GEOMETRIA SUPRAFEȚELOR ÎN SPAȚIUL MINKOWSKI 3–DIMENSIONAL $\mathbf{R}_1^3$ FOLOSIND MATLAB

Alina-Mihaela PATRICIU

Universitatea „Vasile Alecsandri” din Bacău

In this article we present a case that shows the utility of Matlab language in studying the geometry of surfaces in 3–dimensional Minkowski space $\mathbf{R}_1^3$. In some cases, for example, for different parameterizations of surfaces, the computations become cumbersome or even impossible and in this point appear MATLAB's usefulness. To exemplify such situations, in this paper is presented a sequence from the program used to obtain various elements of the geometry of such surfaces.

Preliminarii

Fie $\mathbf{R}^3$ spațiul vectorial real 3–dimensional. Perechea $\left(\mathbf{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_1\right)$, notată $\mathbf{R}_1^3$, unde pseudoprodusul scalar $\langle\ ,\ \rangle_1$ este dat de

$$\langle x, y\rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \tag{1}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$, se numește *spațiu Minkowski 3-dimensional*.

Pentru o suprafață *S* dată parametric prin $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, vectorul normal unitar la *S* este dat de

$$n = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \tag{2}$$

unde, $X_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $X_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$, iar $X_u \wedge X_v$ – produsul vectorial în $\mathbf{R}_1^3$ definit de:

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (-(a_2b_3 - a_3b_2), -(a_1b_3 - a_3b_1), a_1b_2 - a_2b_1) \tag{3}$$

Curbura Gaussiană a unei suprafețe temporale este dată de

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{4}$$

iar curbura medie de:

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \tag{5}$$

unde *E*, *F*, *G* sunt coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței *S* dați de:

$$E = \langle X_u, X_u\rangle_1, F = \langle X_u, X_v\rangle_1, G = \langle X_v, X_v\rangle_1, \tag{6}$$

iar *L*, *M*, *N* sunt coeficienții celei de a doua forme fundamentale determinați prin:

$$L = -\langle n_u, X_u\rangle_1, M = -\langle n_u, X_v\rangle_1 = -\langle n_v, X_u\rangle_1, -N = \langle n_v, X_v\rangle_1 \tag{7}$$

În [3] am definit H_1 – suprafața elicoidală ca fiind suprafața elicoidală dată parametric prin:

$$X(u,v) = (u + b(v), -a(u)\sin v, a(u)\cos v) \tag{8}$$

cu $a(u)a'(u) \neq 0$.

În [4], suprafața $\widetilde{S}$ dată prin

$$\widetilde{P}(u,v) = P(u,v) + \delta \cdot n(u,v), \tag{9}$$

unde: S este o suprafață orientabilă, n – vectorul normal unitar la $S, P \in S, \widetilde{P} \in \widetilde{S}$, δ – constantă reală pozitivă, a fost denumită *suprafața paralelă cu suprafața S la distanța* δ.

Rezultatele principale

Vom studia H_1 – suprafața elicoidală S dată de (8) în cazul $a(u) = Au + B$ şi $b(v) = Cv + D$:

$$X(u,v) = (u + (Cv + D), -(Au + B)\sin v, (Au + B)\cos v) \tag{10}$$

Normala la suprafață este dată de:

$$n = \frac{(-A(Au + B), (Au + B)\sin v + AC\cos v, AC\sin v - (Au + B)\cos v)}{\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2}}. \tag{11}$$

Înlocuind X_u şi X_v în formulele (6), obținem:

$$E = A^2 - 1, \quad F = -C, G = A^2u^2 + 2ABu + B^2 - C^2. \tag{12}$$

Cum

$$n_u = \frac{\left(-A^4C^2, A^3C^2\sin v - A^2C(1 - A^2)(Au + B)\cos v, -(A^3C^2\cos v + (Au + B)A^2C(1 - A^2)\sin v)\right)}{(A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2)^{3/2}},$$

$$n_v = \frac{\left(0, (Au + B)\cos v - AC\sin v, AC\cos v + (Au + B)\sin v\right)}{(A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2)^{3/2}},$$

folosind (7), obținem următoarele valori ale coeficienților celei de a doua forme fundamentale a suprafeței S:

$$\begin{aligned} L = 0, M &= -\frac{A^2C}{\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2}} \\ N &= \frac{(Au + B)^2}{\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2}} \end{aligned} \tag{13}$$

de unde, din (4), curbura Gaussiană are valoarea:

$$K = A^4C^2 / (A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2)^2 \tag{14}$$

şi, din (5), curbura medie este:

$$H = [(Au + B)^2(A^2 - 1) + 2A^2C^2] / 2(A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2) \tag{15}$$

În continuare facem calcule similare pentru suprafața paralelă la H_1 – suprafața elicoidală dată de (10). Folosind definiția suprafeței paralele şi (11), obținem următoarele ecuații parametrice ale suprafeței paralele:

$$\begin{cases} \widetilde{x}(u,v) = u + Cv + D - \delta\dfrac{A(Au + B)}{\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2}} \\ \widetilde{y}(u,v) = -(Au + B)\sin v + \delta\dfrac{(Au + B)\sin v + AC\cos v}{\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2}} \\ \widetilde{z}(u,v) = (Au + B)\cos v + \delta\dfrac{AC\sin v - (Au + B)\cos v}{\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2}} \end{cases} \tag{16}$$

şi coeficienții primei forme fundamentale vor fi:

$$\begin{aligned} \tilde{E} = -(&-4A^9Bu^3 + 4A^3BC^2u + 12A^5B^3u - A^6C^4 - 3A^2B^4 + A^4C^4 + \delta^2A^6C^2 + \\ &+2A^2B^2C^2 - \delta^2A^4C^2 + 6A^2B^2u^2 - 18A^4B^2u^2 + 2A^4C^2u^2 + 18A^6B^2u^2 - \\ &-6A^8B^2u^2 + 4A^3Bu^3 - 12A^5Bu^3 + 4AB^3u - 12A^5Bu^3 + 4AB^3u - 12A^3B^3u - \\ &-4A^7B^3u - A^{10}u^4 + 3A^8u^4 + A^4u^4 - 3A^6u^4 + 3A^4B^4 + B^4 + 12A^7Bu^3 + \\ &+2A^6B^2C^2 + 2A^8C^2u^2 - 4A^6u^4 + 3A^4B^4 + B^4 + 12A^7Bu^3 + 2A^6B^2C^2 + \\ &+2A^8C^2u^2 - 4A^6C^2u^2 - 4A^4B^2C^2 - A^6B^4 - 8A^5BC^2u + 4A^7BC^2u) / \\ &(A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F} = C(&A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2 - \\ &-2\delta A^2\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2} + \\ &+\delta^2 A^2) / A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G} = -(&4A^3BC^2u - A^2B^4 - B^2C^2 + \delta^2B^2 - A^2C^4 - 6A^4B^2u^2 + 2A^4C^2u^2 + \\ &+ A^4u^4 + 2A^2B^2C^2 + 6A^2B^2u^2 4A^3Bu^3 - 4A^5Bu^3 + 4AB^3u - 4A^3B^3u - \\ &- A^2C^2u^2 - A^6u^4 + B^4 + 2\delta^2ABu - 2ABC^2u + \delta^2A^2C^2 + \delta^2A^2u^2 + \\ &- 4\delta ABu\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2} - \\ &- 2\delta B^2\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2}) - \\ &- 2\delta A^2u^2\sqrt{A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2}) / \\ &A^2C^2 + A^2u^2 + 2ABu + B^2 - A^4u^2 - 2A^3Bu - A^2B^2.\end{aligned}$$

În cele ce urmează vrem să determinăm vectorul normal unitar la suprafață, $\widetilde{n}$, ale cărui componente vor fi folosite, de exemplu, la determinarea coeficienților celei de a doua forme fundamentale a suprafeței paralele. Însă, se poate verifica faptul că încercarea de a obține aceste componente este dificilă şi aici va interveni, în acest moment, limbajul Matlab.

Liniile de comandă

```
                    clear all
                    syms u v A B C D delta
                    a=A*u+B;
                    b=C*v+D;
                    c=A^2*(C^2+u^2-B^2)+2*A*B*u+B^2-A^3*u*(a+B);
% ecuațiile parametrice ale suprafeței paralele
                    x=u+b-delta*A*a/c;
                    y=-a*sin(v)+delta*(a*sin(v)+A*C*cos(v))/c;
                    z=a*cos(v)+delta*(A*C*sin(v)-a*cos(v))/c;
% componentele vectorilor X_u si X_v
                    x_u=diff(x,u);
                    x_v=diff(x,v);
                    y_u=diff(y,u);
                    y_v=diff(y,v);
                    z_u=diff(z,u);
                    z_v=diff(z,v);
% componentele numărătorului din formula vectorului normal unitar
                    N1= simplify(-(y_u*z_v-z_u*y_v));
                    N2= simplify(-(x_u*z_v-x_v*z_u));
                    N3= simplify(x_u*y_v-x_v*y_u);
```

returnează, de exemplu, următoarea valoare a primei componente a vectorului normal la suprafață:

```
     N1 =
-A*(-63*A^6*B^5*u^2+7*A^12*u^6*B+35*A^10*u^4*B^3+7*A^7*B^6*u-105*A^7*B^4*u^3-
63*A^9*u^5*B^2-21*A^10*u^6*B-105*A^8*u^4*B^3+105*A^5*B^4*u^3-A^2*delta^2*B^3-
3*A^7*C^4*u^3-A^7*C^6*u-35*A^4*u^4*B^3-3*A^4*B^7+6*A^3*delta*B^2*u*C^2+105*A^6
*u^4*B^3+35*A^9*B^4*u^3-3*A^4*C^4*B^3+3*A^6*C^4*B^3-A^6*C^6*B+delta^2*B^3-7*B^6*
A*u+63*A^4*B^5*u^2+21*A^3*B^6*u+21*A^8*B^5*u^2+A^6*B^7+6*A^4*B^5*C^2-3*A^11*
u^5*C^2+21*A^11*u^5*B^2+3*A^9*C^4*u^3-3*A^2*B^5*C^2-21*A^2*B^5*u^2+A^3*delta^2*
u^3-3*A^7*u^5*C^2-7*A^6*u^6*B-A^5*delta^2*u^3+63*A^7*u^5*B^2-21*A^5*B^6*u-3*A^6*
B^5*C^2+6*A^9*u^5*C^2+21*A^8*u^6*B-21*A^5*u^5*B^2+3*A^2*delta^2*B*u^2-B^7+
3*A^2*B^7-A^7*u^7+A^13*u^7-3*A^11*u^7+3*A^9*u^7-6*A^6*delta*u^2*B*C^2-6*A^5*
delta*u*B^2*C^2+6*A^4*delta*B*u^2*C^2-2*A^4*C^2*B^3*delta-30*A^5*C^2*B^2*u^3-
30*A^4*C^2*B^3*u^2-15*A^3*C^2*B^4*u-2*A^7*C^2*u^3*delta-15*A^10*u^4*B*C^2+30*
A^5*B^4*u*C^2+3*delta^2*B^2*A*u+2*A^2*delta*B^3*C^2-15*A^6*u^4*B*C^2+9*A^8*C^4
*u^2*B-9*A^5*C^4*u*B^2-9*A^6*C^4*u^2*B+9*A^7*C^4*u*B^2-35*A^3*B^4*u^3+2*A^5*
C^4*delta*u-3*A^3*delta^2*u*B^2+2*A^5*C^2*u^3*delta-2*A^4*delta^2*C^2*B+A^3*
delta^2*C^2*u+A^2*delta^2*C^2*B-3*A^4*delta^2*u^2*B+60*A^6*C^2*u^2*B^3+60*A^7*
C^2*u^3*B^2-30*A^8*C^2*u^2*B^3-30*A^9*C^2*u^3*B^2+30*A^8*u^4*B*C^2-15*A^7*B^4*
u*C^2+2*A^4*C^4*delta*B-2*A^5*delta^2*C^2*u)/(-A^2*C^2-A^2*u^2+A^2*B^2-2*A*B*u-
B^2+A^4*u^2+2*A^3*u*B)^3
```

Concluzii

Deşi, uneori, chiar dacă utilizăm programul Matlab, expresiile obţinute sunt greu de utilizat în calculele în care ele intervin, avem avantajul că putem merge mai departe, cu ajutorul programului, pentru a obţine alte caracteristici ale suprafeţelor. Astfel, utilizând

```
% coeficienţii primei forme fundamentale
             E=simplify(-x_u^2+y_u^2+z_u^2);
             F= simplify(-x_u*x_v+y_u*y_v+ z_u*z_v);
             G= simplify(-x_v^2+y_v^2+z_v^2);
% norma vectorului normal la suprafaţa
             NN=simplify(-N1^2+N2^2+N3^2);
% componentele vectorului normal la suprafaţa
             nx=N1/NN; ny=N2/NN; nz=N3/NN;
% derivatele parţiale ale vectorului normal la suprafaţa
             nx_u=diff(nx,u); nx_v=diff(nx,v);
             ny_u=diff(ny,u); ny_v=diff(ny,v);
             nz_u=diff(nz,u); nz_v=diff(nz,v);
% coeficienţii celei de a doua forme fundamentale
             L=simplify(-nx_u*x_u+ny_u*y_u+nz_u*z_u);
             M=simplify(-nx_u*x_v+ny_u*y_v+nz_u*z_v);
             N=simplify(-nx_v*x_v+ny_v*y_v+nz_v*z_v);
% curbura Gaussiana
             K=simplify((L*N-M^2)/(E*G-F^2));
% curbura medie
             H=simplify((E*N-2*F*M+G*L)/(2*(E*G-F^2)));
```

se pot găsi curbura Gaussiană şi curbura medie a suprafeţei paralele, sau, similar, alte elemente ale geometriei suprafeţelor.

Performanţele deosebite fac din pachetul de programe Matlab un „mediu" de lucru util pentru multe categorii de utilizatori.

Bibliografie:

1. Ghinea M., Fireţeanu V. MATLAB – Calcul numeric, grafică, aplicaţii. - Bucureşti: Teora, 2003.
2. Kühnel W. Differential Geometry. Curves – Surfaces – Manifolds // Student Mathematical Library, vol.16, AMS, 2002.
3. Patriciu A.-M. H_1 – helicoidal surface and its parallel surfaces at a certain distance in 3–dimensional Minkowski space $\mathbf{R}_1^3$ (va apare în Proceedings of the International Student Conference on Pure and Applied Mathematics, Iaşi, Romania, July 12-16, 2010).
4. Patriciu A.-M. Some results on parallel surfaces in 3–dimensional Minkowski space $\mathbf{R}_1^3$, preprint.

Prezentat la 13.09.2010