STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2010, nr.7(37)

UNELE ASPECTE ALE TEORIEI GENERALE A GRUPURILOR DISCRETE PSEUDOMINORE DE W_q-SIMETRIE

Alexandru LUNGU, Marina BRANIŞTE

Catedra Algebră şi Geometrie

In the present paper there are formulated and analyzed the necessary and sufficient conditions to describe the concrete structure every pseudo-minor group of W_q-symmetry, inferred from generating group G and initial defining group of permutation P.

1. Scopul studiului efectuat este: în primul rând, de a determina condițiile necesare şi etapele ce urmează a fi efectuate pentru a deduce toate grupurile pseudominore de W_q-simetrie din grupul dat de simetrie clasică G în calitate de grup generator, grupul tranzitiv inițial dat de substituții P pe o mulțime de „indici"-calități orientate şi cu nucleul concret al omomorfismului însoțitor; în al doilea rînd, de a analiza structura concretă a grupurilor pseudominore deduse conform metodei elaborate.

2. Întâi de toate, vom aminti, telegrafic, unele momente ale bazelor teoriei generale a grupurilor discrete de W_q-simetrie [1]. Fie M_1 un punct de poziție generală al figurii geometrice F cu grupul de simetrie G. Acționând cu grupul G asupra punctului M_1 se obțin punctele G-echivalente, adică $g_k(M_1)=M_k\in F$, unde $g_k\in G$. Se dă mulțimea ordonată $N=\{1,2,...,m\}$ de „indici", care reprezintă m mărimi orientate de aceeaşi natură generală (de exemplu, vectori cu acelaşi modul, dar cu direcții diferite). Se fixează grupul tranzitiv de substituții P al acestor „indici", apoi se construieşte produsul cartezian W al copiilor izomorfe cu P, indexate sus în dreapta cu elementele grupului G. Pentru fiecare element $g\in G$ se defineşte aplicația $\bar{g}$ a grupului W pe sine după regula $\bar{g}:w\to w^g$, unde $w^g(g_i)=w(gg_i)$ pentru toți $g_i\in G$ şi $w\in W$, iar prin simbolul $w(g_i)$ se notează „componenta g_i" în w. Cu alte cuvinte, $\bar{g}$ reprezintă g-deplasarea la stânga a componentelor în w, adică $\bar{g}:w\mapsto w^g, w=\left\langle p^{g_1},p^{g_2},...\right\rangle$, iar $w^g=\left\langle p^{gg_1},p^{gg_2},...\right\rangle$. Se cunoaşte că aplicația $\bar{g}$ este automorfism al grupului W, iar aplicația φ a grupului G în grupul $AutW$ al tuturor automorfismelor lui W, ce pune în corespondență fiecărui g din G automorfismul $\bar{g}$, reprezintă un izomorfism [2,3]. De asemenea, se construieşte omomorfismul τ al grupului G pe subgrupul Φ din grupul $AutW$ cu nucleul $Ker\tau=H_1$, unde $\tau(g)=\bar{\tau}_g$ şi $\bar{\tau}_g(w)=gwg^{-1}$. Mulțimea A a tuturor perechilor wg, unde $w\in W$ şi $g\in G$, formează un grup cu operația $w_ig_i*w_jg_j=w_kg_k$, unde $w_k=w_i^{g_i}\bar{\tau}_{g_i}\left(w_j\right)$, iar $g_k=g_ig_j$, numit împletire standard carteziană încrucişată a grupului P cu grupul G, însoțit de deplasarea la stânga directă şi omomorfismul τ al conjugării de dreapta, adică $A=P\bar{\bar{\iota}}_{\tau H(\Phi)}\bar{G}$.

Fiecărui punct al figurii F i se atribuie cel puțin unul din „indicii" mulțimii N. În rezultat se obține figura „indexată" $F^{(N)}$. Se numeşte transformare de W_q-simetrie aşa o aplicație izometrică $g^{(w)}=wg$ a figurii „indexate" $F^{(N)}$ pe sine, în care componenta geometrică g (transformarea de simetrie) acționează şi asupra punctelor $M_k=g_k(M_1)$ ale figurii F şi asupra indicilor atribuiți lor după o lege dinainte dată, ce nu depinde de poziția punctelor, iar substituția p^{g_k} („componenta - g_k" în w) reprezintă o substituție suplimentară a indicilor în punctul M_k, astfel încât figura $F^{(N)}$ să se aplice pe sine.

Totalitatea $G^{(W_q)}$ tuturor transformărilor de W_q-simetrie ale oricărei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează un grup cu operația: $g_i^{(w_i)} \cdot g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} \bar{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\bar{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$. $G^{(W_q)}$ se numeşte grup de W_q-simetrie al figurii „indexate" $F^{(N)}$.

Fie $G^{(W_q)}$ un grup de W_q-simetrie. Notăm prin W' totalitatea tuturor w ce intră ca componente în transformările $g^{(w)}$ din $G^{(W_q)}$. Mulțimea W', în caz general, poate să nu fie grup, dar ea verifică condiția $w_0 \subseteq W' \subseteq W$, unde w_0 este unitatea grupului W. Grupul $G^{(W_q)}$ este de W_q-simetrie completă sau incompletă, dacă $W' = W$ sau $w_0 \subset W' \subset W$. Grupul G se numeşte generator pentru $G^{(W_q)}$ ($G^{(W_q)} = G$, dacă $W' = w_0$), totalitatea tuturor grupurilor de W_q-simetrie cu acelaşi grup generator se numeşte *familie de grupuri*, iar mulțimea grupurilor din aceeaşi familie, care au acelaşi nucleu al omomorfismului însoțitor, se numeşte *subfamilie*.

Toate grupurile $G^{(W_q)}$ de W_q-simetrie concretă ale familiei cu grupul generator G, acelaşi nucleu $Ker\tau = H_1$ al omomorfismului însoțitor şi grupul $W = \overline{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$ al „substituțiilor" multicomponente suplimentare reprezintă subgrupuri ale împletirii standard încrucişate a grupului de substituții P cu grupul de operatori G, însoțită de deplasarea directă la stânga şi omomorfismul τ de conjugare spre dreapta: $G^{(W_q)} \le P \bar{\bar{\iota}}_{\tau H_1(\Phi)} \bar{G}$.

Dacă grupul $G^{(W_q)}$ este de W_q-simetrie completă, atunci $H = G^{(W_q)} \cap G$ este subgrupul de simetrie, iar $V = G^{(W_q)} \cap W$ este subgrupul transformărilor W-identice. Grupul $G^{(W_q)}$ se numeşte *major*, *minor* sau *mijlociu*, dacă, respectiv, $V = W$, $V = w_0$ sau $w_0 < V < W$. Dacă grupul $G^{(W_q)}$ este de W_q-simetrie incompletă cu totalitatea de substituții ale indicilor W' ($w_0 \subset W' \subset W$), atunci $G^{(W_q)} \cap W' = G^{(W_q)} \cap W = V$. Grupul $G^{(W_q)}$ se numeşte *semimajor* (W'-semimajor), *semiminor* (W'-semiminor) sau *semimijlociu* ((W', V)-semimijlociu) corespunzător cazurilor când $V = W'$, $w_0 = V < W'$ sau $w_0 < V < W'$. Dacă W' nu este subgrup ($w_0 \subset W' \subset W$), atunci grupul $G^{(W_q)}$ se numeşte W'*-pseudominor* sau (W', V)*-pseudomijlociu*, dacă $V = w_0$ sau, respectiv, $w_0 < V \subset W'$.

În cazurile cînd subgrupul V de transformări W-identice ale grupului $G^{(W_q)}$ este unitar, omomorfismul φ cu nucleul V al grupului $G^{(W_q)}$ pe grupul său generator G conform regulii $\varphi(g^{(w)}) = g$ este pur şi simplu un izomorfism. Drept consecință, grupurile minore, semiminore şi pseudominore de W_q-simetrie sunt izomorfe cu grupurile lor generatoare.

Pentru a obține o generalizare netrivială a simetriei clasice trebuie ca grupul respectiv de substituții P să verifice condiția $|P| \ge 2$. În consecință, $|W| = |P^G| \ge 2^{|G|} > |G|$. Grupurile minore de W_q-simetrie, dacă ele ar exista, trebuie să verifice condiția $|W| \le |G|$. Ultima relație e incompatibilă cu cerința $|W| > |G|$. Deci, grupuri minore de W_q-simetrie pur şi simplu nu există.

3. În acest subpunct vom comenta pe scurt proprietățile aplicațiilor cvasiomomorfe [4-6] cu ajutorul cărora au fost formulate şi fundamentate metode de deducere a grupurilor minore, semiminore şi pseudominore de $\bar{P}$-simetrie [7,8], a grupurilor semiminore şi pseudominore de W_p-simetrie [9,10] şi a grupurillor semiminore de W_q-simetrie [11] din grupurile de definire fixate inițial P şi grupurile generatoare G. De asemenea, vom comenta, telegrafic, structura generală a grupurilor discrete pseudominore de W_q-simetrie [12] din punctul de vedere al generalizărilor simetriei clasice.

Fie sunt date grupurile G şi P şi omomorfismul $\varphi : G \to \Phi \le AutP$, cu nucleul $Ker\varphi = H$, unde $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g$ şi $\bar{\varphi}_g(p) = g^{-1}pg$. Aplicația μ a grupului G în grupul P (adică pe o submulțime P' a grupului P), după legea $\mu(g) = p$, se numeşte cvasiomomorfism de stânga, dacă pentru orice g_1 şi $g_2 \in G$, din faptul că $\mu(g_1) = p_1$ şi $\mu(g_2) = p_2$ rezultă că $\mu(g_1 g_2) = \bar{\varphi}_{g_2}(p_1)p_2 = p_3$, unde $p_1, p_2, p_3 \in P'$, iar $\bar{\varphi}_{g_2} = \varphi(g_2)$ – automorfismul grupului P, corespunzător elementului $g_2 \in G$ după omomorfismul φ. Vom spune că φ este omomorfismul însoțitor al aplicației μ. Dacă nucleul $Ker\varphi = 1$, atunci μ se numeşte cvasiomomorfism de stânga natural. Cvasiomomorfismul μ al grupului G pe submulțimea W' din grupul $W = \overline{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$ se numeşte cvasiomomorfism de stânga natural direct, dacă automorfismul $\bar{\varphi}_g = \bar{g}$ acționează asupra elementelor w din $\mu(G)$ prin intermediul g-deplasărilor la stânga a componentelor, adică $\bar{g}(w) = \bar{g}(< p^{g_1}, p^{g_2}, ..., p^{g_k}, ... >) =< p^{gg_1}, p^{gg_2}, ..., p^{gg_k}, ... >= w^g$.

Pentru ca aplicația μ a grupului G pe submulțimea W' din $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times ...$ şă fie un cvasiomomorfism de stânga natural direct, este necesar şi suficient ca $w_i^{g_j} w_j = \bar{g}_j(w_i)w_j = w_k \in W'$ pentru orice g_j, $g_i \in G$, $w_i, w_j \in W'$ şi $\mu(g_j) = w_j$.

Fie sunt date grupurile G, P şi $W = \overline{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$), aplicația izomorfă $\varphi : G \to AutW$ după regula $\varphi(g) = \bar{g}$, unde automorfismul $\bar{g}$ acționează asupra elementelor w prin intermediul g-deplasărilor de stânga a componentelor lor şi, de asemenea, omomorfismul $\tau : G \to \Phi \le AutW$ cu nucleul $Ker\tau = H$, unde $\tau(g) = \bar{\tau}_g$ şi $\bar{\tau}_g(w) = gwg^{-1}$.

Aplicația ψ a grupului G pe submulțimea W' a grupului W după legea $\psi(g) = w$ se numeşte cvasiomomorfism de dreapta, însoțit de omomorfismul τ al conjugării de dreapta, dacă pentru orice g_i şi g_j, ce aparțin grupului G, din faptul că $\psi(g_i) = w_i$ şi $\psi(g_j) = w_j$ urmează că $\psi(g_i g_j) = w_i \bar{\tau}_{g_i}(w_j) = w_k$, unde $w_i, w_j, w_k \in W'$.

Aplicația α a grupului G pe submulțimea W' a grupului W, după legea $\alpha(g) = w$, se numeşte cvasiomomorfism încrucişat, însoțit de deplasarea la stânga directă a componentelor şi omomorfismul τ al conjugării de dreapta, dacă pentru orice g_i şi g_j, ce aparțin grupului G, din faptul că $\alpha(g_i) = w_i$ şi $\alpha(g_j) = w_j$ urmează că $\alpha(g_i g_j) = w_i^{g_j} \bar{\tau}_{g_i}(w_j) = w_k$, unde $w_i, w_j, w_k \in W'$, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$, iar $\bar{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$.

Observăm că pentru toți $\bar{\tau}_g = \vec{1}$ (unde $\vec{1}$ este automorfismul identic al grupului W şi $g \in G$) cvasiomomorfismul încrucişat α degenerează în cvasiomomorfism de stânga. Dacă $w^g = w$ (pentru toți $g \in G$ şi $w \in \alpha(G)$), atunci cvasiomomorfismul încrucişat α degenerează în cvasiomomorfism de dreapta, însoțit de omomorfismul τ. Menționăm că orice automorfism $\bar{g}$ din grupul $\bar{G} = \varphi(G)$, unde φ este o includere izomorfă a grupului G în grupul $AutW$, aplică identic orice element w din subgrupul $DiagW$. Cu alte cuvinte, restricția automorfismului $\bar{g}$ al grupului W pe subgrupul său $DiagW$ este pur şi simplu aplicație identică.

În continuare vom formula câteva proprietăți ale cvasiomomorfismului încrucişat.

1) La cvasiomomorfismul încrucişat α al grupului G în grupul W imaginea unității din G este unitatea din W.

2) Nucleul cvasiomomorfismului încrucişat α al grupului G în grupul W este un subgrup al grupului G: $Ker\alpha = H' < G$; în caz general H' nu-i divizor normal.

3) Pentru ca la cvasiomomorfismul încrucişat α cu nucleul $Ker\alpha = H'$ al grupului G pe submulţimea W' din W fiecărei clase de resturi de stânga gH' să-i corespundă doar un singur element w din W', e necesar şi suficient ca pentru orice element $h \in H'$ şi $w \in W'$ să se verifice egalitatea $w^h = w$.

4) Dacă nucleul H' al cvasiomomorfismului încrucişat α al grupului G în grupul W este subgrup al nucleului H al omomorfismului însoţitor τ, atunci la aplicaţia α fiecărei clase de resturi de dreapta $H'g$ a grupului G după subgrupul H' i se pune în corespondenţă doar un singur element w din grupul W.

5) Dacă nucleul H' al cvasiomomorfismului încrucişat α al grupului G în grupul W este divizor normal în G ($H' \triangleleft G$) şi se include în nucleul H al omomorfismului însoţitor τ ($H' \le H$), atunci:

a) fiecărei clase de resturi de stânga gH' aplicaţia α îi pune în corespondenţă numai un singur element w din grupul W;

b) pentru orice $h \in H'$ şi $w \in \alpha(G)$ are loc egalitatea $w^h = w$;

c) elementelor $h \in H'$ le corespund, conform omomorfismului τ, numai acele automorfisme $\bar{\tau}_h$, a căror acţiune asupra $\alpha(G)$ coincide cu acţiunea automorfismului identic i al grupului W;

d) tuturor elementelor gh din clasa de resturi fixată gH' le corespund conform omomorfismului însoţitor τ numai acele automorfisme $\bar{\tau}_{gh}$ a căror acţiune asupra lui $\alpha(G)$ este aceeaşi.

6) Dacă grupul G la cvasiomomorfismul încrucişat α se aplică pe submulţimea W' a grupului W, atunci W' nu întotdeauna este grup.

7) Restricţia pe H a cvasiomomorfismului încrucişat α cu nucleul $Ker\alpha = H'$ al grupului G pe submulţimea W' din grupul W, însoţit de deplasarea directă la stânga şi omomorfismul τ al conjugării de dreapta cu nucleul $Ker\tau = H$, este un cvasiomomorfism de stânga natural $(Ker\varphi = 1)$. Mai mult, $\alpha(H) = W^*$ şi $w_0 \subseteq W^* \subseteq W'$.

Teorema 1 [12]. *Pentru ca $G^{(W_q)}$ să fie grup W'-pseudominor de W_q-simetrie cu grupul generator G, grupul iniţial de substituţii P şi nucleul H_1 al omomorfismului însoţitor $\tau: G \to AutW$, este necesar şi suficient: 1) $G^{(W_q)}$ să fie subgrup al grupului major $\square^{(W_q)} = P\bar{\bar{\tau}}_{\tau H_1(\Phi)}\bar{G} = [P, H_1, \vec{\Phi}, \bar{G}]$ al aceleiaşi familii şi aceleiaşi subfamilii, adică $G^{(W_q)} < [P, H_1, \vec{\Phi}, \bar{G}]$; 2) în $G^{(W_q)}$ să fie valabilă regula de înmulţire a elementelor $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j}\bar{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_s) = w_i(g_j g_s)$, iar $\bar{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$; 3) $G^{(W_q)}$ constă din aşa transformări $g^{(w)} = wg$, ale căror componente w şi g să formeze submulţimea cu unitate W' a grupului $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times \ldots \times P^{g_n} \times \ldots$ (care însă nu este subgrup în W) şi, respectiv, grupul generator G: $w_0 \subset W' = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G^{(W_q)} \right\} \subset W$ şi $G = \left\{ g \middle| g^{(w)} \in G^{(W_q)} \right\}$; 4) aplicaţia φ a grupului $G^{(W_q)}$ pe grupul G conform regulii $\varphi\left[g^{(w)} \right] = g$ să fie izomorfă.*

Teoremă 2 [12]. *În orice grup W'-pseudominor de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$ cu grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoţitor $\tau: G \to AutW$ şi subgrupul de simetrie H, se conţine în calitate de subgrup un grup de W_p-simetrie $H_1^{(W_p)}$ al familiei cu grupul generator H_1 şi subgrupul de simetrie H', unde $H' = H_1 \cap H$.*

Remarca 1: Grupul $H_1^{(W_p)}$ poate fi pur şi simplu generator (adică $H_1^{(W_p)} = w_0 \times H_1$), semiminor (dacă $W_1 = \{w \mid g^{(w)} \in H_1^{(W_p)}\}$ este subgrup în W) sau pseudominor (dacă W_1 nu este subgrup în W).

Teorema 3 [12]. *În orice grup W'-pseudominor de W_q-simetrie $G^{(W_q)}$, cu grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoţitor $\tau: G \to AutW$ şi subgrupul de simetrie H, se conţine în calitate de sub-*

grup, grupul $G_1^{(W'')}$ de $\overline{P}$-simetrie cu grupul generator G_1, acelaşi nucleu H_1 al omomorfismului însoțitor τ şi cu totalitatea $W''=\left\{w\middle|g^{(w)}\in G_1^{(W'')}\right\}$ de „substituții” suplimentare, unde $G_1\le G$, iar $W''=W'\bigcap DiagW$.

Remarca 2: Grupul $G_1^{(W'')}$ poate fi minor (dacă $W''\cong P$, adică dacă $W''=DiagW\subset W'$), semiminor (dacă $W''<DiagW$ şi $W''\subset W'$), pseudominor (dacă $W''\subset W'$, dar W'' nu-i subgrup în $DiagW$) sau pur şi simplu generator (dacă $W''=w_0$, adică $G_1^{(W'')}=w_0\times G_1$).

Pentru prezentarea structurii grupurilor pseudominore $G^{(W_q)}$ de W_q-simetrie în [11,12] este propus următorul simbol complex (cu mai mulți termeni): $[P,H_1,\bar{\Phi},\bar{G}]/(W'|W_p|W''; H_1|H', G_1|H_1|H'')H,$ care conține suficientă informație despre structura concretă a grupului.

4. În continuare vom formula şi vom demonstra teorema ce conține condițiile necesare şi sufuciente pentru deducerea completă a grupurilor pseudominore de W_q-simetrie din grupurile lor generatoare G şi grupul inițial de substituții P.

Teorema 4*: Pentru a deduce toate grupurile pseudominore $G^{(W_q)}$ de W_q-simetrie cu grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau: G\to AutW$ şi grupul multicomponent de „substituții” $W=\overline{\Pi}_{g_i\in G}P^{g_i}$, este necesar şi suficient:*

1) *Să se găsească în grupul W orice submulțime cu unitate W' (care nu este subgrup), iar în grupul G aşa subgrupuri H ce au indicele egal cu puterea submulțimii W';*
2) *Să se construiască cvasiomomorfismul încrucişat α al grupului G pe submulțimea W' cu nucleul $Ker\alpha=H$ conform regulii $\alpha(Hg)=w$, a cărui restricție pe subgrupul $H_1=Ker\tau$ este un cvasiomomorfism de stânga natural exact cu nucleul $H'=H_1\cap H$;*
3) *Să se stabilească în calitate de componente ale transformării $g^{(w)}=wg$ elementele din grupul G şi submulțimea W' ce corespund unele altora conform lui α;*
4) *Să se introducă în mulțimea perechilor obținute operația*

$$g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}, \qquad (1)$$

unde $g_k=g_ig_j$, $w_k=w_i^{g_j}\bar{\tau}_{g_i}(w_j)$, $w_i^{g_j}(g_s)=w_i(g_jg_s)$, iar $\bar{\tau}_{g_i}(w_j)=g_iw_jg_i^{-1}$.

Demonstrația necesității: Fie $G^{(W_q)}$ - grup W'-pseudominor de W_q-simetrie, ce are grupul generator G, nucleul H_1 al omomorfismului însoțitor $\tau: G\to AutW$ şi subgrupul de simetrie H. Atunci, elementele grupului $G^{(W_q)}$ se înmulțesc după regula (1), iar intersecția grupului $G^{(W_q)}$ cu grupul multicomponent de „substituții” $W=\overline{\Pi}_{g_i\in G}P^{g_i}$ este egală cu unitatea w_0 a grupului W şi coincide cu intersecția grupului $G^{(W_q)}$ cu mulțimea componentelor-„substituții” $W'=\{w\mid g^{(w)}\in G^{(W_q)}\}$, care verifică condiția $w_0\subset W'\subset W$ [1].

Stabilim aplicațiile λ şi σ ale grupului $G^{(W_q)}$ respectiv pe grupul său generator G şi pe submulțimea cu unitate W' conform legilor $\lambda\left[g^{(w)}\right]=g$ şi $\sigma\left[g^{(w)}\right]=w$, unde g şi w sunt componente ale transformării $g^{(w)}\in G^{(W_q)}$. Evident, că λ este izomorfism. De aceea, există izomorfismul invers λ^{-1} al grupului G pe $G^{(W_q)}$ conform regulii $\lambda^{-1}(g)=g^{(w)}$.

Vom arăta că σ este cvasiomomorfism încrucişat cu nucleul H al grupului $G^{(W_q)}$ pe W'. Într-adevăr, fie $\sigma\left[g_i^{(w_i)}\right]=w_i$ şi $\sigma\left[g_j^{(w_j)}\right]=w_j$. Atunci, conform operației de înmulțire a elementelor din $G^{(W_q)}$, se obține că $\sigma\left[g_i^{(w_i)}*g_j^{(w_j)}\right]=\sigma\left[g_k^{(w_k)}\right]=w_k$, unde $g_k=g_ig_j$, iar $w_k=w_i^{g_j}\bar{\tau}_{g_i}(w_j)$. Menționăm că $w_i^{g_j}$ se obține din w_i prin intermediul g_j -deplasării la stânga a componentelor, iar $\vec{\tau}_{g_i}(w_j) = g_i w_j g_i^{-1}$. Prin urmare, automorfismele $\bar{g}_j$, ce determină g_j -deplasările la stânga ale componentelor în fiecare w din W', se evidențiază la includerea izomorfă φ a grupului G în grupul $AutW$ după regula $\varphi(g_j) = \bar{g}_j$, iar automorfismele $\vec{\tau}_{g_i}$ – la omomorfismul însoțitor $\tau : G \to AutW$ conform regulii $\tau(g_i) = \vec{\tau}_{g_i}$. Este evident că nucleul $Ker\sigma = H$, unde $H = G^{(W_q)} \bigcap G$ este subgrupul de simetrie al grupului $G^{(W_q)}$.

Subgrupul de W_p – simetrie $H_1^{(W_p)}$ se aplică de către σ pe totalitatea $W_1 = \{w \mid g^{(w)} \in H_1^{(W_p)}\}$, care verifică următoarea condiție $w_0 \subseteq W_1 \subset W'$. Nemijlocit se verifică că restricția lui σ pe $H_1^{(W_p)}$ este un cvasiomomorfism de stânga natural exact, al cărui nucleu H' coincide cu intersecția lui $H_1^{(W_p)}$ cu subgrupul de simetrie $H^{(w_0)}$, adică $H' = H_1 \cap H$.

În calitate de aplicație α a grupului G pe W' luăm rezultatul efectuării succesive ale aplicațiilor λ^{-1} și σ cu legea $\alpha(g) = \sigma\lambda^{-1}(g) = \sigma\left[g^{(w)}\right] = w$, unde g și w sunt componente ale transformării $g^{(w)}$ din $G^{(W_q)}$. În calitate de $Ker\alpha$ este subgrupul H, așa cum λ^{-1} este un izomorfism, iar $Ker\sigma = H$.

Deoarece grupul W'-pseudominor $G^{(W_q)}$ de W_q-simetrie constă numai din elementele $g^{(w)} = wg$, unde componentele geometrice g sunt diferite pentru diferite elemente $g^{(w)}$ și determină grupul G, iar componentele w formează submulțimea cu unitate W' a grupului W (unde $W' \not< W$), apoi pentru grupul $G^{(W_q)}$ sunt satisfăcute toate condițiile descrise în enunțul teoremei.

Demonstrația suficienței. Vom demonstra acum că mulțimea tuturor transformărilor, obținute din grupul de simetrie G și grupul multicomponent de „substituții" W conform pașilor descriși în enunțul teoremei, întotdeauna este grup W'-pseudominor de W_q-simetrie cu grupul generator G și nucleul omomorfismului însoțitor H_1, unde $H_1 \lhd G$.

Fie pentru grupurile date G și W există cvasiomomorfismul încrucișat α al grupului G pe submulțimea cu unitate W' (unde $W' \not< W$) a grupului W cu legea $\alpha(g_i) = w_i$, a cărui restricție pe subgrupul invariant H_1 din grupul G este un cvasiomomorfism de stânga natural exact. Atunci, conform definiției cvasiomomorfismului încrucișat, vom avea că $\alpha(g_i g_j) = w_i^{g_j}\vec{\tau}_{g_i}(w_j)$, unde automorfismul $\bar{g}_j$ acționează asupra elementelor w_i prin intermediul g_j -deplasării la stânga a componentelor sale, iar automorfismul $\vec{\tau}_{g_i}$ acționează asupra lui w_j în forma conjugării de dreapta.

Alcătuim mulțimea $G^{(W_q)}$ tuturor acelor perechi $wg = g^{(w)}$, unde $\alpha(g) = w$, și în această mulțime introducem operația (1). Închiderea mulțimii $G^{(W_q)}$ referitor la operația dată rezultă din faptul că G este grup, iar α este cvasiomomorfism încrucișat. Într-adevăr, pentru orice elemente g_i și g_j din grupul G vom avea $\alpha(g_i) = w_i$, $\alpha(g_j) = w_j$ și $\alpha(g_i g_j) = w_i^{g_j}\vec{\tau}_{g_i}(w_j) = w_k = \alpha(g_k)$, unde $w_i, w_j\, w_k \in W'$.

Asociativitatea operației și existența în mulțimea $G^{(W_q)}$ a elementului unitate $1^{(w_0)} = w_0 1$ se verifică nemijlocit, ținându-se cont de faptul că acțiunea automorfismelor $\bar{g}$ și $\vec{\tau}_g$ asupra fiecărui element w din grupul W este comutativă.

Fie $g^{(w)} \in G^{(W_q)}$, atunci $g^{(w)} = wg$, unde $g \in G$, $w \in W'$ și $w = \alpha(g)$. Deoarece G este grup, atunci $g^{-1} \in G$. Fie $\alpha(g^{-1}) = w^* \in W'$, atunci $w^* g^{-1} = g^{-1(w^*)} \in G^{(W_q)}$. Pe de o parte, $\alpha(gg^{-1}) = \alpha(1) = w_0$, iar, pe de altă parte, $\alpha(gg^{-1}) = w^{g^{-1}}\vec{\tau}_g(w^*)$. Prin urmare, $w^{g^{-1}}\vec{\tau}_g(w^*) = w_0$, de aceea $\vec{\tau}_g(w^*) = (w^{-1})^{g^{-1}}$, iar

$w^* = \bar{\tau}_{g^{-1}}((w^{-1})^{g^{-1}}) = \left[\bar{\tau}_{g^{-1}}(w^{-1})\right]^{g^{-1}}$. În final se obține că $\bar{\tau}_{g^{-1}}((w^{-1})^{g^{-1}})g^{-1} = \left[wg\right]^{-1} \in G^{(W_q)}$. Prin urmare, $G^{(W_q)}$ este grup de W_q-simetrie.

Din faptul că α aplică grupul G pe submulțimea cu unitate W' din W, rezultă că $W' = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G^{(W_q)} \right\}$. Intersecția V a grupului obținut $G^{(W_q)}$ cu submulțimea W' este egală cu unitatea din grupul W, deoarece unitatea 1 a grupului G la acțiunea cvasiomomorfismului încrucişat α se aplică numai pe unitatea w_0 a grupului W. Grupul $G^{(W_q)}$ este izomorf grupului său generator G, aşa cum nucleul V al omomorfismului $\lambda : G^{(W_q)} \to G$, după regula $\lambda\left[g^{(w)}\right] = g$, este unitar. Aşadar, grupul obținut $G^{(W_q)}$ este grup W'-pseudominor de W_q-simetrie. Teorema este demonstrată.

Remarca 3: Pentru deducerea concretă a grupurilor pseudominore de W_q-simetrie este comod de utilizat următorul algoritm:

1) Având date grupurile G şi P, de găsit produsul cartezian $W = \overline{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$ al cópiilor izomorfe lui P şi indexate cu elemente din grupul G şi de evidențiat în grupul W subgrupul $DiagW \cong P$.
2) De construit izomorfismul $\varphi : G \to AutW$ după regula $\varphi(g) = \bar{g}$, unde $\bar{g}$ efectuează g-deplasarea la stânga a componentelor în fiecare w din grupul W şi de descris în detalii acțiunea automorfismului $\bar{g}$ asupra factorilor P^{g_i} la nivel de substituții ale acestor factori.
3) De găsit: în grupul G toate subgrupurile netriviale invariante H_1 ($H_1 \lhd G$) şi subgrupurile adevărate G_1 ce-l includ în sine pe H_1 ($H_1 < G_1 < G$), în grupul H_1 toate subgrupurile adevărate posibile H ($H < H_1$), iar în grupul W toate submulțimile cu unitate W' (care însă nu sunt subgrupuri) şi care verifică condițiile: $G/H_1 \cong \Phi < AutW$, $[G \mid H] = |W'|$, $H_1 \cap H = H'$, $[H_1 \mid H'] = |W_1|$, unde $w_0 \subseteq W_1 \subset W'$, $G_1 \cap H = H''$, $W' \cap DiagW = W''$ şi $[G_1 \mid H''] = |W''|$.
4) De construit un omomorfism τ cu nucleul $Ker\tau = H_1$ al grupului G în grupul $AutW$, unde $\tau(g) = \bar{\tau}_g$ şi $\bar{\tau}_g(w) = gwg^{-1}$;
5) De descompus grupul G în clase de resturi de dreapta în raport cu subgrupul H şi de stabilit aşa o corespondență biunivocă α între descompunerea dată şi submulțimea W' (păstrând: a) corespondența dintre elementele subgrupului H_1 şi W_1, obținută în rezultatul cvasiomomorfismului de stânga natural exact φ cu nucleul H'; b) corespondența dintre elementele subgrupului G_1 şi W'', obținută în rezultatul cvasiomomorfismului de dreapta β cu nucleul H'' al grupului G_1 pe W''), care, în calitate de aplicație a grupului G pe W', ar fi cvasiomomorfism încrucişat cu nucleul H.

5. În continuare vom analiza în detalii două exemple concrete de deducere a grupurilor posibile pseudominore de W_q-simetrie din grupurile date G şi P.

Exemplul 1. Analizăm în primul rând un exemplu de deducere a grupurilor pseudominore de W_q-simetrie din grupul inițial de substituții $P = \left\{e, p = (123), p^{-1} = (132)\right\} \cong C_3$ şi grupul ciclic de ordinul 3 $G = C_3$. Aşadar, $G = C_3 \square 3 = \left\{1, 3, 3^{-1}\right\}$ şi $W = P^1 \times P^3 \times P^{3^{-1}}$. Conform izomorfismului $\varphi : G \to AutW$, obținem că $\varphi(G) = \bar{G} = \bar{C}_3 = \left\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{3}^{-1}\right\}$, unde simbolul $\bar{g}$ semnifică automorfismul $\bar{\varphi}_g = \varphi(g)$ ce realizează g-deplasarea la stânga în fiecare $w \in W$. Acțiunea automorfismului $\bar{g}$ asupra factorilor P^{g_i} ai grupului W o prezentăm în forma substituțiilor lor:

$$\bar{1}(P^{g_i}) = P^{g_i} : (P^1)(P^3)(P^{3^{-1}}) \,;\ \bar{3}(P^{g_i}) = P^{3g_i} : (P^1 P^3 P^{3^{-1}}) \,;\ \bar{3}^{-1}(P^{g_i}) = P^{3^{-1}g_i} : (P^1 P^{3^{-1}} P^3) \cdot$$

În calitate de nucleu $H_1 = Ker\tau$ al omomorfismului însoțitor $\tau : G \to AutW$, după regula $\tau(g) = \vec{\tau}_g$, poate fi numai însuşi grupul $G = C_3$.

În calitate de nucleu $H = Ker\alpha$ al cvasiomomorfismului încrucişat α al grupului $G = C_3$ în grupul W poate servi doar subgrupul H de indicele 3 în G, adică $H = C_1 = \{1\}$. Prin urmare, pentru deducerea grupurilor pseudominore de W_q-simetrie cu grupul generator $G = C_3$, vom studia doar acele submulțimi cu unitate W' care nu formează grup şi pentru care $|W'| = 3$.

Fie $H_1 = C_3$, iar $H = \{1\}$. Atunci, $\vec{\tau}_g = \bar{1}$ pentru orice $g \in C_3$. Fie $\alpha(1) = w_0$, $\alpha(3) = w_1$, iar $\alpha(3^{-1}) = w_2$, unde α – cvaziomomorfismul încrucişat al grupului C_3 pe submulțimea $W' = (w_0, w_1, w_2)$. Observăm că w_0 are ordinul 1, iar celelalte două elemente au ordinul 3. Mai mult, din $\alpha(3) = w_1$ obținem $\alpha(3 \cdot 3) = w_1^3 \vec{\tau}_3(w_1) = w_1^3 w_1 = w_2 = \alpha(3^{-1})$, din $\alpha(3^{-1}) = w_2$ obținem $\alpha(3^{-1} \cdot 3^{-1}) = w_2^{3^{-1}} \vec{\tau}_{3^{-1}}(w_2) = w_2^{3^{-1}} w_2 = w_1 = \alpha(3)$, iar din $\alpha(3 \cdot 3^{-1}) = w_1^{3^{-1}} \vec{\tau}_3(w_2) = w_1^{3^{-1}} w_2 = w_0 = \alpha(1)$ şi $\alpha(3^{-1} \cdot 3) = w_2^3 \vec{\tau}_{3^{-1}}(w_1) = w_2^3 w_1 = w_0 = \alpha(1)$ obținem $w_1^{3^{-1}} w_2 = w_2^3 w_1$.

Considerăm $w_0 =< e^1, e^3, e^{3^{-1}} >$, $w_1 =< r_1^1, r_2^3, r_3^{3^{-1}} >=< r_1, r_2, r_3 >$ şi $w_2 =< k_1, k_2, k_3 >$. Din relațiile de mai sus avem că $w_1^3 w_1 = w_2$ şi $w_1^{3^{-1}} w_1^3 w_1 = w_0$. Atunci, $w_1^3 =< r_2, r_3, r_1 >$, iar $w_1^3 w_1 =< r_2 r_1, r_3 r_2, r_1 r_3 >$. Din egalitatea $w_1^3 w_1 = w_2$ urmează egalitățile: $k_1 = r_2 r_1$, $k_2 = r_3 r_2$, $k_3 = r_1 r_3$. Iar din egalitatea $w_1^{3^{-1}} w_1^3 w_1 = w_0$ urmează egalitatea $r_1 r_2 r_3 = e$. Sunt posibile următoarele variante: 1) $w_1 =< e, p, p^{-1} >$, iar $w_2 =< p, e, p^{-1} >$; 2) $w_1 =< e, p^{-1}, p >$, iar $w_2 =< p^{-1}, e, p >$; 3) $w_1 =< p, e, p^{-1} >$, iar $w_2 =< p, p^{-1}, e >$; 4) $w_1 =< p^{-1}, e, p >$, iar $w_2 =< p^{-1}, p, e >$; 5) $w_1 =< p, p^{-1}, e >$, iar $w_2 =< e, p^{-1}, p >$; 6) $w_1 =< p^{-1}, p, e >$, iar $w_2 =< e, p, p^{-1} >$.

În rezultat, obținem 6 submulțimi W_i' ($i = \overline{1,6}$), care ne dau 6 grupuri pseudominore de W_q-simetrie cu grupul generator $G = C_3$ şi grupul inițial de substituții $P \cong C_3$:

$W_1' = (w_0, w_1 =< e, p, p^{-1} >, w_2 =< p, e, p^{-1} >)$, $\quad W_2' = (w_0, w_1 =< e, p^{-1}, p >, w_2 =< p^{-1}, e, p >)$,

$W_3' = (w_0, w_1 =< p, e, p^{-1} >, w_2 =< p, p^{-1}, e >)$, $\quad W_4' = (w_0, w_1 =< p^{-1}, e, p >, w_2 =< p^{-1}, p, e >)$,

$W_5' = (w_0, w_1 =< p, p^{-1}, e >, w_2 =< e, p^{-1}, p >)$, $\quad W_6' = (w_0, w_1 =< p^{-1}, p, e >, w_2 =< e, p, p^{-1} >)$.

Simbolul grupurilor pseudominore obținute este $\left[C_3, C_3, \bar{C}_1, \bar{C}_3 \right] / (W_i' \big| W_i' \,|w_0; C_3 \big| C_1, C_3 \big| C_3 \big| C_1) C_1$, unde $i = \overline{1,6}$.

Exemplul 2. Fie $P = \left\{ e, p = (123), p^{-1} = (132) \right\} \cong C_3$, iar grupul generator G este grupul ciclic de ordinul 6, adică $G = C_6$. Aşadar, $G = C_6$ □ $6 = \left\{ 1, 6, 3, 2, 3^{-1}, 6^{-1} \right\}$ şi $W = P^1 \times P^6 \times P^3 \times P^2 \times P^{3^{-1}} \times P^{6^{-1}}$. Conform izomorfismului $\varphi : G \to AutW$, obținem că $\varphi(G) = \bar{G} = \bar{C}_6 = \left\{ \bar{1}, \bar{6}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{3}^{-1}, \bar{6}^{-1} \right\}$, unde simbolul $\bar{g}$ semnifică automorfismul $\bar{\varphi}_g = \varphi(g)$ ce realizează g-deplasarea la stânga în fiecare $w \in W$. Acțiunea automorfismului $\bar{g}$ asupra factorilor P^{g_i} ai grupului W o prezentăm în forma substituțiilor lor:

$$\bar{1}(P^{g_i}) = P^{g_i} : (P^1)(P^6)(P^3)(P^2)(P^{3^{-1}})(P^{6^{-1}}); \; \bar{6}(P^{g_i}) = P^{6g_i} : (P^1 P^6 P^3 P^2 P^{3^{-1}} P^{6^{-1}});$$

$$\bar{3}(P^{g_i}) = P^{3g_i} : (P^1 P^3 P^{3^{-1}})(P^6 P^2 P^{6^{-1}}); \; \bar{2}(P^{g_i}) = P^{2g_i} : (P^1 P^2)(P^6 P^{3^{-1}})(P^{6^{-1}} P^3);$$

$$\bar{3}^{-1}(P^{g_i}) = P^{3^{-1} g_i} : (P^1 P^{3^{-1}} P^3)(P^6 P^{6^{-1}} P^2); \; \bar{6}^{-1}(P^{g_i}) = P^{6^{-1} g_i} : (P^1 P^{6^{-1}} P^{3^{-1}} P^2 P^3 P^6).$$

Se ştie că $Ker\tau \cong C(P)$. Deoarece centrul grupului de substituții $P \cong C_3$ coincide cu însuşi grupul, apoi în calitate de nucleu $H_1 = Ker\tau$ al omomorfismului însoțitor $\tau : G \to AutW$, după regula $\tau(g) = \bar{\tau}_g$ (unde $\bar{\tau}_g(w) = gwg^{-1}$ pentru $w \in W$), va fi subgrupul C_3 al grupului $G = C_6$.

În calitate de nucleu $H = Ker\alpha$ al cvasiomomorfismului încrucişat α al grupului $G = C_6$ în grupul W poate servi doar subgrupul H de indicele 2, 3 sau 6 în G, adică $H = C_3$, $H = C_2$ sau $H = C_1 = \{1\}$. Prin urmare, pentru deducerea grupurilor pseudominore de W_q-simetrie cu grupul generator $G = C_6$, vom studia doar acele submulțimi cu unitate W' care nu formează grup şi pentru care $|W'| = 2$, $|W'| = 3$, $|W'| = 6$.

1) Fie $H_1 = H = C_3$. Atunci $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_3 = \bar{\tau}_{3^{-1}} = \vec{1}$, iar $\bar{\tau}_6 = \bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_{6^{-1}} = \vec{2}$, unde $\vec{2} : p \leftrightarrow p^{-1}$. Fie $\alpha(1) = \alpha(3) = \alpha(3^{-1}) = w_0$, iar $\alpha(6) = \alpha(2) = \alpha(6^{-1}) = w$, unde α – cvaziomomorfismul încrucişat al grupului C_6 pe submulțimea $W' = (w_0, w)$. Atunci:

a) $\alpha(6 \cdot 6) = w^6 \bar{\tau}_6(w) = w^6 w^{-1} = w_0 = \alpha(3)$, $\alpha(6 \cdot 2) = w^2 \bar{\tau}_6(w) = w^2 w^{-1} = w_0 = \alpha(3^{-1})$,
$\alpha(6 \cdot 3) = w^3 \bar{\tau}_6(w_0) = w^3 w_0 = w^3 = w = \alpha(2)$;

b) $\alpha(2 \cdot 2) = w^2 \bar{\tau}_2(w) = w^2 w^{-1} = w_0 = \alpha(1)$, $\alpha(2 \cdot 3^{-1}) = w^{3^{-1}} \bar{\tau}_2(w_0) = w^{3^{-1}} w_0 = w^{3^{-1}} = w = \alpha(6)$;

c) $\alpha(6^{-1} \cdot 6^{-1}) = w^{6^{-1}} \bar{\tau}_{6^{-1}}(w) = w^{6^{-1}} w^{-1} = w_0 = \alpha(3^{-1})$.

Din relațiile a)-c) rezultă că $w^3 = w^{3^{-1}} = w$, iar $w^6 w^{-1} = w^2 w^{-1} = w^{6^{-1}} w^{-1} = w_0$. Prin urmare, toate componentele elementului w al submulțimii W' sunt egale intre ele. De aceea, sunt posibile numai două cazuri: $w_1 =< p, p, p, p, p, p >$ şi $w_2 =< p^{-1}, p^{-1}, p^{-1}, p^{-1}, p^{-1}, p^{-1} >$. Mulțimile $W_i' = (w_0, w_i)$, unde $i = 1, 2$, ne dau două grupuri pseudominore de W_q-simetrie cu următorul simbol $\left[C_3, C_3, \bar{C}_2, \bar{C}_6\right] / (W_i' | W_i' | W_i'; C_3 | C_3, C_6 | C_3 | C_3) C_3$, unde $i = 1, 2$.

2) Fie $H_1 = C_3$, $H = C_2$. Vom considera că $\alpha(1) = \alpha(2) = w_0$, $\alpha(6) = \alpha(3^{-1}) = w_1$ iar $\alpha(6^{-1}) = \alpha(3) = w_2$, unde α – cvaziomomorfismul încrucişat al grupului C_6 pe submulțimea $W' = (w_0, w_1, w_2)$. Atunci, se vor obține relațiile: $\alpha(6 \cdot 2) = w_1^2 \bar{\tau}_6(w_0) = w_1^2 w_0 = w_1^2 = w_1 = \alpha(3^{-1})$, $\alpha(2 \cdot 6) = w_0^6 \bar{\tau}_2(w_1) = w_1^{-1} = \alpha(3^{-1})$, $\alpha(6 \cdot 6^{-1}) = w_1^{6^{-1}} \bar{\tau}_6(w_2) = w_1^{6^{-1}} w_2^{-1} = w_0 = \alpha(1)$, $\alpha(3^{-1} \cdot 3^{-1}) = w_1^{3^{-1}} \bar{\tau}_{3^{-1}}(w_1) = w_1^{3^{-1}} w_1 = w_2 = \alpha(3)$ şi $\alpha(3^{-1} \cdot 3) = w_1^3 \bar{\tau}_{3^{-1}}(w_2) = w_1^3 w_2 = w_0 = \alpha(1)$.

Pe de o parte, din relațiile obținute mai sus vom avea că $w_1^2 = w_1$, $w_1 = w_1^{-1}$ şi $w_1^{6^{-1}} w_2^{-1} = w_0$, adică $w_1^{6^{-1}} = w_2$. Mai mult, vom avea şi egalitatea $w_1^3 w_1^{3^{-1}} w_1 = w_0$. Pe de altă parte, ştim că elementele w_1 şi w_2 sunt de ordinul al treilea. Prin urmare, inversul elementului w_i (pentru $i = 1,2$) întotdeauna este diferit de înseşi w_i: $w_i \neq w_i^{-1}$. Ca rezultat, vom obține că nu este posibilă aplicația cvasiomomorfă încrucişată α a grupului C_6 pe submulțimea $W = \{w_0, w_1, w_2\}$ cu nucleul $Ker\alpha = C_2$ şi însoțită de omomorfismul $\tau : C_6 \to AutW$ cu nucleul $Ker\tau = C_3$. Deci, în acest caz nu există grupuri pseudominore de W_q-simetrie.

3) Vom analiza situația în caz mai general, şi anume: se consideră $\alpha(1) = w_0$ iar $\alpha(6) = w$. Vom găsi toate condițiile pe care trebuie să le verifice componentele lui w pentru ca α să fie aplicație cvasiomomorfă încrucişată, însoțită de omomorfismul $\tau : C_6 \to AutW$ cu nucleul $Ker\tau = C_3$. Din $\alpha(6) = w$ urmează:

$\alpha(6\cdot 6)=\alpha(3)=w^6\vec{\tau}_6(w)=w^6\vec{2}(w)=w^6w^{-1}$, $\alpha(3\cdot 6)=\alpha(2)=(w^6w^{-1})^6\vec{\tau}_3(w)=w^3(w^{-1})^6w=\alpha(6\cdot 3)=$ $w^3\vec{\tau}_6(w^6w^{-1})=w^3\vec{2}(w^6w^{-1})=w^3(w^6w^{-1})^{-1}=w^3w(w^{-1})^6$, $\alpha(2\cdot 6)=\alpha(3\cdot 3)=[w^3w(w^{-1})^6]^6\vec{\tau}_2(w)=$ $w^2w^6(w^{-1})^3w^{-1}=(w^6w^{-1})^3\vec{\tau}_3(w^6w^{-1})=w^2(w^{-1})^3w^6w^{-1}=\alpha(3^{-1})$ şi $\alpha(2\cdot 3)=\alpha(6^{-1})=$ $[w^2(w^{-1})^3w^6w^{-1}]^3\vec{\tau}_2(w^6w^{-1})=w^{6^{-1}}(w^{-1})^{3^{-1}}w^2(w^{-1})^3w(w^6)^{-1}=w^2w^{6^{-1}}(w^6)^{-1}$. Din faptul că $\alpha(2)=w^3w(w^{-1})^6$ urmează că $\alpha(2\cdot 2)=w_0=[w^3w(w^{-1})^6]^2\vec{\tau}_2(w^3w(w^{-1})^6)=$ $w^{6^{-1}}w^2(w^{-1})^{3^{-1}}w^6w^{-1}(w^{-1})^3=w^2w^{-1}$; de unde se obține $w^2=w$. Din $\alpha(6)=w$ şi $\alpha(6^{-1})=w^2w^{6^{-1}}(w^6)^{-1}$ urmează că $\alpha(6\cdot 6^{-1})=w_0=w^{6^{-1}}\vec{\tau}_6[w^2w^{6^{-1}}(w^6)^{-1}]^{-1}=$ $w^{6^{-1}}w^6(w^{-1})^{6^{-1}}(w^{-1})^2=w(w^{-1})^3$, de unde se obține $w^3=w$; respectiv, $\alpha(6^{-1}\cdot 6)=w_0=w^{3^{-1}}(w^3)^{-1}$, de unde $w^3=w^{3^{-1}}$. În mod analog, din $\alpha(3)=w^6w^{-1}$ şi $\alpha(3^{-1})=w^2(w^{-1})^3w^6w^{-1}$ se obține că $w^2=w$ şi $w^6=w^{3^{-1}}$. Ca rezultat, vom avea: $w=w^2=w^3=w^{3^{-1}}=w^6$. Considerând $w=<r^1,r^6,r^3,r^2,r^{3^{-1}},r^{6^{-1}}>=<r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6>$ vom avea $w^2=<r_4,r_5,r_6,r_1,r_2,r_3>$, $w^3=<r_3,r_4,r_5,r_6,r_1,r_2>$, $w^{3^{-1}}=<r_5,r_6,r_1,r_2,r_3,r_4>$ şi, respectiv, $w^6=<r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_1>$. Ca rezultat, $r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=r_6$. Prin urmare, $w=w_1=<p,p,p,p,p,p>$ sau $w=w_2=<p^{-1},p^{-1},p^{-1},p^{-1},p^{-1},p^{-1}>$.

Referințe:

1. Лунгу А.П. Основы общей теории W_q-симметрии // Известия АН Республики Молдова. Математика, 1996, №3 (22), c.94-100.
2. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - Москва: Наука, 1977.
3. Курош А.Г. Теория групп. - Москва: Наука, 1967.
4. Лунгу А.П. О квазигомоморфизмах групп и Ф-инвариантных подгруппах. - В кн.: Общая алгебра и дискретная геометрия. - Кишинёв: Штиинца, 1980, с.47-51.
5. Лунгу А.П. Расширение понятия квазигомоморфного отображения групп. - В кн.: Исследования по современной алгебре и геометрии. - Кишинёв: Штиинца, 1983, с.84-90.
6. Лунгу А.П. Некоторые свойства левых квазигомоморфных отображений // Buletinul Academiei de Ştiințe a Moldovei. Matematica. 1995, nr.1(17), p.78-81.
7. Лунгу А.П. К теории $\overline{P}-$симметрии // Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 мая 1978 г., №1709-78 Деп., 16 с.
8. Лунгу А.П. К выводу групп Q-симметрии ($\overline{P}$-симметрии) // Кристаллография, 1980, т.25, вып. 5, с.1051-1053.
9. Копцик В.А., Коцев И.Н. К теории и классификации групп цветной симметрии. II. W-симметрия // Сообщения ОИЯИ. Р4-8068. - Дубна, 1974.
10. Лунгу А.П. Методика вывода полумладших и псевдомладших групп W-симметрии // Buletinul Academiei de Ştiințe a Moldovei. Matematicaca. 1994, nr.2(15), p.29-39.
11. Лунгу А.П. К теории групп W_q-симметрии // Buletinul Academiei de Ştiințe a Moldovei. Matematica. 1997, nr.2(24), p.77-86.
12. Branişte M., Lungu A. Structura generală a grupurilor discrete pseudominore de W_q-simetrie // Studia Universitatis. Revistă ştiințifică. Seria „Ştiințe exacte şi economice". - Chişinău: CEP USM, 2010, nr.2(32), p.5-14.

Prezentat la 15.11.2010