# CRITERII NOETHERIENE PENTRU ECUAȚII INTEGRALE SINGULARE PERTURBATE CU OPERATORI CU NUCLEE OMOGENE

***Diana AFTENI*[*], *Vasile NEAGA***

*Catedra Analiză Matematică şi Ecuații Diferențiale*
*[*]Universitatea de Stat din Tiraspol*

In this paper one class of perturbated integral singular operators with homogeneous kernels operators is studied. The Noetherian criteries and formulas for the calculation of indexes of these operators are established.

Fie $C(\overline{R})$ mulțimea tuturor funcțiilor continue pe axa reală $R=(-\infty,+\infty)$ pentru care există limitele finite $a(\pm\infty)=\lim\limits_{n\to\pm\infty} a(x)$ şi egale: $a(+\infty)=a(-\infty)$ $(a\in C(\overline{R}))$, notate în continuare cu $a(\infty)$. Notăm cu $L_p^\gamma = L_p\left(R,|x|^\gamma\right)$ spațiul $L_p$ pe $R$ cu ponderea $\rho(x)=|x|^\gamma$ $(1<p<+\infty,\ -1<\gamma<p-1)$ în care norma se defineşte în felul următor:

$$\|\varphi\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^p |x|^\gamma\, dx\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Este cunoscut că operatorul integral singular

$$\widetilde{A}\varphi = a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy, \tag{2}$$

cu coeficienții $a,b\in C(\overline{R})$, este noetherian în spațiul $L_p^\gamma$ dacă şi numai dacă

$$a(x)\pm b(x)\neq 0,\ \forall x\in\overline{R}. \tag{3}$$

În aceste condiții, indicele operatorului $\widetilde{A}$, $Ind\widetilde{A}$, se calculează cu ajutorul formulei

$$Ind\widetilde{A} = \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{a(x)+b(x)}{a(x)-b(x)}\right\}_{x=-\infty}^{+\infty}. \tag{4}$$

În prezenta lucrare se consideră operatori integrali singulari $A$

$$A\varphi = \left(\widetilde{A}\varphi\right)(x) + c(x)\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)\varphi(y)dy, \tag{5}$$

perturbați cu operatori integrali singulari cu nuclee $k(x,y)$ omogene de ordinul -1,

$$k(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{-1}k(x,y),\ \lambda>0.$$

Necesitatea studiului operatorului de forma (5) este justificată prin faptul că astfel de operatori apar în rezultatul reducerii operatorilor cu translații la operatori singulari fără translații.

Scopul lucrării constă în stabilirea condițiilor noetheriene pentru operatorii de forma (5) şi în determinarea formulei pentru calcularea indicilor acestor operatori. Se demonstrează că condițiile (3) rămânând necesare nu devin şi suficiente, în care operatorii de forma (5) sunt noetherieni. În aşa fel, perturbarea operatorului $\widetilde{A}$ cu termenul

$$(cK\varphi)(x) = c(x)\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)\varphi(y)dy$$

influențează condițiile noetheriene ale lui $\widetilde{A}$. Indicele operatorului $A$ se exprimă prin numărul de rotații în jurul originii de coordonate a valorilor unei funcții, numită simbol al operatorului $A$. Din formula pentru calcularea indicelui operatorului $A$ rezultă că, în general, $Ind\left(\widetilde{A}+cK\right)\neq Ind\widetilde{A}$. Rezultatele enumerate sunt bazate atât pe un şir de proprietăţi ale operatorilor de forma $K$, care sunt stabilite în prezenta lucrare, cât şi pe unele proprietăţi ale operatorilor integrali de tip Wiener şi Hopf.

### 1. Compacitatea unor operatori integrali cu nuclee omogene

***Teorema 1.1.*** (*a se vedea* [1]). *Fie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|k(\pm 1,y)||y|^{-\frac{1}{p}}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|k(y,\pm 1)||y|^{-\frac{1}{q}}dy<+\infty,\quad (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1),\tag{1.1}$$

*atunci operatorul* $(K\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy$ *este mărginit în spațiul* $L_p(R)$.

În continuare, de rând cu operatorul $K$, vom avea nevoie şi de operatorul

$$K_1\varphi=(SK\varphi)(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k(t,y)}{t-x}dy$$

pentru care condiția (1.1) are forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^{-\frac{1}{p}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k(t,y)}{t\pm 1}dt\right|<+\infty .\tag{1.2}$$

Observăm că condiția (1.1) exclude cazul în care nucleul $k(x,y)$ al operatorului $K$ coincide cu nucleul $(x-y)^{-1}$ al lui Cauchy.

Vom determina condiții similare cu (1.1) şi (1.2) pentru spațiul $L_p^{\gamma}$.

***Lema 1.1***. *Fie*

$$L_p^{\gamma}=\left\{\varphi/|x|^{\frac{\gamma}{p}}\varphi(x)\in L_p(R)\right\},\|\varphi\|_{L_p^{\gamma}}=\left\|\varphi(x)\cdot x^{\frac{\gamma}{p}}\right\|_{L_p}.$$

*Dacă nucleul operatorului* $K$ *verifică condiția*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|k(\pm 1,y)||y|^{-\frac{1+\gamma}{p}}dy<+\infty,\tag{1.3}$$

*atunci operatorul* $K$ *este mărginit în spațiul* $L_p^{\gamma}$.

***Demonstrație.*** Fie $k(x,y)$ verifică condiția (1.3) şi

$$K_1\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{x}{y}\right|^{\frac{\gamma}{p}}k(x,y)\varphi(y)dy\tag{1.4}$$

Atunci uşor se verifică că operatorul $K$ este mărginit în spațiul $L_p^{\gamma}$ dacă şi numai dacă operatorul $K_1$ este mărginit în spațiul $L_p$. Nucleul $k_1(x,y)=\left|\frac{x}{y}\right|^{\frac{\gamma}{p}}k(x,y)$ este omogen de ordinul -1. Verificăm condiția (1.1). Avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|k_1(\pm 1,y)|\cdot|y|^{-\frac{1}{p}}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|k(\pm 1,y)|\cdot|y|^{-\frac{1+\gamma}{p}}<+\infty$$

şi deci $K_1$ este mărginit în $L_p$. Lema este demonstrată.

Condiții similare cu (1.2) pentru operatorul $K$ în spațiul $L_p^\gamma$ au forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{-\frac{1+\gamma}{p}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(t,y)}{t \pm 1} dt \right| < +\infty \tag{1.5}$$

pe care, de asemenea, le vom considera verificate.

Observăm că condițiile impuse nucleului $k(x,y)$ în spațiul $L_p^\gamma$ de asemenea exclud cazul în care $k(x,y) = (x-y)^{-1}$.

***Teorema 1.2.*** *Fie funcția $k(x,y)$ omogenă de ordinul -1 verifică condiția (1.3) și $\delta(x) \in C(\overline{R})$. Operatorul*

$$(\delta K)(x) = \delta(x) \int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)\varphi(y)dy$$

*este compact în spațiul $L_p^\gamma$ dacă și numai dacă $\delta(0) = \delta(\infty) = 0$.*

Demonstrația acestei teoreme pentru $\gamma = 0$, adică pentru spațiul $L_p$, poate fi găsită în lucrarea lui N.Karapetianț [2]. Pentru spațiul $L_p^\lambda$ teorema poate fi demonstrată în mod similar ca și lema 1.1, trecând de la operatorul $K$ în spațiul $L_p^\lambda$ la operatorul $K_1$ în spațiul $L_p$.

***Teorema 1.3.*** *Dacă operatorul $A = \widetilde{A} + cK$ este noetherian în spațiul $L_p^\lambda$, atunci operatorul $\widetilde{A}$ de asemenea este noetherian. Adică, condițiile*

$$a(x) \pm b(x) \neq 0, \forall x \in \overline{R},$$

*sunt necesare în care operatorul $A$ este noetherian.*

***Demonstrație.*** Repetând raționamentele de la lema 1.1 putem considera $\gamma = 0$. Să admitem contrariul: adică, presupunem că $A$ este noetherian, iar $a(x) + b(x)$ se anulează într-un punct $x_0$. Considerăm cazul $x_0 = \infty$, iar apoi $x \neq 0$. Deci, fie $a(\infty) + b(\infty) = 0$. Conform stabilității proprietății operatorului de a fi de tip noetherian, există un $\delta > 0$ încât orice operator $B$ care verifică condiția $\|A - B\| < \delta$ este de asemenea noetherian și $IndB = IndA$. Notăm prin $B$ următorul operator

$$B = \widetilde{a}I + \widetilde{b}S + cK,$$

unde funcțiile $\widetilde{a}$ și $\widetilde{b}$ sunt alese în felul următor: 1) $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in C(\overline{R})$; 2) $\widetilde{a}(x) = a(x)$ și $\widetilde{b}(x) = b(x)$ pentru $x \in (-\Delta + 1, \Delta - 1)$, $(\Delta > 0)$; 3) $\widetilde{a}(x) + \widetilde{b}(x) = 0$ pentru $x \in (-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, +\infty)$, iar $\Delta$ este ales în așa fel încât $\|A - B\| < \delta$. Deci, $B$ este noetherian. Fie funcția $\omega \in C^\infty(\overline{R})$ (indifinit derivabilă ) care verifică condițiile

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, \textit{pentru} & x \in (-\infty, \Delta) \cup (\Delta + 3, +\infty), \\ 0, \textit{pentru} & x \in [\Delta + 1, \Delta + 2], \\ 0 \le \omega(x) \le 1, \ \textit{pentru} & x \in [\Delta, \Delta + 1] \cup [\Delta + 2, \Delta + 3]. \end{cases}$$

Exprimăm operatorul $B$ sub forma

$$B = (\widetilde{a} + \widetilde{b})P + (\widetilde{a} - \widetilde{b})Q + cK,$$

unde $P = \frac{1}{2}(I + S), Q = \frac{1}{2}(I - S)$ și

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - x} dy. \tag{1.6}$$

Atunci, $B(1-\omega)P = (\widetilde{a}+\widetilde{b})(1-\omega)P + cK(1-\omega)P + T$, unde $T$ este un operator compact. Evident, $(\widetilde{a}+\widetilde{b})(1-\omega) \equiv 0$ şi operatorul $K(1-\omega)P$ este compact. Prin urmare, $B(1-\omega)P = T_1$ şi $B = B[(1-\omega+\omega)P+Q] = B(\omega P + Q) + T_3$ şi din această egalitate rezultă că operatorul $\omega P + Q$ este noetherian, ceea ce este imposibil, deoarece $\omega(x) = 0, x \in (\Delta+1, \Delta+2)$. Fie $x_0 = 0$ (mai jos vom arăta că $x_0$ nu poate fi diferit de zero). Vom aplica raționamente similare. Considerăm operatorul $B = \widetilde{a}I + \widetilde{b}S + cK$ încât $B$ să fie noetherian şi $\widetilde{a}(x) + \widetilde{b}(x)$ să fie zero pentru $x \in \left(-\frac{1}{\Delta}, \frac{1}{\Delta}\right)$, unde numărul real $\Delta$ este ales în aşa fel încât $\|A - B\| < \delta$. Prin $\beta \in C^{\infty}(R)$ vom nota funcția

$$\beta(x) = \begin{cases} 1, \textit{pentru} \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{4\Delta}\right) \cup \left(\frac{1}{\Delta}, +\infty\right), \\ 0, \textit{pentru} \quad x \in \left[\frac{1}{3\Delta}, \frac{1}{2\Delta}\right], \\ 0 \le \beta(x) \le 1, \textit{pentru} \quad x \in \left(\frac{1}{4\Delta}, \frac{1}{3\Delta}\right) \cup \left(\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{\Delta}\right). \end{cases}$$

Atunci $(\widetilde{a}+\widetilde{b})(1-\beta) \equiv 0$ şi $N(1-\beta)P = T_4$. Atunci $N = N(\beta P + Q) + T_5$ şi obținem că $\beta P + Q$ este noetherian, ceea ce este imposibil. Cazul în care $a(x_0) - b(x_0) = 0$ se studiază în mod similar. Teorema este demonstrată.

În spațiul $L_p(0,a)$ considerăm ecuația

$$\varphi(x) - \int_0^a k(x,y)\varphi(y)dy = f(x),\ 0 < x < a, \tag{1.7}$$

unde $k(x,y)$ este o funcție omogenă de ordinul -1 şi verifică condiția (1.1). Studiul ecuației (1.7) este bazat pe relația acestei ecuații cu ecuația lui Wiener şi Hopf. Cu ajutorul schimbului de variabilă $x = ae^{-t}, y = ae^{-\tau}\ (0 \le t, \tau < +\infty)$ ecuația (1.7) se reduce la o ecuație Wiener şi Hopf cu nuclee sumabile. Notăm prin $W$ următorul operator

$$(W\varphi)(t) = a^{1/p} e^{-t/p} \varphi(ae^{-t}). \tag{1.8}$$

***Lema 1.2.*** *Operatorul $W$ este continuu din spațiul $L_p(0,a)$ în spațiul $L_p(R^+)$ şi inversabil:*

$$(W^{-1}\psi)(x) = x^{-1/p}\psi\left(-\ln\frac{x}{a}\right). \tag{1.9}$$

***Demonstrație.*** În mod direct se verifică că $W \cdot W^{-1} = W^{-1}W = I$. Demonstrăm continuitatea lui $W$. Fie $\varphi \in L_p(0,a)$; atunci, făcând substituția $t = -\ln\frac{x}{a}$, $dt = -\frac{1}{x}dx$, $0 \le x \le a$, avem:

$$\left\|(W\varphi)(t)^p\right\| = \int_0^{\infty} ae^{-t}\left|\varphi(ae^{-t})\right|^p dt = \int_0^a |\varphi(x)|^p dx = \|\varphi\|^p$$

şi lema este demonstrată.

***Teoremă 1.4.*** *Operatorul $H$, determinat de partea stângă a relației (1.7),*

$$H\varphi = \varphi(x) - \int_0^a k(x,y)\varphi(y)dy$$

*este noetherian în spațiul* $L_p(0,+\infty)$ *dacă şi numai dacă*

$$h(\lambda) = 1 - K(i\lambda - \frac{1}{p} + 1) \neq 0, \lambda \in R, \tag{1.10}$$

*unde*

$$K(z) = \int_0^{+\infty} k(1, y) y^{z-1} dy. \tag{1.11}$$

***Demonstrație.*** Fie $W$ operatorul de la lema 1.2. Atunci, uşor se verifică că

$$WHW^{-1} = M, \tag{1.12}$$

unde $M$ este operatorul lui Wiener şi Hopf ,

$$(M\psi)(t) = \psi(t) - \int_0^{+\infty} e^{\frac{t-\tau}{q}} k(1, e^{t-\tau}) \psi(\tau) d\tau, \ (\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}).$$

Aşa cum se ştie, operatorul $M$ este noetherian dacă şi numai dacă

$$1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t/q} k(1.e^t) e^{i\lambda t} dt \neq 0, \lambda \in R. \tag{1.13}$$

În (1.13 ) facem schimbul de variabilă $e^t = y$ şi obținem:

$$1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t/q} k(1, e^t) e^{i\lambda t} dt = 1 - \int_0^{+\infty} k(1, y) y^{(\frac{1}{q} + i\lambda) - 1} dy = 1 - K(i\lambda - \frac{1}{p} + 1) \neq 0,$$

unde $K(z) = \int_0^{+\infty} k(1, y) y^{z-1} dy$ reprezintă transformata lui Mellin a funcției $k(1, y)$. Teorema este demonstrată.

***Observația 1.*** Dacă operatorul $H$ se consideră în spațiul $L_p^\gamma$, atunci, cu raționamentele de la lema 1.1, operatorul respectiv din relația (1.12) are forma

$$(M\psi)(t) = \psi(t) - \int_0^{+\infty} e^{\left(\frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p}\right)(t-\tau)} k(1, e^{t-\tau}) \psi(\tau) d\tau$$

şi condițiile noetheriene se vor exprima în felul următor:

$$h(\lambda) = 1 - K\left(i\lambda + 1 - \frac{1+\gamma}{p}\right) \neq 0, \lambda \in \overline{R}. \tag{1.14}$$

***Observația 2.*** Funcția

$$h(\lambda) = 1 - K(i\lambda - \frac{1}{p} + 1) \ (h(\lambda) = 1 - K(i\lambda + 1 - \frac{1+\gamma}{p}))$$

se numeşte simbolul operatorului $H$ în spațiul $L_p$ ($L_p^\gamma$).

***Observația 3.*** Rezultatele referitoare la condițiile noetheriene pentru operatorii (1.7) pot fi extinse şi la cazul sistemelor de ecuații de forma (1.7). În acest caz, dacă $k(x, y)$, matricea cu elementele de funcții omogene de ordinul -1 reprezintă nucleul operatorului $K$, atunci condițiile noetheriene (1.10) şi (1.14) vor fi înlocuite cu

$$\det(E - K(i\lambda - \frac{1}{p} + 1)) \neq 0$$

şi, respectiv, cu

$$\det(E - K(i\lambda + 1 - \frac{1+\gamma}{p})) \neq 0 \cdot$$

Mai menționăm că indicele operatorului noetherian $H$ se calculează din formula

$$IndH = -indh(\lambda) \ \ (indH = -ind \det h(\lambda)). \tag{1.15}$$

### 2. Reducerea la un sistem de ecuații în convoluții

În spațiul $L_p^\gamma$ vom considera operatorul

$$(A\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy + c(x)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy, \tag{2.1}$$

unde $a,b,c \in C(\overline{R})$, $k(x,y)$ omogenă și verifică condițiile (1.1) și (1.2). Vom stabili condiții noetheriene pentru $A$. În baza teoremei 1.3 putem considera îndeplinite condițiile

$$a(x)+b(x) \neq 0, x \in \overline{R}. \tag{2.2}$$

Operatorul $A$ se transcrie

$$A = aI + bS + cK. \tag{2.3}$$

***Teorema 2.1.*** *Operatorul $A$ este de tip local, adică pentru orice două mulțimi $U$ și $V \subset \overline{R}$ închise și disjuncte operatorul $P_U A P_V$ este compact în $L_p^\gamma$.*

***Demonstrație.*** Așa cum operatorul $I$ și $S$ verifică condițiile teoremei, rămâne de demonstrat că operatorul $K$ este de tip local. Dacă mulțimile $U$ și $V$ nu conțin punctele $x=0$ și $x=\infty$, atunci devine evident că $P_U A P_V$ este un operator compact. Vom considera cazul în care $0 \in U$ și $\infty \notin V$. Celelalte cazuri se analizează în mod asemănător. Fie $U=[a,b]$, construim șirul de funcții continue

$$c_n(x) = \begin{cases} 0, \textit{ pentru} & x \in (-\infty,a) \cup (-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \cup (b,+\infty), \\ 1, \textit{ pentru} & x \in \left[a+\frac{1}{n},-\frac{2}{n}\right] \cup \left[\frac{2}{n},b-\frac{1}{n}\right], \\ 0 \le c_n(x) \le 1, \textit{ pentru} & x \in \left[a,a+\frac{1}{n}\right] \cup \left[-\frac{2}{n},-\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \cup \left[b-\frac{1}{n},b\right], \end{cases} \tag{2.4}$$

$n \ge m_0$. Așa cum $c_n(0)=c_n(\infty)=0$, operatorii $P_U c_n K P_V$ sunt compacți.

Evaluăm norma diferenței $P_U K P_V - P_U c_n K P_V$. Fie $\varphi \in L_p(R)$. Avem:

$$\|(P_U K P_V - P_U c_n K P_V)\varphi\|^p = \int_{-\infty}^{+\infty}|t|^\gamma\left|P_U\int_{-\infty}^{+\infty}(k(t,\tau)-c_n(t)k(t,\tau))(P_V\varphi)(\tau)d\tau\right|^p dt =$$

$$= \int_a^b|t|^\gamma\left|(1-c_n(t))\int_V k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right|^p dt = \int_a^{a+\frac{1}{n}}|t|^\gamma\left|(1-c_n(t))\int_V k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right|^p dt +$$

$$+ \int_{-2/n}^{-1/n}|t|^\gamma\left|(1-c_n(t))\int_V k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right|^p dt + \int_{-1/n}^{1/n}|t|^\gamma\left|(1-c_n(t))\int_V k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right|^p dt +$$

$$+ \int_{1/n}^{2/n}|t|^\gamma\left|(1-c_n(t))\int_V k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right|^p dt + \int_{b-1/n}^{b}|t|^\gamma\left|(1-c_n(t))\int_V k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right|^p dt \tag{2.5}$$

Conform proprietății continuității absolute a integralei lui Lebesgue, fiecare termen din partea dreaptă a relației (2.5) tinde la zero. Deci, șirul de operatori compacți $P_U c_n K P_V$ tinde în normă la operatorul $P_U K P_V$ și teorema este demonstrată.

***Consecința 2.1.*** *Operatorul $KhI - hK$ este compact în $L_p^\gamma$ pentru orice funcție $h \in C(\overline{R})$.*

***Teorema 2.2.*** *Pentru orice $x \in \overline{R}/\{0,\infty\}$ operatorul $cK, c \in C(\overline{R})$ este echivalent cu operatorul nul. În punctele $x=0$ și $x=\infty$, $cK$ este echivalent cu operatorii $c(0)K$ și cu $c(\infty)K$.*

***Demonstrație.*** Amintim (*a se vedea* [3]) că doi operatori $A$ şi $B(\in L(L_p(\Gamma,\rho)))$ de tip local se numesc echivalenți într-un punct $\tau\in\Gamma$, $A\sim B$, dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există o vecinătate $U$ a lui $\tau$ astfel încât

$$\inf_{T\in\mathfrak{T}}\|(A-B)P_u+T\|<\varepsilon, \tag{2.6}$$

unde $\mathfrak{T}$ este mulțimea operatorilor compacți în $L_p(\Gamma,\rho)$, iar $P_U$ este operatorul de multiplicare la funcția caracteristică a lui $U$.

Avem
$$(c-c(0))KP_U\,\varphi=(c(x)-c(0))\int_U k(x,y)\varphi(y)dy, \tag{2.7}$$

unde $U$ este o vecinătate a punctului $x=0$. Fie $\delta(y), 0\le\delta(y)\le1$ o funcție continuă pe $R$ egală cu 1 pentru $y\in U$ şi egală cu zero pentru $y\in V$, unde $V$ este o vecinătate a lui $x=0$, $V\supset U$, pe care o vom alege mai jos. În baza teoremei 2.1 putem scrie:

$$(c(x)-c(0))\int_U k(x,y)\varphi(y)dy=(c(x)-c(0))\int_U \delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy=$$

$$=(c(x)-c(0))\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy-(c(x)-c(0))\int_{V/U}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy=$$

$$=(c(x)-c(0))\delta(x)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy-(c(x)-c\ (0))\int_{V/U}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy+T_1\varphi, \tag{2.8}$$

unde $T_1$ este operator compact în $L_p^\gamma$. În relația (2.8) am folosit faptul că $Kh-hK$ este compact pentru orice funcție $h$ continuă pe $\overline{R}$. Aşa cum funcția $(c(x)-c(0))\delta(x)$ se anulează în punctele $x=0$ şi $x=\infty$, rezultă că operatorul

$$(c(x)-c(0))\delta(x)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy \tag{2.9}$$

este compact în $L_p^\gamma$. Atunci, din relația (2.8) obținem:

$$\inf_{T\in\mathfrak{T}}\|(c(x)-c(0))KP_U\varphi+T\varphi\|\le\left\|(c(x)-c(0))\int_{V\setminus U}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy\right\|\le$$

$$\le 2\max_{x\in\overline{R}}|c(x)|\left\|\int_{V\setminus U}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy\right\|,\quad (\|\varphi\|=1). \tag{2.10}$$

Termenul din dreapta al relației (2.10) poate fi făcut mai mic decât orice număr $\varepsilon>0$ pe baza alegerii lui $V(\mu(V\setminus U)<\eta)$. În mod similar se demonstrează că $c(x)K\sim c(\infty)K$ în $x=\infty$.

Fie $x\ne0$ şi $x\ne\infty$. Putem considera vecinătatea $U$ a punctului $x$ încât $0\notin U$ şi $\infty\notin U$. Construim funcția $\delta(y)$ în felul următor. Considerăm o vecinătate $V$, $V\supset U$, a punctului $x$, încât $0\notin V$ şi $\infty\notin V$. Definim funcția continuă $\delta$ astfel:

$$\delta(y)=\begin{cases}1, & dac\text{з}\quad y\in U,\\ 0, & dac\text{з}\quad y\in\overline{R}\setminus V,\\ 0\le\delta(y)\le1, & dac\text{з}\quad y\in V\setminus U.\end{cases}$$

Atunci,

$$c(x)KP_U\varphi=c(x)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)(P_U\varphi)(y)dy=c(x)\int_U k(x,y)\varphi(y)dy=c(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy-$$

$$-c(x)\int_{V\setminus U}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy=c(x)\delta(x)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy-c(x)\int_{V\setminus U}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy+T_2\varphi \tag{2.11}$$

Aşa cum $c(o)\delta(0) = c(\infty)c(\infty) = 0$, operatorul

$$c(x)\delta(x)\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)\varphi(y)dy \tag{2.12}$$

este compact în $L_p^\gamma$. Ținând cont de aceasta şi de relația (2.11), obținem:

$$\inf_{T\in\mathfrak{T}}\left\|c(x)KP_U\varphi + T\varphi\right\| \le \left\|c(x)\int_{V\setminus U}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy\right\| \le$$

$$\le \max_{x\in \bar{R}}|c(x)|\left\|\int_{V\setminus U}\delta(y)k(x,y)\varphi(y)dy\right\|, \quad (\|\varphi\| = 1),$$

şi ultimul termen tinde la zero atunci când $\mu(V\setminus U)\to 0$. Cazul $x=\infty$ se studiază în mod similar. Teorema este demonstrată.

Revenim la operatorul (2.1)

$$(A\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy + c(x)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy.$$

Din teoremele 2.1, 2.2 şi rezultatele lui I.B. Simonenko referitoare la operatorii de tip locali deducem că operatorul $A$ este noetherian în spațiul $L_p^\lambda$ dacă şi numai dacă

1) $a(x)\pm b(x)\neq 0$;

2) operatorii cu coeficienții constanți

$$(A_0\varphi)(x) = a(0)\varphi(x) + \frac{b(0)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy + c(0)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy,$$

$$(A_\infty\varphi)(x) = a(\infty)\varphi(x) + \frac{b(\infty)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy + c(\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy$$

sunt noetherieni. Înmulțim operatorul $A$ din stânga la regularizatorul operatorului $aI + bS$,

$$R\varphi = \frac{a(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\varphi(x) - \frac{b(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy.$$

Obținem:

$$(RA\varphi)(x) = \varphi(x) + \frac{a(x)c(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy - \frac{b(x)c(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t-x}\int_{-\infty}^{+\infty}k(t,y)\varphi(y)dy + T,$$

care poate fi transcris sub forma

$$RA = I + \frac{ac}{a^2-b^2}K - \frac{bc}{a^2-b^2}K^1,$$

unde

$$K^1\varphi = SK\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty}k^1(x,y)dy, \quad K^1(x,y) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k(t,y)}{t-x}dt = = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k(t,signy)}{t|y|-x}dt.$$

Nucleul operatorului $K_1$ este omogen şi verifică condițiile de continuitate (1.1) şi (1.2).

Determinăm condițiile în care operatorul $RA$ este local noetherian în punctele $x=0$ şi $x=\infty$. Pentru aceasta trebuie de studiat operatorii

$$(R_0A_0\varphi)(x) = \varphi(x) + \frac{a(0)c(0)}{a^2(0)-b^2(0)}K\varphi - \frac{b(0)c(0)}{a^2(0)-b^2(0)}K^1\varphi \tag{2.13}$$

$$(R_\infty A_\infty\varphi)(x) = \varphi(x) + \frac{a(\infty)c(\infty)}{a^2(\infty)-b^2(\infty)}K\varphi - \frac{b(\infty)c(\infty)}{a^2(\infty)-b^2(\infty)}K^1\varphi \tag{2.14}$$

cu coeficienți constanți. Evident, condițiile noetheriene ale acestor operatori vor fi similare condițiilor noetheriene ale ecuației integrale

$$\varphi(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\alpha k(x,y)+\beta k^{1}(x,y)\right]\varphi(y)dy=\psi(x),\ x\in R,\ \alpha,\ \beta\in \mathbb{C}, \tag{2.15}$$

în care vom nota prin $\widetilde{k}(x,y)=\alpha k(x,y)+\beta k^{1}(x,y)$. Deci, ecuația (2.15) devine

$$\varphi(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{k}(x,y)\varphi(y)dy=\psi(x), x\in R. \tag{2.16}$$

Notăm prin $M$ operatorul definit de partea stângă a ecuației (2.16). Fie $V: L_p^{\gamma}(R)\to L_p^{\gamma}(R^{+})\times L_p^{\gamma}(R^{+})$ determinat de relația $(V\varphi)(x)=(\varphi(x),\varphi(-x))=(\varphi_1(x),\varphi_2(x))$. Evident, operatorul $V$ este liniar, continuu şi inversabil. Operatorul $VMV^{-1}$ în spațiul $L_p^{\gamma}(R^{+})\times L_p^{\infty}(R^{+})$ poate fi scris sub forma

$$VMV^{-1}=\begin{Vmatrix} M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{Vmatrix}, \tag{2.17}$$

unde $M_{ij}\in L\left(L_p^{\gamma}(R^{+})\right)$. Vom determina aceşti operatori. Pentru aceasta vom transcrie ecuația (2.16) sub formă de sistem de două ecuații în raport cu $\varphi_1$ şi $\varphi_2$ (proiectăm ecuația $M\varphi=\psi$ pe semiaxa $R^{+}$). Obținem:

$$\begin{cases}\varphi(x)+\int_{-\infty}^{0}\widetilde{k}(x,y)\varphi(y)dy+\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(x,y)\varphi(y)dy=\psi(x), x\in R^{+},\\ \varphi(-x)+\int_{-\infty}^{0}\widetilde{k}(-x,y)\varphi(y)dy+\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(-x,y)\varphi(y)dy=\psi(-x), x\in R^{+}.\end{cases} \tag{2.18}$$

În integralele cu limitele $(-\infty,0)$ facem schimbul de variabilă $x=-t$ şi apoi revenim la aceeaşi variabilă. Sistemul (2.18) devine echivalent cu sistemul

$$\begin{cases}\varphi_1(x)+\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(x,-y)\varphi_2(y)dy+\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(x,y)\varphi_1(y)dy=\psi_1(x),\\ \varphi_2(x)+\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(-x,-y)\varphi_2(y)dy+\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(-x,y)\varphi_1(y)dy=\psi_2(x).\end{cases} \tag{2.19}$$

Notăm prin $\widetilde{K}_{ij}(i,j=1,2)$ următorii operatori:

$$\left(\widetilde{K}_{11}h\right)(x)=\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(x,y)h(y)dy,\quad \left(\widetilde{K}_{12}h\right)(x)=\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(x,-y)h(y)dy,$$

$$\left(\widetilde{K}_{21}h\right)(x)=\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(-x,y)h(y)dy,\quad \left(\widetilde{K}_{22}h\right)(x)=\int_{0}^{+\infty}\widetilde{k}(-x,-y)h(y)dy\ ,$$

atunci, ținând cont de (2.19), operatorul $VMV^{-1}$ poate fi scris sub forma

$$VMV^{-1}=\begin{Vmatrix} I+\widetilde{K}_{11} & \widetilde{K}_{12}\\ \widetilde{K}_{21} & I+\widetilde{K}_{22}\end{Vmatrix}, \tag{2.20}$$

care reprezintă un operator studiat în teorema 1.4. Dacă notăm prin $\widetilde{K}_{ij}(x,y),\ i,j=1,2,$ nucleele operatorului $\widetilde{K}_{ij}$, atunci condițiile noetheriene (1.15) pentru operatorul $VMV^{-1}$ (adică şi pentru $M$ ) au forma

$$\det\begin{Vmatrix} 1+\widetilde{K}_{11}(z) & \widetilde{K}_{12}(z)\\ \widetilde{K}_{21}(z) & 1+\widetilde{K}_{22}(z)\end{Vmatrix}\neq 0, \tag{2.21}$$

unde

$$\widetilde{K}_{ij}(x)=\int_0^{+\infty}\widetilde{k}_{ij}(1,y)y^{z-1}dy,\quad z=i\lambda+1-\frac{1+\gamma}{p},\ \lambda\in\overline{R}. \tag{2.22}$$

Pentru a aplica aceste rezultate pentru operatorii $R_0A_0$ şi $R_\infty A_\infty$ trebuie de înlocuit $\alpha$ şi $\beta$ respectiv cu

$$\alpha_0=\frac{a(0)c(0)}{a^2(0)-b^2(0)},\beta_0=-\frac{b(0)c(0)}{a^2(0)-b^2(0)}\text{ şi }\alpha_\infty=\frac{a(\infty)c(\infty)}{a^2(\infty)-b^2(\infty)},\beta_\infty=-\frac{b(\infty)c(\infty)}{a^2(\infty)-b^2(\infty)}.$$

Astfel, vom obține condițiile în care operatorul $A$ este local noetherian în punctele $x=0$ şi $x=\infty$. Rezultatele finale le vom formula după ce vom scrie în mod explicit simbolul operatorului $A$ în punctele $x=0$ şi $x=\infty$.

### 3. Forma explicită a simbolului operatorului $A$ în punctele $x=0$ şi $x=\infty$

Ținând cont de notațiile făcute în compartimentul precedent, în punctul $x=0$ avem:

$$\widetilde{K}_{11}(z)=\alpha_0\int_0^{+\infty}k(1,y)y^{z-1}dy-\beta_0\int_0^{+\infty}k^1(1,y)y^{z-1}dy=\alpha_0K_{++}(z)-\beta_0K^1_{++},$$

$$\widetilde{K}_{12}(z)=\alpha_0\int_0^{+\infty}k(1,-y)y^{z-1}dy-\beta_0\int_0^{+\infty}k^1(1,-y)y^{z-1}dy=\alpha_0K_{+-}(z)-\beta_0K^1_{+-},$$

$$\widetilde{K}_{21}(z)=\alpha_0\int_0^{+\infty}k(-1,y)y^{z-1}dy-\beta_0\int_0^{+\infty}k^1(-1,y)y^{z-1}dy=\alpha_0K_{-+}(z)-\beta_0K^1_{-+},$$

$$\widetilde{K}_{22}(x)=\alpha_0\int_0^{+\infty}k(-1,-y)y^{z-1}dy-\beta_0\int_0^{+\infty}k^1(-1,-y)y^{z-1}dy=\alpha_0K_{--}(z)-\beta_0K^1_{--},$$

unde $z=i\lambda+1-\dfrac{1+\gamma}{p}$ şi $0<\operatorname{Re}z=1-\dfrac{1+\gamma}{p}<1$ .

Pentru $x_0=\infty$ în expresiile de mai sus trebuie de înlocuit $\alpha_0$ şi $\beta_0$ respectiv prin $\alpha_\infty$ şi $\beta_\infty$.

Folosind integrala

$$\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{y+u}dy=\begin{cases}\pi\cdot\operatorname{cosec}z\pi\cdot u^{\alpha-1},\ u>0,\\-\pi\cdot ctgz\pi\cdot(-u)^{\alpha-1},\ u<0,\end{cases}\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1\ ,$$

vom exprima funcțiile $K^1_{\pm\pm}$ prin $K_{\pm\pm}$.

Au loc următoarele relații:

$$K^1_{++}(z)=\frac{i}{\sin z\pi}[\cos z\pi K_{++}(z)+K_{-+}(z)],\ K^1_{-+}(z)=\frac{-i}{\sin z\pi}[\cos z\pi K_{-+}(z)+K_{++}(z)]\ ,$$

$$K^1_{+-}(z)=\frac{i}{\sin(z\pi)}[\cos(z\pi)K_{+-}(z)+K_{--}(z)],\ K^1_{--}(z)=\frac{-i}{\sin z\pi}[\cos z\pi K_{--}(z)+K_{+-}(z)].$$

Vom demonstra ultima dintre aceste patru relații. Celelalte se deduc în mod similar.

$$K^1_{--}(z)=\int_0^{+\infty}k^1(-1,-y)y^{z-1}dy=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}y^{z-1}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k(t,-1)}{yt+1}dt=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}y^{z-1}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k(t,-1)}{t(y+1/t)}dt=$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k(t,-1)}{t}dt\int_0^{+\infty}\frac{y^{z-1}}{y+1/t}dt=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{k(t,-1)}{t}dt\int_0^{+\infty}\frac{y^{z-1}}{y+1/t}dt+\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{k(t,-1)}{t}dt\int_0^{+\infty}\frac{y^{z-1}}{y+1/t}dt=$$

$$=ictg(z\pi)\int_{-\infty}^{0}\frac{k(t,-1)}{t}\left(-\frac{1}{t}\right)^{z-1}dt-i\operatorname{cosec}(z\pi)\int_0^{+\infty}\frac{k(t,-1)}{t}\left(\frac{1}{t}\right)^{z-1}dt. \tag{3.1}$$

În prima integrală din partea dreaptă a egalității (3.1) facem substituția $t=-\frac{1}{y}$, iar în a doua substituția $t=\frac{1}{y}$, apoi revenim la variabila $t$. După un şir de transformări în care se foloseşte şi omogenitatea funcției $k(t,y)$ obținem:

$$K^1_{--}(z)=-i[ctg(z\pi)\int_0^{+\infty}k(-1,-t)t^{z-1}dt+\cos ec(z\pi)\int_0^{+\infty}k(1,-t)t^{z-1}dt]=$$

$$=\frac{-i}{\sin z\pi}[\cos z\pi K_{--}(z)+K_{+-}(z)].$$

Astfel, făcând un rezumat, obținem următoarea teoremă.

***Teorema 3.1.*** *Operatorul*

$$(A\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)+\frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy+c(x)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy,$$

*este noetherian în spațiul $L_p^\gamma$ dacă şi numai dacă sunt verificate condițiile:*

*1)* $a(x)\pm b(x)\neq 0, \forall x\in\overline{R}$;

*2)* $\det\sigma_0(z)=\det\begin{Vmatrix} I+\alpha_0K_{++}(z)-\beta_0K^1_{++}(z) & \alpha_0K_{+-}(z)-\beta_0K^1_{+-}(z)\\ \alpha_0K_{-+}(z)-\beta_0K^1_{-+}(z) & I+\alpha_0K_{--}(z)-\beta_0K^1_{--}(z)\end{Vmatrix}\neq 0$;

*3)* $\det\sigma_\infty(z)=\det\begin{Vmatrix} I+\alpha_\infty K_{++}(z)-\beta_\infty K^1_{++}(z) & \alpha_\infty K_{+-}(z)-\beta_\infty K^1_{+-}(z)\\ \alpha_\infty K_{-+}(z)-\beta_\infty K^1_{-+}(z) & I+\alpha_\infty K_{--}(z)-\beta_\infty K^1_{--}(z)\end{Vmatrix}\neq 0$.

*În aceste condiții indicele $\kappa$ al operatorului $A$ se calculează din formula*

$$\kappa=IndA=ind\frac{a(x)+b(x)}{a(x)-b(x)}+ind\frac{\det\sigma_0(z)}{\det\sigma_\infty(z)},\ z=i\lambda+1-\frac{1+\gamma}{p},\quad \lambda\in\overline{R}.$$

Mai menționăm că pentru $\kappa>0$ ecuația omogenă

$$A\varphi\equiv a(x)\varphi(x)+\frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy+c(x)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)\varphi(y)dy=0 \tag{3.2}$$

are $\kappa$ soluții liniar independente (aceleaşi pentru toate spațiile $L_p^\gamma$), iar ecuația neomogenă $A\varphi=f$ este rezolvabilă (necondiționat) pentru orice $f\in L_p^\gamma$. Pentru $\kappa<0$ ecuația omogenă nu are soluții netriviale, iar ecuația neomogenă $A\varphi=f$ este rezolvabilă dacă şi numai dacă funcția $f$ verifică următoarele condiții

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi_j(x)dx=0,\ j=\overline{1,\ |\kappa|}, \tag{3.3}$$

unde $\psi_j$ sunt toate soluțiile (în total $|\kappa|$ soluții) liniar independente ale ecuației

$$\overline{a(x)}\varphi(x)+\frac{\overline{b(x)}}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(y)}{y-x}dy+\overline{c(x)}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{k(x,y)}\psi(y)dy=0.$$

Pentru $\kappa=0$ operatorul $A$ este inversabil.

***Observație.*** Demonstrația afirmației teoremei 3.1, referitoare la indicele operatorului $A$, foloseşte teorema lui S. Nikolski, conform căreia produsul a doi operatori $B$ şi $C$ noetherieni este un operator noetherian şi $IndBC=IndB+IndC$, precum şi teorema despre simbolul ecuației generalizate Wiener şi Hopf. Amintim că ecuația generalizată Wiener şi Hopf este definită de egalitatea

$$(H\varphi)(x)=\begin{cases} x_1\varphi(x)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_1(x-t)\varphi(t)dt, x>0 \\ x_2\varphi(x)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_2(x-t)\varphi(t)dt, x<0 \end{cases} = f(x) \tag{3.4}$$

al cărei simbol are forma

$$\sigma(\lambda)=\begin{cases} x_1+\hat{h}_1(\lambda), \ \textit{pentru} \quad \lambda\in R^+, \\ x_2+\hat{h}_2(\lambda), \ \textit{pentru} \quad \lambda\in R^-, \end{cases} \tag{3.5}$$

unde $\hat{h}_j(\lambda)$ este transformata Fourier a funcției $h_j$.

**Referințe:**

1. Харди Г., Литтлвуд Д., Полия Г. Неравенства. - Москва, 1948. - 456 с.
2. Карапетянц Н.К. Полная непрерывность некоторых классов операторов типа свертки и с однородными ядрами // Известия вузов. Математика. - 1980. - №11. - С.41-49.
3. Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, I // Известия АН СССР. Математика. - 1965. - № 29, 3. - С.567-586.
4. Karapetyants N., Samko S. Equations with involutive operators. - Boston: Birkhauser, 2001. - 332 p.

*Prezentat la 27.03.2007*