоровская группа $\Phi = T\cdot(\tilde{f})$, где T - группа, порожденная параллельными переносами на три некомпланарных вектора, а $(\tilde{f})$ - набор из преобразований симметрии $f_1, f_2, ..., f_n$, где каждое $f_i = s_i\ v_i\ (i = 1,2, ...,n)$ разлагается в произведение переноса s_i и “поворота” v_i. Интересующей нас асимморфной называется такая федоровская группа, в которой среди преобразований симметрии первого рода имеются неразложимые на переносы и повороты в самой группе, т.е. в этом случае Ф=TV$_t$, где V$_t$=$\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2,..., \tilde{f}_n\}$, а $\tilde{f}_i = \tilde{s}_i\ v_i$, но не все $\tilde{s}_i$ и v_i принадлежат Ф[1,2]. Предлагаемая статья является логическим завершением работ [3] и [4] и посвящается обобщению оставшихся асимморфных пространственных федоровских групп с понятиями трех независимых родов преобразований антисимметрии, ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии.

2. При решении поставленной задачи нужно хорошо представлять себе структуру самих асимморфных пространственных групп, которая непосредственно вытекает из самого принципа вывода этих групп. Действительно, согласно определению, асимморфная федоровская группа G_3 – это такая пространственная дискретная группа , в которой среди преобразований симметрии первого рода имеются неразложимые на переносы и повороты из этой группы. Это означает, что асимморфную федоровскую группу можно получить из такой симморфной группы, в которой имеются поворотные оси определенного порядка, которые нужно заменить на винтовые оси соответствующего порядка.

Рассмотрим на примерах принцип вывода асимморфных федоровских групп из симморфных. Так, например, из симморфной группы *{a,b,c}(2)* (или *P2*) моноклинной сингонии, записанной в символике А.М. Заморзаева и интернациональной, ось 2 направлена по вектору $\bar{c}$ и перпендикулярна векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, являющимся вместе с вектором $\bar{c}$ ребрами параллелепипеда Бравэ, исходящими из одной точки, выводится одна асимморфная группа $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\right)$, или P2$_1$ (мы заменили поворотную ось 2 на винтовую $\frac{c}{2}2$). Далее, из симморфной группы *{a,b,c}*(2 · m) (или Pmm2) ортогональной сингонии, у которой ось 2 параллельна вектору $\bar{c}$, а плоскость m перпендикулярна вектору $\bar{a}$ и параллельна векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$, выводятся следующие асимморфные: 1) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\cdot m\right)$, или Pmc2$_1$, 1$'$) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{c}{2}m\right)$, или Pcm2$_1$; 2) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{b}{2}m\right)$, или Pbc2$_1$; 3) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{b+c}{2}m\right)$, или Pnm2$_1$; 3$'$) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\cdot m_{\frac{a}{4}}\right)$, или

Pmn2_1; $2^{/}$) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{c}{2}m_{\frac{a}{4}}\right)$, или P*c*$a2_1$; 4) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{b}{2}m_{\frac{a}{4}}\right)$, или Pb*n*$2_1$, $4^{/}$) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{b+c}{2}m_{\frac{a}{4}}\right)$, или P*n*$a2_1$. Но полученные группы 1) и $1^{/}$), 2) и $2^{/}$), 3) и $3^{/}$), 4) и $4^{/}$) попарно одинаковы в силу одинаковой геометрической роли векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Следовательно, из группы Pmm2 выводятся четыре различных асимморфных федоровских группы.

В свою очередь из симморфной группы *{a,b,c}(2:2)* (или P222) ортогональной сингонии, первая ось 2 которой в символике А.М. Заморзаева направлена по вектору $\overline{c}$, а вторая ось 2, перпендикулярная первой оси второго порядка, направлена по вектору $\overline{a}$, выводятся следующие асимморфные группы: 1) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2:2\right)$, или P$222_1$, $1^{/}$) $\{a,b,c\}\left(2:\frac{a}{2}2\right)$, или P$2_122$, $1^{//}$) $\{a,b,c\}\left(2:2_{\frac{b}{4}}\right)$, или P$22_12$ (здесь символ $2_{\frac{b}{4}}$ означает, что поворотная ось 2, идущая по вектору $\overline{a}$, сдвинута от точки пересечения трех попарно ортогональных осей второго порядка на вектор $\frac{\overline{b}}{4}$, а перенос на вектор $\frac{\overline{b}}{2}$ совершается параллельно не выписанной оси второго порядка); 2) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2:\frac{a}{2}2\right)$,или P$2_122_1$; $2^{/}$) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2:\ 2_{\frac{b}{4}}\right)$,или P$22_12_1$; $2^{//}$) $\{a,b,c\}\left(2:\frac{a}{2}2_{\frac{b}{4}}\right)$, или P$2_12_12$; 3) $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2:\frac{a}{2}2_{\frac{b}{4}}\right)$, или P$2_12_12_1$. Но группы 1), $1^{/}$) и $1^{//}$), а также группы 2), $2^{/}$) и $2^{//}$) одинаковы между собой в силу одинаковой геометрической роли векторов $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$. Таким образом, из симморфной группы P222 выводятся три различные асимморфные федоровские группы и т.д.

Всего из 73 симморфных федоровских групп использованным нами методом выводится 92 неизоморфных асимморфных. Но за счет различия правых и левых винтовых осей, 11 асимморфных групп повторяются дважды. Встречаются именно такие группы, в которых винтовые оси (правые и левые) не переходят друг в друга собственным аффинным преобразованием, связывающим эти группы: например, группы $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{4}4\right)$ (или P4_1) и $\{a,b,c\}\left(-\frac{c}{4}4\right)$ (или P4_3) квадратной сингонии.

Если вспомним, что одинаковыми федоровскими группами Ф и $Ф^{/}$ считаются такие, которые не только изоморфны, но и связывающие их аффинные преобразования собственные, т.е. в формуле $Ф^{/}$ = АФ$А^{-1}$ аффинное преобразование А собственное, то неодинаковых асимморфных групп оказывается 103. Это удобно и для физических применений, так как правизна и левизна винтовых осей в кристаллическом пространстве соответствует разным веществам (ср. [1]).

Все эти 103 асимморфные пространственные группы вместе с симморфными и гемимморфными выписаны в приложении П1 монографии [2] в трех символиках: использованной Е.С. Федоровым, предложенной А.М. Заморзаевым и интернациональной. В настоящей статье нас будут интересовать только асимморфные пространственные федоровские группы, представленные в заморзаевской символике, явно отражающей полную систему образующих элементов этих групп и удобной для применения метода Шубникова-Заморзаева к обобщению асимморфных пространственных групп с понятиями антисимметрии трех независимых родов, ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1^{/}$)-симметрии (ср. [3, 4]).

В этой символике буквами *a,b,c* обозначены векторы переносов – ребра параллелепипеда Бравэ. Символ группы переносов Т выражается через образующие.

Так, символ *{a,b,c}* соответствует решетке P, $\left\{a,\frac{a+b}{2},c\right\}$ – решетке C, $\left\{a,b,\frac{a+b+c}{2}\right\}$ – решетке I, $\left\{a,\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2}\right\}$ – решетке F.

В символе для асимморфной группы Ф = Т·V_t первый множитель означает группу Т, а второй V_t - набор из поворотных, зеркально поворотных осей для квадратной и кубической сингоний, винтовых осей, а также плоскостей отражений и скользящих отражений. Оси поворотов, зеркальных поворотов, винтовые оси, плоскости отражений и скользящих отражений и их взаимная ориентация по отношению к векторам переносов в группе T точно такие же, как и в симморфных и гемисимморфных группах [3,4]. Символом $\frac{p}{2}2$ обозначается винтовая ось второго порядка, где $\bar{p}$ – основной вектор переноса, а символами, например, $\frac{c}{2}4$, $\frac{c}{4}4$ и $-\frac{c}{4}4$ – винтовые оси четвертого порядка и т.д. Символом $\frac{d}{2}m$ обозначается плоскость скользящего отражения с вектором $\frac{\bar{d}}{2}$. Прохождение любой плоскости через ось или параллельность ей обозначается точкой между их символами, перпендикулярность – двоеточием. Индекс $\frac{d}{4}$ справа внизу символа элемента симметрии характеризует его смещенность на расстояние $\frac{d}{4}$ от других выбранных элементов симметрии [2].

3. Напомним сущность понятий антисимметрии трех независимых родов, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии и выявим связь между ними. Для этого извлечем из монографии [2] некоторые положения из теории антисимметрии различного рода.

Припишем каждой точке фигуры знаки плюс или минус в l различных смыслах. Изометрическое преобразование этой "l-значной" фигуры назовем преобразованием симметрии, если оно каждую точку фигуры переводит в точку с таким же набором знаков; если же оно переводит каждую точку в точку, отличающуюся от исходной только j-м знаком или только j-м и k-м знаками, …, или всеми l знаками, то назовем его, соответственно, преобразованием антисимметрии j-го рода, или рода (j, k), …, или рода $(1,2, …, l)$. При $l = 2$ имеется три рода антисимметрии: 1, 2 и (1, 2); при $l = 3$ – семь родов: 1, 2, 3, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3) ; в общем случае – всего $C_l^1 + C_l^2 + ... + C_l^l = 2^l - 1$ родов.

Из этого определения следует, что произведение любых двух преобразований антисимметрии одного рода есть преобразование симметрии, а различных родов – преобразование антисимметрии отличного от них рода. Совокупность же преобразований симметрии и антисимметрии всех возможных родов любой фигуры является группой, которую назовем группой симметрии и различного рода антисимметрии этой фигуры.

Всякое преобразование антисимметрии g, например, рода j есть коммутативное произведение преобразования симметрии s, геометрически совпадающего с g , на антитождественное данного рода j : $g = se_j = e_js$. Что касается всех 2^l-1 антитождественных преобразований, то они коммутируют с любым преобразованием симметрии или антисимметрии и вместе с тождественным преобразованием e составляют абелеву группу $E^{(l)} = \{e_1\}\times\{e_2\}\times…\times\{e_l\}$, разлагающуюся в прямое произведение l групп второго порядка, порожденных антитождественными преобразованиями j-x родов ($j = 1,2,…, l$).

Три различных рода преобразований антисимметрии назовем зависимыми, если каждый из них является произведением двух других родов преобразований антисимметрии, например, при $l = 2$ преобразования антисимметрии рода 1, рода 2 и рода (1, 2) зависимы.

При $l \geq 3$ три рода антисимметрии могут и не быть зависимыми, например 1-й, 2-й и 3-й, но перемножением преобразований этих родов можно получить еще четыре завсимых от них рода, т.е. в группе, содержащей преобразования антисимметрии трех независимых родов, имеются преобразования антисимметрии семи родов (см. [2]).

Так вот, нужная нам антисимметрия трех независимых родов задается группой восьмого порядка $E^{(3)} = \{\underline{1}\}\times\{1'\}\times\{{}^*1\}$, являющейся прямым произведением трех групп второго порядка, порожденных последовательно антитождественными преобразованиями рода 1, рода 2 и рода 3, появляющимися при рассмотрении симметрии и антисимметрии различного рода, когда каждой точке фигуры приписывается три качественно различных знака "плюс" или "минус" с целью выявления трехкратных заморзаевских групп [2-4].

Далее, символом $22\underline{1}$ в интернациональной символике обозначена старшая осевая группа, порожденная точечной группой 222, образующие элементы которой являются поворотами вокруг трех попарно ортогональных осей второго порядка, задающая одну из 32 кристаллографических P-симметрий в случае, когда группа подстановок индексов, приписанных точкам преобразуемой фигуры, изоморфна одной из трехмерных точечных групп симметрии G_{30} [3-5]. Анализируемая группа $22\underline{1}$ интерпретирует группу mmm восьмого порядка, порождаемую отражениями от трех попарно ортогональных между собой плоскостей, если входящее в группу $22\underline{1}$ в качестве самостоятельного образующего элемента антитождественное преобразование $\underline{1}$ истолковывать в качестве зеркального поворота $\widetilde{2}$ второго порядка, что возможно [6].

Наконец, символом $2\underline{2}1'$ обозначена старшая рода 2 и младшая рода 1 группа, получаемая из группы 222 при её обобщении с двукратной антисимметрией [2]. Если в группе $2\underline{2}1'$ антитождественное преобразование второго рода $1'$ толковать как зеркальный поворот второго порядка, то мы получим младшую рода 1 группу m $\underline{m}$ $\underline{m}$, изоморфную группе mmm как своей порождающей. Таким образом группа $22\underline{1}$, задающая ($22\underline{1}$)-симметрию, и группа $2\underline{2}1'$, задающая ($2\underline{2}1'$)-симметрию, изоморфны между собой [2]. В свою очередь группа $E^{(3)}$, задающая антисимметрию трех независимых родов, изоморфна группе $22\underline{1}$. Действительно, группа $E^{(3)} = (1, \underline{1}, 1', *1, \underline{1}', *\underline{1}, *1', *\underline{1}')$, содержащая антитождественные преобразования семи различных родов, из которых три независимых, имеет порядок 8 [2]. Группа $22\underline{1} = (1, 2_1, 2_2, 2_3, \underline{1}, \underline{2}_1, \underline{2}_2, \underline{2}_3)$ того же порядка. Заметим, что отображение φ элементов группы $E^{(3)}$ на элементы группы $22\underline{1}$ по закону $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\underline{1}) = \underline{2}_1$, $\varphi(1') = \underline{2}_2$, $\varphi(*1) = \underline{2}_3$, $\varphi(\underline{1}') = 2_3$, $\varphi(*\underline{1}) = 2_2$, $\varphi(*1') = 2_1$, $\varphi(*\underline{1}') = \underline{1}$ является не только взаимно однозначным, но и сохраняющим операцию умножения элементов, отображающихся друг на друга групп. Действительно, если $\varphi(\underline{1}) = \underline{2}_1$, а $\varphi(1') = \underline{2}_2$, где$\underline{1}$ и $1' \in E^{(3)}$, а $\underline{2}_1$ и $\underline{2}_2 \in 22\underline{1}$, то $\varphi(\underline{1} \cdot 1') = \varphi(\underline{1}') = 2_3 = \underline{2}_1 \cdot \underline{2}_2 = \varphi(\underline{1}) \cdot \varphi(1')$.

Таким образом, группы $E^{(3)}$, $22\underline{1}$ и $2\underline{2}1'$, соответствующие последовательно антисимметрии трех независимых родов, ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии, изоморфны между собой (ср. [3,4]).

4. Приступим теперь к выбору пути решения поставленной задачи, то есть задачи получения младших асимморфных пространственных групп трех независимых родов преобразований антисимметрии, ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии непосредственно из асимморфных классических групп симметрии. Заметим при этом, что задача расширения асимморфных пространственных групп симметрии до аналогичных младших групп антисимметрии трех независимых родов непосредственно вытекает из развитой в [2] теории l-кратной антисимметрии при $l = 3$. Согласно этой теории, для получения младших асимморфных пространственных групп антисимметрии семи различных родов, из которых три независимых, нужно в каждой асимморфной группе симметрии, записанной в символике А.М. Заморзаева, отражающей полную систему её образующих элементов, три или большее число её образующих заменить на соответствующие преобразования антисимметрии, среди которых обязательно должно быть три независимых [2]. Если из полученных таким образом различных новых групп (групп типа M^3 по [2]) отобрать только те, которые изоморфны взятым асимморфным (порождающим по [2]) группам, то они и будут подходящими для нас группами (ср.[2,3,4]).

Обладая младшими асимморфными пространственными группами антисимметрии трех независимых родов (группами типа M^3 по [2]), мы сможем с помощью этих групп получить все различные асимморфные группы типа ($22\underline{1}$)- симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии, то есть решить полностью поставленную в данной статье задачу.

Действительно, по введенному в п.3 настоящей статьи изоморфизму φ между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$, каждой асимморфной группе типа M^3 будет соответствовать младшая асимморфная группа ($22\underline{1}$)-симметрии. Но при этом различным младшим асимморфным группам типа M^3 по изоморфизму φ могут соответствовать одинаковые асимморфные группы ($22\underline{1}$)- симметрии. Именно, шести различным младшим асимморфным группам, получающимся из одной асимморфной группы типа M^3 нетождественными подстановками знаков __, / и * , то есть преобразований антисимметрии рода 1, рода 2 и рода 3, будут соответствовать по изоморфизму φ шесть одинаковых групп ($22\underline{1}$)- симметрии, ввиду того, что группа $E^{(3)} = (1, \underline{1}, 1', *1, \underline{1}', *\underline{1}, *1', *\underline{1}')$ характеризуется восьмью различными между собой элементами, из которых семь являются антитождественными преобразованиями различных родов [2], а в группе $22\underline{1} = 2_1 2_2 2_3 \underline{1} = (1, 2_1 , 2_2, 2_3, \underline{1}, \underline{2}_1, \underline{2}_2 , \underline{2}_3)$ существенно различаются между собой только четыре элемента, например, 1, 2_1 , $\underline{1}$ и $\underline{2}_1$, а элементы 2_1 , 2_2, 2_3 одинаковы между собой, как и элементы $\underline{2}_1$, $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ с точки зрения ($22\underline{1}$)-симметрии [3, 4].

По аналогичной причине трём различным асимморфным группам типа M^3, переходящим друг в друга при круговых подстановках знаков __, / и * , а также двум различным аналогичным группам типа M^3, переходящим друг в друга при транспозиции знаков __ и * , по изоморфизму φ между груп-

STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2008, nr.8(18)

пами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$ будут соответствовать последовательно три и две одинаковые асимморфные группы ($22\underline{1}$)-симметрии.

Далее, с помощью младших асимморфных групп типа M^3 можно получить и все интересующие нас различные младшие асимморфные группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии. Для этого воспользуемся изоморфизмом ψ между группами $E^{(3)}$ и ($2\underline{2}1'$), переводящим элементы группы E^3 в элементы группы $2\underline{2}1' = 2_1\underline{2}_2\underline{2}_3 1' =$ $(1, 2_1, \underline{2}_2, \underline{2}_3, 1', 2_1', \underline{2}_2', \underline{2}_3')$ по закону: $\psi(1) = 1$, $\psi(\underline{1}) = \underline{2}_2$, $\psi(1') = \underline{2}_3$, $\psi(*1) = 2_1'$, $\psi(\underline{1}') = 2_1$, $\psi = (*\underline{1}) = \underline{2}_3'$, $\psi(*1') = \underline{2}_2'$, $\psi(*\underline{1}') = 1'$.

Рассматриваемый изоморфизм ψ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$ каждой асимморфной группе типа M^3 поставит в соответствие асимморфную группу ($2\underline{2}1'$)-симметрии. Но при этом различным асимморфным группам типа M^3 по изоморфизму ψ могут соответствовать одинаковые асимморфные группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии. Действительно, шести различным младшим асимморфным группам типа M^3, переходящим друг в друга при нетождественных подстановках знаков __, / и * , будут соответствовать по изоморфизму ψ только три различные асимморфные группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии, ибо группа $E^{(3)}$, как уже было отмечено выше, характеризуется восьмью различными элементами, а в группе $2\underline{2}1'$ существенно различны между собой только шесть элементов $1, 2_1, \underline{2}_2, 1', 2_2', \underline{2}_2'$, а элементы $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ одинаковы между собой, как и элементы $\underline{2}_2'$ и $\underline{2}_3'$ с точки зрения ($2\underline{2}1'$)-симметрии (ср.[3,4]). Подобным же образом трём различным младшим асимморфным группам, получаемым из одной асимморфной группы типа M^3 четными подстановками знаков __, / и * , будут соответствовать по тому же изоморфизму ψ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$ две различные асимморфные группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии, а двум различным асимморфным группам типа M^3, переходящим друг в друга при транспозиции знаков __ и * , будут соответствовать также две различные асимморфные группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии.

Такая связь между различными младшими асимморфными группами антисимметрии трёх независимых родов и последовательно различными аналогичными младшими группами ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии, расширяющими общие асимморфные группы симметрии, объясняется разными критериями одинаковости групп этих трех частных случаев *P*-симметрии. Следовательно, чтобы использовать младшие асимморфные группы типа M^3 для вывода и подсчета аналогичных младших групп ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии, нужно группы типа M^3, выводимые из каждой асимморфной федоровской группы, расписать по представителям шестерок, троек, двоек и одиночек при условии, что остальные группы этого списка получаются из выписанного представителя либо всеми нетождественными подстановками элементарных знаков __, / и * , либо круговыми подстановками этих знаков, либо транспозицией черты и звездочки, либо остальных групп нет (ср.[3, 4]). При этом шестерке групп одинакового строения типа M^3, связанных между собой отмеченной зависимостью, будет соответствовать одна младшая группа ($22\underline{1}$)-симметрии в связи с тем, что преобразованиям антисимметрии, определяемым, например, антитождественными преобразованиями рода1, рода 2 и рода 3 в группах типа M^3 указанной шестерки, по изоморфизму φ будут соответствовать преобразования, связанные с неразличимыми элементами $\underline{2}_1$, $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ в группе ($22\underline{1}$)-симметрии. По аналогичной причине трём и двум младшим группам типа M^3, связанным между собой отмеченной зависимостью, по изоморфизму φ между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$ будут соответствовать последовательно по одной младшей группе ($22\underline{1}$)-симметрии, а одиночной группе типа M^3 по тому же изоморфизму φ будет соответствовать одна младшая группа ($22\underline{1}$)-симметрии. Далее, аналогичной шестерке асимморфных групп типа M^3 по изоморфизму ψ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$ будут соответствовать уже три различные младшие асимморфные группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии ввиду того, что по изомрфизму ψ преобразованиям антисимметрии, связанным, например, с антитождественными преобразованиями рода 1, рода 2 и рода 3, будут соответствовать в группах ($2\underline{2}1'$)-симметрии преобразования, связанные с элементами $\underline{2}_2$, $\underline{2}_3$ и $2_1'$, среди которых $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ одинаковы между собой, а элемент $2_1'$ отличен от элементов $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ в группе $2\underline{2}1'$; по аналогичной причине трём различным младшим асимморфным группам типа M^3, полученным из одной такой же группы круговыми подстановками знаков __, / и *, по тому же изомрфизму ψ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$ будут соответствовать две различные асимморфные группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии; двум же различным асимморфным группам типа M^3, переходящим друг в друга транспозицией знаков

__, и * , по изомрфизму ψ будут соответствовать две различные асимморфные группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии, а одиночной асимморфной группе трёх независимых родов преобразований антисимметрии будет соответствовать по этому же изоморфизму ψ одна аналогичная младшая группа ($2\underline{2}1'$)-симметрии (ср.[3, 4]).

Продемонстрируем на примерах всё сказанное выше о соответствии различных младших асимморфных групп трёхкратной антисимметрии, ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии.

Рассмотрим младшую асимморфную группу типа M^3 $\{a,\ b,\ c\}\left(\frac{c}{2}\underline{2}\cdot\frac{b}{2}m':\frac{a}{2}*2_{\frac{b}{4}}\right)$ и пять отличных от неё и различных между собой групп, полученных из выписанной группы всеми нетождественными подстановками знаков __, / и * , то есть преобразованиями антисимметрии рода 1, рода 2 и рода 3. Это будут следующие группы:

$$\{a,\ b,\ c\}\left(\frac{c}{2}\underline{2}\cdot\frac{b}{2}*m:\frac{a}{2}\ 2'_{\frac{b}{4}}\right),\ \{a,\ b,\ c\}\left(\frac{c}{2}2'\cdot\frac{b}{2}\underline{m}:\frac{a}{2}*2_{\frac{b}{4}}\right),$$

$$\{a,\ b,\ c\}\left(\frac{c}{2}2'\cdot\frac{b}{2}*m:\frac{a}{2}\ \underline{2}_{\frac{b}{4}}\right),\quad \{a,\ b,\ c\}\left(\frac{c}{2}*2\cdot\frac{b}{2}\underline{m}:\frac{a}{2}\ 2'_{\frac{b}{4}}\right),$$

$\{a,\ b,\ c\}\left(\frac{c}{2}*2\cdot\frac{b}{2}m':\frac{a}{2}\ \underline{2}_{\frac{b}{4}}\right)$. Этим шести группам в порядке их записи по изоморфизму φ между группами $E^{(3)}$, задающей антисимметрию трёх независимых родов, и группой $22\underline{1}$, задающей ($22\underline{1}$)-симметрию, будут соответствовать следующие шесть младших асимморфных групп ($22\underline{1}$)-симметрии:

1) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_1)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)}:\frac{a}{2}2^{(\underline{2}_3)}_{\frac{b}{4}}\right)$; 2) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_1)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)}:\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)}\right)$; 3) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_1)}:\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)}\right)$;

4) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)}:\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_1)}\right)$; 5) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_1)}:\frac{c}{2}\ 2^{(\underline{2}_2)}_{\frac{b}{4}}\right)$; 6) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)}:\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_1)}\right)$,

которые неразличимы между собой ввиду того, что преобразования $\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_1)}$, $\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)}$, $\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)}$ и т. д. одинаковы между собой вследствие того, что элементы $\underline{2}_1$, $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ геометрически совпадают в группе $22\underline{1}$.

Этим же шести младшим группам трёх независимых родов преобразований антисимметрии, переходящим друг в друга при подстановках знаков __, / и *, по изоморфизму ψ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$ будут соответствовать в порядке записи следующие шесть младших асимморфных групп ($2\underline{2}1'$)-симметрии:

1) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)}:\frac{a}{2}\ 2^{(2'_1)}_{\frac{b}{4}}\right)$, 2) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)}\cdot\frac{b}{2}m^{(2'_1)}:\frac{a}{2}\ 2^{(\underline{2}_3)}_{\frac{b}{4}}\right)$, 3) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)}:\frac{a}{2}\ 2^{(2'_1)}_{\frac{b}{4}}\right)$,

4) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)}\cdot\frac{b}{2}m^{(2'_1)}:\frac{c}{2}\ 2^{(\underline{2}_2)}_{\frac{b}{4}}\right)$, 5) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(2'_1)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)}:\frac{c}{2}\ 2^{(\underline{2}_3)}_{\frac{b}{4}}\right)$, 6) $\{a, b, c\}\left(\frac{c}{2}2^{(2'_1)}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)}:\frac{c}{2}\ 2^{(\underline{2}_2)}_{\frac{b}{4}}\right)$,

из которых 1) и 3), 2) и 4), 5) и 6) совпадают между собой ввиду того, что преобразования $\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)}$ и $\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)}$, как и преобразования $\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)}$ и $\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)}$, а также $\frac{a}{2}\ 2^{(\underline{2}_2)}_{\frac{b}{4}}$ и $\frac{a}{2}\ 2^{(\underline{2}_3)}_{\frac{b}{4}}$, не различаются между собой в отмеченных группах из-за того, что элементы $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ в группе $2\underline{2}1'$ играют одинаковую геометрическую роль.

Аналогичным образом, трём различным младшим асимморфным группам 1) $\{\underline{a},\ *b',\ c\}\left(\frac{c}{2}2'\right)$, 2) $\{a',\ *\underline{b},\ c\}\left(\frac{c}{2}*2\right)$, 3) $\{*a,\ \underline{b}',\ c\}\left(\frac{c}{2}\underline{2}\right)$, полученным из группы 1) круговыми подстановками знаков __, / и *, по изоморфизму φ между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$ будут соответствовать совпадающие между собой три младшие асимморфные группы ($22\underline{1}$)-симметрии: 1) $\{a^{(\underline{2}_1)},\ b^{(\underline{2}_1)},\ c\}(\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)})$, 2) $\{a^{(\underline{2}_2)},\ b^{(\underline{2}_2)}$,

$c\}(\frac{c}{2}\,2^{(\underline{2}_3)})$, 3) $\{a^{(\underline{2}_3)}, b^{(2_3)}, c\}(\frac{c}{2}\,2^{(\underline{2}_1)})$ ввиду одинаковой геометрической роли элементов 2_1, 2_2 , и 2_3 , а также $\underline{2}_1$, $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ в группе $22\underline{1}$.

В свою очередь, этим же младшим трём различным асимморфным группам типа M^3, переходящим друг в друга при круговых подстановках знаков __, / и *, по изоморфизму ψ между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}'$ будут соответствовать три младшие асимморфные группы ($22\underline{1}'$)-симметрии: 1)$\{a^{(\underline{2}_2)}, b^{(2_2')}, c\}(\frac{c}{2}\,2^{(\underline{2}_3)})$, 2) $\{a^{(\underline{2}_3)}, b^{(2_3')}, c\}(\frac{c}{2}\,2^{(2_1')})$, 3) $\{a^{(2_1')}, b^{(2_1)}, c\}$ $(\frac{c}{2}\,2^{(\underline{2}_2)})$, из которых 1) и 2) группы одинаковы ввиду того, что элементы $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$, как и элементы $2_2'$ и $2_3'$, в группе $2\underline{2}1'$ не различаются. Наконец, двум асимморфным группам $\{a, b, c\}(*\underline{2}\cdot\frac{b}{2}\underline{m} : \frac{a}{2} *2'_{\frac{b}{4}})$ и $\{a, b, c\}(*\underline{2}\cdot\frac{b}{2} *m : \frac{a}{2}\ \underline{2}'_{\frac{b}{4}})$, переходящим друг в друга при транспозиции знаков __ и *, по изоморфизму φ между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$ будут соответствовать две одинаковые младшие асимморфные группы $\{a, b, c\}(2^{(2_2)}\cdot\frac{b}{2}\,m^{(\underline{2}_1)} : \frac{a}{2}\,2^{(2_1)})$ и $\{a, b, c\}(2^{(2_2)}\cdot\frac{b}{2}\,m^{(\underline{2}_3)} : \frac{a}{2}\,2^{(2_3)})$ ($22\underline{1}$)-симметрии, ибо элементы $\underline{2}_1$ и $\underline{2}_3$, как и элементы 2_1 и 2_3, не различаются в группе ($22\underline{1}$)-симметрии, а этим же двум группам типа M^3 по изоморфизму ψ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$ будут соответствовать две различные младшие асимморфные группы $\{a, b, c\}(2^{(\underline{2}_3')}\cdot\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)} : \frac{a}{2}\ 2^{(\underline{2}_2')})$ и $\{a, b, c\}(2^{(\underline{2}_3')}\cdot\frac{b}{2}m^{(2_1')} : \frac{a}{2}\ 2^{(2_1)})$.

Резюмируя все сказанное выше в этом пункте, приходим к выводу, что для решения поставленной задачи выявленным способом нужно сначала осуществить вывод младших пространственных асимморфных групп антисимметрии трех независимых родов, и в каждом семействе новых групп распределить их по представителям шести, трех, двух и одной групп, переходящих друг в друга при подстановках знаков __ , / и *. Полученный при этом сокращенный обзор новых групп типа M^3 использовать для записи и подсчета всех различных младших асимморфных групп ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии (ср.[3, 4]).

А именно, если при каждом представителе сокращенного списка асимморфных групп типа M^3 заменить цифры 6, 3 и 2 на 1, а цифру 1 оставить без изменения, то суммирование всех новых цифр даст число всех различных младших асимморфных групп ($22\underline{1}$)-симметрии. Далее, если же в сокращенном списке младших асимморфных групп антисимметрии трёх независимых родов цифру 6 заменить на 3, цифру 3 на 2, а цифру 2 и 1 оставить без изменения, то суммирование всех новых цифр даст число всех различных младших асимморфных групп ($2\underline{2}1'$)-симметрии (ср. [3, 4]).

Найденные в [7] с помощью компьютера по семействам числа младших асимморфных групп антисимметрии трёх независимых родов не могут быть использованы для подсчета различных пространственных асимморфных групп ($22\underline{1}$)- и ($2\underline{2}1'$)-симметрии, ибо в этой работе отсутствует распределение полученных групп по "гнездам", содержащим по шесть, три, две и одной группе типа M^3 , позволяющим как выписать, так и подсчитать сами младшие асимморфные группы ($22\underline{1}$)- и ($2\underline{2}1'$)-симметрии. Они могут служить только хорошим ориентиром правильности распределения самих полученных групп типа M^3 по отмеченным "гнездам".

В настоящей статье, независимо от [7], с помощью метода Шубникова–Заморзаева выводятся младшие асимморфные группы антисимметрии трёх независимых родов по представителям, заменяющим шесть, три, две, либо одну группу. Причем, недостающие пять групп получаются из выписанного представителя шести групп всеми нетождественными подстановками знаков __, / и *, последовательно характеризующими преобразования антисимметрии рода 1, рода 2 и рода 3. Далее, недостающие 2 группы получаются из представителя, заменяющего три группы, только четными подстановками знаков __, / и *, а недостающая одна группа получается из представителя двух групп только транспозицией знаков __ и *. Наконец, из представителя одной группы подстановками __, / и * получаются только одинаковые с ней группы (ср.[3, 4]).

5. Обобщим асимморфные пространственные федоровские группы симметрии выявленным в п.4. методом Шубникова - Заморзаева до младших групп антисимметрии трёх независимых родов, а затем полученные группы используем для записи и подсчета младших асимморфных групп ($22\underline{1}$)- и ($2\underline{2}1'$)-симметрии (ср. [3, 4]).

Из асимморфных групп нужные нам младшие группы трёх независимых родов преобразований антисимметрии порождают только те группы, структурные особенности которых, изложенные на стр. 50-55 монографии [2], допускают замену преобразований симметрии в системе их образующих элементов на соответсвующие преобразования антисимметрии различных родов, лишь бы среди них имелись преобразования антисимметрии трёх независимых родов (ср. [4]).

Из 103 асимморфных пространственных групп симметрии отмеченным требованиям удовлетворяют только 59 групп. Сами же группы, согласно [2,7], разделяются на 15 множеств, в каждое из которых входят только такие асимморфные группы симметрии, которые порождают одинаковое число младших групп типа M^3 при их обобщении с трёхкратной антисимметрией (группы с одинаковыми антисимметрическими характеристиками (АХ) по [7]).

Выпишем эти множества групп в фёдоровских обозначениях: 1) *1a*; 2) *2a; 3)3a, 7a, 42a* (всего 3 группы); 4) *4a; 5) 5a, 10a, 11a, 25a, 27a, 33a, 36a, 37a, 38a, 41a, 43a, 44a, 45a, 50a, 52a, 84a, 85a,103a* (всего 18 групп); 6) *6a; 7) 9a, 22a, 24a, 47a* (всего 4 группы); 8) *13 a, 17a, 26a, 28a, 46a, 56a, 57a, 58a, 59a, 63a, 64a, 65a, 66a, 67a, 87a, 88a,* (всего 16 групп) 9) *14a; 10) 15a, 16a, 23a, 54a, 55a, 60a, 61a* (всего 7групп); 11) *18a, 19a,* (всего 2 группы); 12) *20a;* 13) *21a;* 14) *29a;* 15) *62a* – всего 59 асимморфных пространственных групп, которые порождают нужные нам младшие группы типа M^3.

Итак, группа с фёдоровским символом *1a* и заморзаевским $\{a,\ b,\ c\}\left(\frac{c}{2}2\right)$ порождает 7 групп типа M^3 . Список этих групп при использовании отмеченных сокращенных способов их записи выглядит следующим образом: 1) $\{\underline{a},\ b',\ c\}\left(\frac{c}{2}^{*}2\right)$-3, 2) $\{\underline{a}\ ,^{*}\ b',\ c\}\left(\frac{c}{2}2'\right)$- 3, 3)$\{a'\ ,^{*}\ \underline{b},\ c\}\left(\frac{c}{2}\underline{2}\right)$- 1. Этим 7 группам по изоморфизму φ между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$ будут соответствовать 2×1 + 1×1 = 3 младшие асимморфные группы ($22\underline{1}$)-симметрии, а по изоморфизму ψ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$ будут соответствовать 2×2 + 1 = 5 младших асимморфных групп ($2\underline{2}1'$)-симметрии.

Список этих трёх младших групп ($22\underline{1}$)-симметрии с порождающей группой 1*a* таков: $\{a^{(\underline{2}_1)},\ b^{(\underline{2}_2)},\ c\}\ (\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)})$, $\{a^{(\underline{2}_1)},\ b^{(2_1)},\ c\}\ (\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)})$, $\{a^{(\underline{2}_2)},\ b^{(2_2)},\ c\}\ (\frac{c}{2}2^{(2_1)})$. В свою очередь, список 5 младших асимморфных групп ($2\underline{2}1'$)-симметрии выглядит следующим образом: 1)$\{a^{(\underline{2}_2)},\ b^{(\underline{2}_3)},\ c\}\ (\frac{c}{2}2^{(2'_1)})$, 2) $\{a^{(\underline{2}_3)},\ b^{(2'_1)},\ c\}\ (\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)})$, 3) $\{a^{(\underline{2}_2)},\ b^{(\underline{2}'_2)},\ c\}\ (\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_3)})$, 4) $\{\ a^{(2'_1)},\ \mathrm{b}^{(2_1)},\ \mathrm{c}\}\ (\frac{c}{2}2^{(\underline{2}_2)})$, 5) $\{a^{(\underline{2}_2)},\ b^{(\underline{2}'_3)},\ c\}\ (\frac{c}{2}2^{(2_2)})$.

В дальнейшем, из-за громоздкости не станем приводить список младших асимморфных групп трёх независимых родов преобразований антисимметрии, ($22\underline{1}$) и ($2\underline{2}1'$)-симметрии, а укажем только общее число младших групп *P*-симметрии, порождаемых группами последующих множеств.

Именно, группа 2*a*-{a , b, c} ($\frac{c}{2}2$: m) порождает 19×6 + 17×3 + 3×1 = 168 групп типа M^3 , 19×1 + 17×1 + 3×1 = 39 групп ($22\underline{1}$)-симметрии и 19×3 + 17×2 + 3×1 = 94 группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии.

Группа 3*a*-$\{a,\ b,\ c\}\left(\frac{c}{2}2:\frac{b}{2}m\right)$, входящая в множество из трёх фёдоровских групп с одинаковыми АХ, порождает 4×6 + 6×3 = 42 группы типа M^3, 4×1 + 6×1 = 10 групп ($22\underline{1}$)-симметрии и 4×3 + 6×2 = 24 группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии, а все множество 3) порождает 42×3 = 126 групп типа M^3, 10×3 = 30 групп ($22\underline{1}$)-симметрии и 24×3 = 72 группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии.

Группа *4a – {a, b, c}* $\left(\frac{c}{2}2:2\right)$, составляющая множество 4), порождает 49×6 +21×3 = 357 групп типа M^3 , 49×1 + 21×1 = 70 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 49×3 + 21×2 = 189 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Группа 5*a – {a,* $\frac{a+b}{2}$, c} $\left(\frac{c}{2}2:2\right)$, входящая в множество 5), содержащее 18 асимморфных групп с одинаковыми АХ, порождает 12×6 + 4×3 = 84 группы типа M^3, 12×1 + 4×1 = 16 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 12×3 + 4×2 = 44 группы $(2\underline{2}1')$-симметрии, а всё множество 5) из 18 групп G_3 порождает 84×18 = 1512 групп типа M^3, 16×18 = 288 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 44×18 = 792 группы $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Группа *6a – {a, b,* $\frac{a+b+c}{2}$ } $\left(\frac{c}{2}2:\frac{a}{2}2_{\frac{b}{4}}\right)$ порождает 3×6 + 3×3 + 1×1 = 28 групп типа M^3, 3×1 + 3×1 + 1×1 = 7 групп типа $(22\underline{1})$-симметрии и 3×3 + 3×2 + 1×1 = 16 групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Группа *9a – {a, b, c}* $\left(\frac{c}{2}2\cdot m\right)$, входящая в множество 7), содержащее 4 асимморфные группы G_3, порождает 104×6 + 30×3 = 714 младших групп типа M^3, 104×1 + 30×1 = 134 младших группы $(22\underline{1})$-симметрии и 104×3 + 30×2 = 372 младших группы $(2\underline{2}1')$-симметрии, а все множество 7) из четырёх групп G_3 порождает 714×4 = 2856 групп типа M^3, 134×4 = 536 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 372×4 = 1488 групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Группа 13*a - {a,* $\frac{a+b}{2}$, c} $\left(\frac{c}{2}2\cdot m\right)$, входящая в множество 8), содержащее 16 асимморфных групп G_3, порождает 28×6 = 168 младших групп типа M^3, 28×1 = 28 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 28×3 = 84 младших группы $(2\underline{2}1')$-симметрии, а все множество из 16 фёдоровских групп – 168×16 = 2688 младших групп типа M^3, 28×16 = 448 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 84×16 = 1344 младших группы $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Группа *14a - {a, b, c}* $\left(\frac{c}{2}2\cdot m:2\right)$, составляющая множество 9), порождает 1228×6 + 148×3 = 7812 младших групп типа M^3, 1228×1 + 148×1 = 1376 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 1228×3 + 148×2 = 3980 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Группа 15*a*-{a, b, c} $\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{b+c}{2}m:2\right)$, входящая в множество 10), содержащее семь асимморфных групп G_3, порождает 212×6 + 24×3 = 1344 младших группы типа M^3, 212×1 + 24×1 = 236 младших групп (221)-симметрии и 212×3 + 24×2 = 684 младших группы $(2\underline{2}1')$-симметрии, а все множество 10) из семи групп – 1344×7 = 9408 младших групп типа M^3, 236×7 = 1652 младших группы $(22\underline{1})$-симметрии и 684×7 = 4788 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Группа 18*a – {a,* $\frac{a+b}{2}$, *c* } $\left(\frac{c}{2}2\cdot m:2\right)$, входящая в множество 11), содержащее две асимморфные группы G_3 с одинаковыми АХ, порождает 420×6 = 2520 младших групп типа M^3, 420×1 = 420 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 420×3 = 1260 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии, а все множество 11) – 2520×2 = 5040 младших групп типа M^3, 420×2 = 840 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 1260×2 = 2520 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Группа 20*a* – {a, b, $\frac{a+b+c}{2}$ } $\left(\frac{c}{2}2\cdot m:\frac{a}{2}2_{\frac{b}{4}}\right)$, составляющая множество 12), порождает 204×6 + 12×3 = 1260 групп типа M^3, 204×1 + 12×1 = 216 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 204×3 + 12×2 = 636 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии. Группа 21*a* – {a, b, $\frac{a+b+c}{2}$} $\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{b}{2}m:\frac{a}{2}2_{\frac{b}{4}}\right)$, составляющая множество 13), порождает 68×6 + 12×3 + 2×2 = 448 групп типа M^3, 68×1 + 12×1 + 2×1 = 82 группы $(22\underline{1})$-симметрии и 68×3 + 12×2 + 2×2 = 232 младших группы $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Далее, группа 29*a* – {a, b, c} $\left(\frac{c}{2}2\cdot\frac{b}{2}m:\frac{a}{2}2_{\frac{b}{4}}\right)$, составляющая множество 14), порождает 9×6 + 1×2 = 56 младших групп типа M^3 , 9×1 + 1×1 = 10 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 9×3 + 1×2 = 29 групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Наконец, группа 62*a* – {a, b, c} $\left(\frac{c}{2}4\cdot\frac{b+c}{2}m_{\frac{a}{4}}:2\right)$, составляющая множество 15), порождает 108×6 + 36×3 = 756 младших групп типа M^3, 108×1 + 36×1 = 144 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 108×3 + 36×2 = 396 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

6. Просуммировав имеющиеся в п.5 по семействам числовые результаты новых асимморфных групп рассмотренных частных случаев *P*-симметрии, порождаемых 59 асимморфными пространственными группами симметрии, каждая из которых содержит в системе своих образующих элементов три или большее число преобразований симметрии, которые можно заменить одновременно на соответствующие преобразования антисимметрии, среди которых обязательно должно быть три независимых рода, можно убедиться, что среди них имеется 32522 группы типа M^3, 5741 младшая группа $(22\underline{1})$-симметрии и 16581 младшая группа $(2\underline{2}1')$-симметрии. При этом заметим, что среди 32522 младших групп трехкратной антисимметрии типа M^3 неизоморфных между ними только 59. Столько же неизоморфных между собой групп и среди 5741 младшей $(22\underline{1})$-симметрии и 16581 младшей $(2\underline{2}1')$-симметрии. Это утверждение исходит из того, что в каждом семействе новых групп все младшие группы при любой *P*-симметрии изоморфны своей порождающей группе [2]. Но отмеченные нами младшие асимморфные группы трёх независимых родов преобразований антисимметрии, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии, порождаются 59 неизоморфными пространственными группами G_3 .

В заключение отметим, что этой работой мы завершаем задачу вывода младших пространственных групп антисимметрии трех независимых родов, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии, порождаемых пространственными федоровскими группами G_3, начатую в [3] и продолженную в [4].

Литература:

1. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Теория дискрентных групп симметрии. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1977. - 100 с.
2. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинев: Штиинца, 1976. - 283 с.
3. Палистрант Александр, Шенешеуцкая Алла. Младшие симморфные пространственные группы трёх независимых родов преобразований антисимметрии, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии // Analele ştiinţifice ale Universităţii de Stat din Moldova: Seria "Ştiinţe fizico-matematice."- Chişinău, 2006, p.102-108.
4. Палистрант Александр, Шенешеуцкая Алла. Младшие гемисимморфные пространственные группы трёх независимых родов преобразований антисимметрии, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии // Revista Ştiinţifică STUDIA UNIVERSITATIS. Seria "Ştiinţe exacte şi economice (Matematică, Informatică, Economie)". Nr.8. Universitatea de Stat din Moldova. - Chişinău, 2007, p.22-31.
5. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Трехмерные точечные группы гиперкристаллографических *P*-симметрий и некоторые их приложения // Кристаллография. - 1999. - Т.44. - №6. - С.976-979.
6. Шубников А.В. Тридцать две кристаллографические группы, содержащие только повороты и антиповороты // Кристаллография. - 1965. - Т.10. - Вып. 6. - С.775-778.
7. Яблан С.В. Обобщенные пространственные шубниковские группы // Publications de *l'* Inst. Mathematique. Nouvelle serie. - 1986. - Т.40 (54). - Р.33-48.

Prezentat la 04.03.2008