STRUCTURA GENERALĂ A GRUPURILOR DISCRETE PSEUDOMINORE DE W_q-SIMETRIE

Marina BRANIŞTE, Alexandru LUNGU

Catedra Algebră şi Geometrie

In the present paper there are studied some properties of pseudo-minor groups of W_q-symmetry, are analyzed the necessary and sufficient conditions for a certain group of a generalized symmetry in order to be pseudo-minor, are described in general its subgroups.

1. Cercetarea structurii generale şi a proprietăţilor grupurilor pseudominore de W_q-simetrie este mai complexă şi mai dificilă decât problema analogică pentru grupurile pseudominore de $\overline{P}$-simetrie sau de W_p-simetrie, cu atât mai mult – decât a unora din celelalte tipuri de grupuri chiar de W_q-simetrie.

Scopul studiului efectuat este, în primul rând, de a determina condiţiile necesare şi suficiente ca un grup oarecare de o simetrie generalizată să fie pseudominor de W_q-simetrie cu grupul generator dat, grupul iniţial de substituţii dat şi cu nucleul concret al omomorfismului însoţitor; în al doilea rând, de a evidenţia şi a descrie diferite tipuri de subgrupuri ale lor din punctul de vedere al nivelului de generalizare a simetriei clasice şi de a propune un simbol pentru aceste grupuri, în dependenţă de structura lor generală, care ar include în sine informaţia despre structura lor generală.

2. Vom aminti mai întâi, succint, unele aspecte ale teoriei generale a grupurilor discrete de W_q-simetrie [1-4]. Fie M_1 un punct de poziţie generală al figurii geometrice F cu grupul de simetrie G. Acţionând cu grupul G asupra punctului M_1 se obţine un sistem de puncte G-echivalente, adică $g_k(M_1) = M_k \in F$, unde $g_k \in G$. Se dă mulţimea ordonată $N = \{1, 2, ..., m\}$ de „indici", care reprezintă m mărimi orientate de aceeaşi natură generală (de exemplu, vectori cu acelaşi modul, dar direcţii diferite ş.a.). Fixăm grupul tranzitiv de substituţii P al acestor „indici".

Construim produsul Cartezian W al cópiilor izomorfe cu P, indexate sus în dreapta cu elementele grupului G, adică $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times ... \times P^{g_n} \times ...$. Prin urmare, W reprezintă un grup cu înmulţirea elementelor pe componente. Pentru fiecare element $g \in G$ definim aplicaţia $\bar{g}$ a grupului W pe sine după regula $\bar{g}: w \to w^g$, unde $w^g(g_i) = w(gg_i)$ pentru toţi $g_i \in G$ şi $w \in W$, iar prin simbolul $w(g_i)$ notăm „componenta g_i" în w. Altfel spus, $\bar{g}$ reprezintă g-deplasarea la stânga a componentelor în w, adică $\bar{g}: w \mapsto w^g, w = \langle p^{g_1}, p^{g_2}, ... \rangle$, iar $w^g = \langle p^{gg_1}, p^{gg_2}, ... \rangle$. Se cunoaşte că aplicaţia $\bar{g}$ este automorfism al grupului W, iar aplicaţia φ a grupului G în grupul $AutW$, ce pune în corespondenţă fiecărui g din G automorfismul $\bar{g}$, reprezintă un izomorfism [5,6]. De asemenea, construim omomorfismul τ al grupului G pe subgrupul Φ din grupul $AutW$ al tuturor automorfismelor lui W cu nucleul $Ker\tau = H_1$, unde $\tau(g) = \bar{\tau}_g$ şi $\bar{\tau}_g(w) = gwg^{-1}$. Mulţimea A a tuturor perechilor wg, unde $w \in W$ şi $g \in G$, cu operaţia

$$w_i g_i * w_j g_j = w_k g_k,$$

unde $w_k = w_i^{g_i} \bar{\tau}_{g_i}(w_j)$, iar $g_k = g_i g_j$ formează un grup, numit ***împletire standard carteziană încrucişată*** a grupului pasiv P cu grupul activ G, însoţit de deplasarea la stânga directă şi omomorfismul τ al conjugării de dreapta. Se notează împletirea standard carteziană încrucişată cu simbolul $P\bar{\bar{\iota}}_{\tau H_1(\Phi)}\bar{G}$, unde $H_1 = Ker\tau$, iar $\Phi = \operatorname{Im}\tau = \tau(G) < AutW$.

Fiecărui punct al figurii F i se atribuie cel puţin unul din „indicii" mulţimii N. În rezultat, se obţine figura „indexată" $F^{(N)}$. Se numeşte transformare de W_q-simetrie aşa o aplicaţie izometrică $g^{(w)} = wg$ a figurii „indexate" $F^{(N)}$ pe sine, în care componenta geometrică g (transformarea de simetrie) acționează şi asupra punctelor $M_k = g_k(M_1)$ ale figurii F şi asupra indicilor atribuiți lor după o lege dinainte dată, ce nu depinde de poziția punctelor, iar substituția p^{g_k} („componenta - g_k" în w) reprezintă o substituție suplimentară a indicilor în punctul M_k, astfel încât figura $F^{(N)}$ să se aplice pe sine.

Totalitatea $G^{(W_q)}$ a tuturor transformărilor de W_q-simetrie ale oricărei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează un grup cu operația:

$$g_i^{(w_i)} \cdot g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)},$$

unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} \overline{\tau}_{g_i}\left(w_j\right)$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\overline{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$. Vom numi $G^{(W_q)}$ grup de W_q-simetrie a figurii „indexate" $F^{(N)}$.

Fie $G^{(W_q)}$ – grup de W_q-simetrie. Notăm prin W' totalitatea tuturor w ce intră ca componente în transformările $g^{(w)}$ din $G^{(W_q)}$. Mulțimea W', în caz general, poate să nu fie grup, dar ea verifică condiția $w_0 \subseteq W' \subseteq W$, unde w_0 este unitatea grupului W. Vom numi $G^{(W_q)}$ grup de W_q-simetrie completă sau incompletă, dacă $W' = W$ sau $w_0 \subset W' \subset W$. Grupul G se numeşte *generator* pentru $G^{(W_q)}$ ($G^{(W_q)} = G$, dacă $W' = w_0$), totalitatea tuturor grupurilor de W_q-simetrie cu acelaşi grup generator se numeşte *familie de grupuri*, iar mulțimea grupurilor din aceeaşi familie, care au acelaşi nucleu al omomorfismului însoțitor, se numeşte *subfamilie*.

Toate grupurile $G^{(W_q)}$ de careva W_q-simetrie concretă ale familiei cu grupul generator G, acelaşi nucleu $Ker\tau = H_1$ al omomorfismului însoțitor şi grupul $W = \overline{\overline{\Pi}}_{g_i \in G} P^{g_i}$ al „substituțiilor" suplimentare reprezintă subgrupuri ale împletirii standard încrucişate a grupului de substituții P cu grupul de operatori G, însoțită de deplasarea directă la stânga şi omomorfismul τ de conjugare spre dreapta: $G^{(W_q)} \leq P \overline{\overline{\iota}}_{\tau H_1(\Phi)} \overline{\overline{G}}$.

Fie $G^{(W_q)}$ – grup de W_q-simetrie completă. Uşor se verifică că $H = G^{(W_q)} \bigcap G$ este subgrup de simetrie al grupului $G^{(W_q)}$, iar $V = G^{(W_q)} \bigcap W$ reprezintă subgrupul transformărilor W-identice. Grupul $G^{(W_q)}$ se numeşte major, minor sau mijlociu, dacă, respectiv, $V = W$, $V = w_0$ sau $w_0 < V < W$.

Fie $G^{(W_q)}$ – grup de W_q-simetrie incompletă cu totalitatea de substituții ale indicilor W' ($w_0 \subset W' \subset W$) şi cu grupul generator G. Este evident că $G^{(W_q)} \bigcap W' = G^{(W_q)} \bigcap W = V$. Dacă W' este subgrup al grupului W, atunci grupul $G^{(W_q)}$ se numeşte semimajor (W'-semimajor), semiminor (W'-semiminor) sau semimijlociu ($\left(W',V\right)$-semimijlociu) corespunzător cazurilor când $V = W'$, $w_0 = V < W'$ sau $w_0 < V < W'$. Dacă W' nu este grup ($w_0 \subset W' \subset W$), atunci nu este posibil cazul $V = W'$, deoarece V este subgrup în W. Grupul $G^{(W_q)}$ se numeşte grup pseudominor (W'-pseudominor) sau pseudomijlociu ($\left(W',V\right)$-pseudomijlociu), dacă $V = w_0$ sau, respectiv, $w_0 < V \subset W'$, unde W' nu este subgrup în W.

Dacă subgrupul V de transformări W-identice ale grupului $G^{(W_q)}$ este unitar, atunci omomorfismul φ cu nucleul V al grupului $G^{(W_q)}$ pe grupul său generator G, conform regulii $\varphi(g^{(w)}) = g$, este pur şi simplu un izomorfism. Drept consecință, grupurile minore, semiminore şi pseudominore de W_q-simetrie sunt izomorfe cu grupurile lor generatoare.

Pentru a obține o generalizare netrivială a simetriei clasice, trebuie ca grupul respectiv de substituții P să verifice condiția $\left|P\right| \geq 2$. În consecință, $\left|W\right| = \left|P^G\right| \geq 2^{|G|} > \left|G\right|$. Grupurile minore de W_q-simetrie, dacă ele există, trebuie să verifice condiția $|W| \le |G|$. Ultima relație e incompatibilă cu cerința $|W| > |G|$. Deci, grupuri minore de W_q-simetrie pur şi simplu nu există.

3. În acest subpunct vom analiza unele proprietăți pe care le verifică grupurile W'-pseudominore şi vom evidenția un criteriu al grupurilor de acest tip, apoi vom descrie subgrupurile lor din punctul de vedere al generalizărilor simetriei clasice.

Teorema 1. Pentru ca $G^{(W_q)}$ să fie grup W'-pseudominor de W_q-simetrie cu grupul generator G, grupul inițial de substituții P şi nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau : G \to AutW$, este necesar şi suficient:

1) $G^{(W_q)}$ să fie subgrup al grupului major $\overset{\square}{G}{}^{(W_q)}$ al aceleiaşi familii şi al aceleiaşi subfamilii, adică

$$G^{(W_q)} < \overset{\square}{G}{}^{(W_q)} = P\bar{\bar{\iota}}_{\tau H_1(\Phi)}G = \left[P, H_1, \bar{\Phi}, G\right];$$

2) în $G^{(W_q)}$ să fie valabilă regula de înmulțire a elementelor

$$g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}, \tag{1}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} \bar{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_s) = w_i(g_j g_s)$, iar $\bar{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$.

3) $G^{(W_q)}$ constă din aşa transformări $g^{(w)} = wg$, ale căror componente w şi g să formeze submulțimea cu unitate W' a grupului $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times \ldots \times P^{g_n} \times \ldots$ (care, însă, nu este subgrup în W) şi, respectiv, grupul generator G: $w_0 \subset W' = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G^{(W_q)} \right\} \subset W$ şi $G = \left\{ g \middle| g^{(w)} \in G^{(W_q)} \right\}$;

4) aplicația φ a grupului $G^{(W_q)}$ pe grupul G, conform regulii $\varphi\left[g^{(w)}\right] = g$, să fie izomorfă.

Demonstrație: Necesitatea este evidentă, deoarece nemijlocit şi simplu se controlează că orice grup W'-pseudominor de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$ cu grupul generator G, grupul inițial de substituții P şi nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau : G \to AutW$ verifică condițiile 1)-4). Aceste condiții sunt şi suficiente pentru ca grupul $G^{(W_q)}$ să fie grup W'-pseudominor de W_q-simetrie. Într-adevăr, din condițiile 1) şi 2) rezultă că $G^{(W_q)}$ este grup de W_q-simetrie. Din condiția 3) urmează că $G^{(W_q)}$ este grup de W_q-simetrie incompletă, ce are grupul generator G şi totalitatea „substituțiilor" suplimentare W', care verifică condiția $w_0 \subset W' \subset W$.

Din 1)-3) rezultă că grupul $G^{(W_q)}$ este grup din subfamilia cu nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau : G \to AutW$ al conjugării de dreapta. Deoarece $V = G^{(W_q)} \bigcap W' = G^{(W_q)} \bigcap W$ reprezintă nucleul omomorfismului φ al grupului $G^{(W_q)}$ pe G după legea $\varphi\left[g^{(w)}\right] = g$, atunci din 4) rezultă că $V = w_0$. Prin urmare, $G^{(W_q)}$ este grup W'-pseudominor de W_q-simetrie. Teorema este demonstrată.

Teoremă 2. În orice grup W'-pseudominor de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$ cu grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau : G \to AutW$ şi subgrupul de simetrie H se conține în calitate de subgrup un grup de W_p-simetrie [7-9] $H_1^{(W_p)}$ al familiei cu grupul generator H_1 şi subgrupul de simetrie H', unde $H' = H_1 \bigcap H$.

Demonstrație: Fie $G^{(W_q)}$ este grup W'-pseudominor de W_q-simetrie, cu grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau : G \to AutW$ şi subgrupul de simetrie H.

Atunci, pentru regula (1) de înmulțire a elementelor din grupul $G^{(W_q)}$ se evidențiază două cazuri (în funcție de acțiunea automorfismului $\bar{\tau}_{g_i}$):

$$\bar{\tau}_{g_i}(w_j) = w_j, \tag{1a}$$

pentru toate elementele $w_j \in W$, unde $g_i \in H_1$;

$$\bar{\tau}_{g_i}(w_j) \neq w_j, \tag{1b}$$

pentru careva elemente $w_j \in W$, unde $g_i \in G \setminus H_1$.

Cazul (1a) reprezintă legea de înmulțire

$$w_i g_i \circ w_j g_j = w_k g_k, \tag{2}$$

unde $w_k = w_i^{g_j} w_j$, iar $g_k = g_i g_j$, deoarece toate automorfismele $\bar{\tau}_{g_i}$ pentru $g_i \in H_1$ coincid cu automorfismul identic al grupului W. Totalitatea tuturor transformărilor $g^{(w)}$ din $G^{(W_q)}$, pentru care $g \in H_1$, formează grupul $H_1^{(W_p)}$ cu operația (2), iar totalitatea substituțiilor indicilor, în calitate de componente ale transformărilor $g^{(w)}$ din $H_1^{(W_p)}$, formează submulțimea cu unitate $W_1 = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in H_1^{(W_p)} \right\}$ a grupului W, care se include şi în W': $w_0 \subset W_1 \subset W' \subset W$. Din faptul că unitatea 1 a grupului G ($1 \in H_1$) se combină în pereche numai cu elementul w_0 din W (deoarece $V = G^{(W_q)} \bigcap W = G^{(W_q)} \bigcap W' = w_0$), urmează că $H_1^{(W_p)} \bigcap W_1 = w_0$. Evident, subgrupul de simetrie H' al grupului $H_1^{(W_p)}$ coincide cu intersecția grupului generator H_1 al grupului $H_1^{(W_p)}$ şi a subgrupului de simetrie H al grupului $G^{(W_q)}$, adică $H' = H_1 \bigcap H$. Teorema este demonstrată.

Remarca 1: Grupul $H_1^{(W_p)}$ poate fi pur şi simplu generator (adică $H_1^{(W_p)} = w_0 \times H_1$), semiminor (dacă W_1 este subgrup în W) sau pseudominor (dacă W_1 nu este subgrup în W).

Teorema 3. În orice grup W'-pseudominor de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$, cu grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau : G \rightarrow AutW$ şi subgrupul de simetrie H se conține, în calitate de subgrup, grupul $G_1^{(W'')}$ de $\bar{P}$-simetrie [10-12] cu grupul generator G_1, acelaşi nucleu H_1 al omomorfismului însoțitor τ şi cu totalitatea $W'' = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G_1^{(W'')} \right\}$ de „substituții” suplimentare, unde $G_1 \leq G$, iar $W'' = W' \bigcap DiagW$.

Demonstrație: Fie $G^{(W_q)}$ – grup de W_q-simetrie, cu grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau : G \rightarrow AutW$ şi cu totalitatea „substituțiilor” suplimentare multicomponente W'. Atunci, pentru operația (1), în funcție de rezultatul acțiunii automorfismului g_j-deplasării la stânga a componentelor în w, se disting două cazuri:

$$w_i^{g_j} = w_i, \tag{1c}$$

pentru toate elementele $w_i \in DiagW$, unde $g_j \in G$;

$$w_i^{g_j} \neq w_i, \tag{1d}$$

pentru careva elemente $w_i \in W \setminus DiagW$, unde $g_j \in G$.

Cazul (1c) reprezintă legea de înmulțire

$$w_i g_i \cdot w_j g_j = w_k g_k, \tag{3}$$

unde $w_k = w_i \bar{\tau}_{g_i}(w_j)$, iar $g_k = g_i g_j$, deoarece toate automorfismele $\bar{g}_j$, care realizează g_j-deplasările directe la stânga ale componentelor în fiecare element w_i din grupul $DiagW$, *de facto* aplică w_i pe sine.

Este evident că totalitatea tuturor transformărilor $g^{(w)}$ din $G^{(W_q)}$, pentru care $w \in DiagW$, formează grupul $G_1^{(W'')}$ cu operația (3), iar totalitatea „substituțiilor” suplimentare multicomponente ale indicilor în calitate de componente în transformările $g^{(w)} \in G_1^{(W'')}$ formează submulțimea $W'' = W' \bigcap DiagW$. Grupul $G_1^{(W'')}$ formal nu se deosebeşte de grupurile de $\bar{P}$-simetrie (unde $P \cong DiagW$) cu grupul generator G_1 şi nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor. Teorema este demonstrată.

Remarca 2: Grupul $G_1^{(W'')}$ poate fi minor (dacă $W'' \cong P$, adică dacă $W'' = DiagW \subset W'$), semiminor (dacă $W'' < DiagW$ şi $W'' \subset W'$), pseudominor (dacă $W'' \subset W'$, dar W'' nu-i subgrup în $DiagW$) sau pur şi simplu generator (dacă $W'' = w_0$, adică $G_1^{(W'')} = w_0 \times G_1$).

Pentru prezentarea grupurilor pseudominore $G^{(W_q)}$ de W_q-simetrie este comod de utilizat următorul simbol complex (cu mai mulţi termeni):

$$[P, H_1, \bar{\Phi}, G]/(W' \,|\, W_p \,|\, W''; H_1 \,|\, H', G_1 \,|\, H_1 \,|\, H'')H,$$

care conţine suficientă informaţie despre structura grupului:

1) $\left[P, H_1, \bar{\Phi}, G\right]$ este simbolul grupului major al subfamiliei cu grupul generator G şi nucleul H_1 al omomorfismului însoţitor $\tau : G \to AutW$, $\bar{\Phi} = \operatorname{Im}\tau$, iar P este grupul iniţial de substituţii;

2) W' este mulţimea „substituţiilor" suplimentare multicomponente ce intră în calitate de componente în $g^{(w)} \in G^{(W_q)}$, unde $w_0 \subset W' \subset W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ şi W' nu este un subgrup în W;

3) W_p este mulţimea „substituţiilor" suplimentare multicomponente ce intră în calitate de componente în elementele $g^{(w)}$ ale grupului $H_1^{(W_p)}$ de W_p-simetrie, care se include în grupul $G^{(W_q)}$ în calitate de subgrup;

4) W'' este mulţimea „substituţiilor" suplimentare multicomponente ce intră în calitate de componente în elementele $g^{(w)}$ ale grupului $G_1^{(W'')}$ de $\bar{P}$-simetrie, care se include în grupul $G^{(W_q)}$ în calitate de subgrup;

5) H_1 este grup generator, iar H' – subgrupul de simetrie al grupului $H_1^{(W_p)}$ de W_p-simetrie, unde $H' = H_1 \bigcap H$;

6) G_1 este grup generator, H_1 – nucleul omomorfismului însoţitor, iar H'' – subgrupul de simetrie al grupului $G_1^{(W'')}$ de $\bar{P}$-simetrie, unde $G_1 \le G$, $H'' = H \bigcap G_1$;

7) H este subgrupul de simetrie pentru grupul $G^{(W_q)}$ ($H = G^{(W_q)} \bigcap G$).

Referinţe:

1. Лунгу А.П., Основы общей теории W_q-симметрии // Известия АН Республики Молдова. Математика, 1996, №3 (22), с.94-100.
2. Лунгу А.П. К теории групп W_q-симметрии // Известия АН Республики Молдова. Математика, 1997, №2 (24), с.77-86.
3. Lungu A. Grupuri de W_q-simetrie // Anale Ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe fizico-matematice". - Chişinău, 1998, p.11-17.
4. Lungu A. Discrete groups of W_q-symmetry // Proceedings of the 2nd International Conference on Symmetry and Antisymmetry in Mathematics, Formal Languages and Computer Science, Satelite Conference of 3ECM, Brasov, 2000 Romania, p.175-184.
5. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - Москва: Наука, 1977.
6. Курош А.Г. Теория групп. - Москва: Наука, 1967.
7. Копцик В.А., Коцев И.Н. К теории и классификации групп цветной симметрии. II. W-симметрия // Сообщения ОИЯИ. Р4-8068. - Дубна, 1974.
8. Лунгу А.П. К классификации групп W-симметрии // Исследования по современной алгебре и геометрии. - Кишинёв: Штиинца, 1983, с.79-84.
9. Lungu A. The recent generalizations of colored symmetry // Visual mathematics. Art and Science Electronic Journal of ISIS – Symmetry, vol.2, 2000, no.2 (versiunea electronică: http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/lungu/index.html).
10. Лунгу А.П. К теории $\bar{P}$ – симметрии // Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 мая 1978 г., №1709-78 Деп.
11. Лунгу А.П. К выводу групп Q-симметрии ($\bar{P}$-симметрии) // Кристаллография, 1980, т.25, №5, с.1051-1053.
12. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С, Лунгу А.П. и Палистрант А.Ф. Р-симметрия и ее дальнейшее развитие. - Кишинев: Штиинца, 1986.

Prezentat la 18.05.2010