CRITERII NOETHERIENE PENTRU ECUAȚIILE INTEGRALE SINGULARE CU INVOLUȚII GENERALIZATE

Vasile NEAGU

Catedra Analiză Matematică şi Ecuații Diferențiale

In the present work there is elaborated a scheme for the noetherian equations with one or more involutive operators.

Într-un şir de lucrări științifice sunt studiate diferite clase de ecuații involutive (discrete şi continue), integrale, integrale singulare şi alte ecuații care conțin termeni cu translații sau cu conjugare complexă. Problemele de bază abordate în studiul unor astfel de ecuații constau în determinarea condițiilor în care aceste ecuații sunt noetheriene, a condițiilor în care se admite o regularizare, în descrierea regularizatorului respectiv, precum şi în stabilirea formulelor de calculare a indicelui operatorului care generează ecuațiile date. Pentru ecuațiile singulare care nu conțin involuții sau care conțin un operator involutiv aceste probleme sunt studiate în monografiile elaborate de N.Mushelişvili, F.Gahov şi G.Litvinciuk.

În prezenta lucrare considerăm ecuațiile de forma

$$M\varphi = (A_1 + VA_2 + V^2 A_3 + ... + V^{n-1} A_n)\varphi = f \ , \tag{1}$$

unde V este un operator involutiv generalizat, adică $V^n = I$, iar operatorii A_j, $j = 1,2,...,n$, aparțin unei clase de operatori, ale căror proprietăți sunt bine studiate. Anumite clase de astfel de ecuații liniare au fost studiate şi în lucrările lui Z.Halilov, G.Agaev, Iu.Cerçkii, D.Przeworska-Rolewicz, S.Samko, N.Karapetianț ş.a. Însă, trebuie de menționat că, în esență, în lucrările acestor autori studiul este efectuat în cadrul teoriei ecuațiilor integrale singulare fără translații, care cuprinde doar cazul în care „*coeficienții*” A_j în egalitatea (1) sunt „*invarianți*” în raport cu operatorul V şi, în plus, se presupune că operatorii $A_j V - VA_j$ sunt compacți. Menționăm că în [1-2] pentru $n = 2$ au fost obținute criterii noetheriene şi formula pentru indicii ecuațiilor de forma (1) în condițiile în care operatorii A_j şi V verifică un anumit set de axiome.

Scopul acestei lucrări constă în construirea unei scheme generale pentru studiul ecuațiilor noetheriene cu unul sau mai mulți operatori involutivi în cazul în care $n > 2$. Această schemă se bazează pe anumite axiome care trebuie să fie verificate de către operatorii A_j şi V, pe proprietățile acestor operatori şi se aplică în studiul: 1) ecuațiilor integrale convolutive cu reflectare şi cu conjugare complexă; 2) ecuațiilor integrale singulare cu translații generalizate de tip Carleman; 3) ecuațiilor integrale singulare pe contururi deschise care conțin un grup finit de operatori de translații; 4) ecuațiilor integrale singulare cu translații şi cu coeficienți continui pe porțiuni. De menționat că această schemă poate fi aplicată şi în studiul altor clase de ecuații: de exemplu, în studiul ecuațiilor discrete cu involuții şi cu reflectare în spațiul l_p, $1 \le p \le \infty$.

I. Ecuații care conțin un operator involutiv generalizat

Fie $\boldsymbol{B}$ un spațiu Banach şi V un operator liniar şi mărgimit în $\boldsymbol{B}$ cu proprietatea $V^n = I$, $V^k \neq I$, $k = 1,2,...,n-1$, $n \ge 2$, adică operatorul V reprezintă o involuție generalizată. Vom presupune că sunt verificate următoarele două axiome:

Axioma 1. *Există un operator* $U \in L(\boldsymbol{B})$ *noetherian, astfel încât are loc relația*

$$UV - \varepsilon_n VU = T \, , \ \varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} \, ,$$

unde operatorul T *este compact în spațiul* $\boldsymbol{B}$.

Axioma 2. $A_j V = VA_j + T_j$, $j = 1,2,...,n$, *unde operatoirii* T_j *sunt compacți în spațiul* $\boldsymbol{B}$.

Teorema 1. *Fie operatorii* A_j, $j=1,2,...,n$, *şi* V *verifică axiomele 1 şi 2, atunci operatorul* M, *definit de relația (1), este noetherian în spațiul* $\boldsymbol{B}$ *dacă şi numai dacă operatorul matriceal*

$$\widetilde{M}=\left\| V^{j-1}A_{r+j-1}V^{-j+1}\right\|_{r,j=1}^{n},\ A_{n+k}=A_k\ , \tag{2}$$

este noetherian în spațiul $\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}\times\ldots\times\boldsymbol{B}$. *Dacă operatorul* $\widetilde{M}$ *este noetherian, atunci*

$$Ind\, M=\frac{1}{n}Ind\,\widetilde{M}.$$

Demonstrația acestei teoreme cu uşurință rezultă din identitatea

$$NK\widetilde{M}KN=n\left\|\delta_{rj}M^{(r-1)}\right\|, \tag{3}$$

în care

$$N=\left\|\varepsilon_n^{(r-1)(j-1)}I\right\|_{r,j=1}^{n},\ K=\left\|\delta_{rj}V^{r-1}\right\|_{r,j=1}^{n},\ M^{(s)}=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_n^{s(j-1)}V^{j-1}A_j\ ,$$

$s=0,1,2,...,n-1,\ M^0=M$ şi δ_{rj} este simbolul lui Kronecker.

Menționăm, că pentru $n=2$ teorema 1 a fost demonstrată în [2] şi operatorul $\widetilde{M}$ din teorema 1 are forma

$$\widetilde{M}=\left\|\begin{matrix}A_1 & A_2\\ VA_2V & VA_1V\end{matrix}\right\|.$$

II. Ecuații cu mai mulți operatori involutivi generalizați

Fie V şi W doi operatori involutivi generalizați de ordinul m şi, respectiv, n:

$$V^m=W^n=I;V^j\neq I,\ j=1,2,...,m-1;\ W^k\neq I,\ \ k=1,2,...,n-1.$$

Vom considera ecuația de forma (1), care conține operatorii involutivi V^j, $j=1,2,...,m-1$, şi W^k, $k=1,2,...,n-1$:

$$M\varphi=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}W^{j-1}V^{k-1}A_{jk}\varphi=f\ . \tag{4}$$

Axioma 1*. Există doi operatori* $U_V\in L(\boldsymbol{B})$ *şi* $U_W\in L(\boldsymbol{B})$ *noetherieni, astfel încât au loc relațiile*

$$U_VV-\boldsymbol{\varepsilon}_mVU_V=T_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_m=e^{\frac{2\pi i}{m}},$$

$$U_WW-\boldsymbol{\varepsilon}_nWU_W=T_2,\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

unde T_1 *şi* T_2 *sunt operatori compacți în spațiul* $\boldsymbol{B}$.

Axioma 2. *Pentru orice* $j=1,2,...,m,\ k=1,2,...,n$ *şi* $l=1,2,...,m-1$ *are loc proprietatea comutativă (cu exactitatea unor termeni compacți):*

$$U_VW=WU_V+T_3\ ,\ U_WV=VU_W+T_4\ ,$$

$$U_VA_{jk}=A_{jk}U_V+T_5\ ,\ U_WA'_{jk}=A'_{jk}U_W+T_6\ ,$$

unde $A'_{jk}=V^{-l}A_{jk}V^{l}$ *şi* T_j *sunt operatoiri compacți în spațiul* $\boldsymbol{B}$.

Axioma 3*. Există un număr complex* $\boldsymbol{\gamma}$ *şi un număr întreg* ν, *astfel încât*

$$VWV^{-1}=\gamma W^{\nu}. \tag{5}$$

Definim următorul operator:

$$\widetilde{M}=\sum_{k=1}^{n}(W^{(k-1)\nu^{j-1}}V^{j-1}\gamma^{(k-1)\frac{1-\nu^{j-1}}{1-\nu}}A_{r+j-1,k}V^{-j+1})_{r,j=1}^{m} \tag{6}$$

Efectuând gruparea termenilor în egalitatea (6), operatorul $\widetilde{M}$ poate fi transcris sub forma

$$\widetilde{M} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{W}^{k-1} \widetilde{Z}_k \quad , \quad \widetilde{W} = \left\| \delta_{rj} W \right\|_{r,j=1}^{n} . \tag{7}$$

Teorema 2. *Fie axiomele 1-3 îndeplinite. Operatorul M, definit de relația (4), este noetherian în spațiul $\boldsymbol{B}$ dacă şi numai dacă operatorul matriceal*

$$\widetilde{\widetilde{M}} = \left\| \widetilde{W}^{\mu-1} \widetilde{Z}_{\lambda+\mu-1} W^{-\mu+1} \right\|_{\lambda,\mu=1}^{n}$$

este noetherian în spațiul $\boldsymbol{B}^{mn}$. Dacă operatorul $\widetilde{\widetilde{M}}$ este noetherian, atunci

$$Ind\, M = \frac{1}{mn} Ind\, \widetilde{\widetilde{M}} .$$

Demonstrația teoremei 2 se face prin metoda reducerii la teorema 1 şi nu ne vom opri la detalii.

În aplicațiile prezentate mai jos, în cazuri concrete, numărul ν estre egal cu 1 sau cu -1, iar operatorii $\widetilde{Z}_k$ pot fi scrişi sub o formă explicită. Pentu $\nu = 1$ avem:

$$\widetilde{Z}_k = \left\| \gamma^{(k-1)(j-1)} V^{j-1} A_{r+j-1,k} V^{-j+1} \right\|_{r,j=1}^{m} .$$

Dacă însă $\nu = -1$, atunci

$$\widetilde{Z}_k = \left\| V^{j-1} \left[\frac{1+(-1)^{j-1}}{2} \gamma^{(k-1)\frac{1+(-1)^{j}}{2}} A_{r+j-1,k} + \frac{1-(-1)^{j-1}}{2} \gamma^{(n-k+1)\frac{1+(-1)^{j-1}}{2}} A_{r+j-1,n-k+2} \right] V^{-j+1} \right\|_{r,j=1}^{m} .$$

III. Aplicații

1. Condiții noetheriene pentru ecuații integrale în convoluții şi cu reflectare. Notăm prin H_λ ,$0 < \lambda \le 1$, mulțimea funcțiilor holderiene pe axa reală R cu exponentul λ, iar prin $H_{\lambda+}$ $(H_{\lambda-})$ notăm mulțimile:

$$H_{\lambda+}\,(H_{\lambda-}) = \{\varphi : \varphi \in H_\lambda,\ \varphi(x) = 0 \ \ pentru \ \ x < 0 \ (pentru \ \ x > 0)\} .$$

În spațiul $\widetilde{H}_\lambda = H_{\lambda+} \oplus H_{\lambda-}$ considerăm operatorul

$$M = A_1 + VA_2 \ , \tag{8}$$

unde $(V\varphi)(x) = \varphi(-x)$ şi

$$(A_j\varphi)(x) = a_j\varphi(x) + \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h_j^1(x-t)\varphi(t)dt\,, pentru \ \ x > 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h_j^2(x-t)\varphi(t)dt\,, pentru \ \ x < 0. \end{cases} .$$

Nucleele h_j^k, $j = 1,2$, $k = 1,2$, verifică condițiile:

$$1) \ \ h_j^k(x) \in L_1(R,(1+|x|^{2\lambda}) ; \ 2) \ \int_0^x h_j^1(t)dt \in H_\lambda(0,+\infty) ; \ 3) \ \int_x^0 h_j^2(t)dt \in H_{\lambda-} .$$

Din rezultatele expuse în [1] se poate deduce continuitatea operatorului M în spațiul $L_1(R,(1+|x|^{2\lambda})$.

Teorema 3. *Operatorul (8) este noetherian în spațiul $\widetilde{H}_\lambda$ dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condițiile a)* $\det[a + \hat{h}^1(t)] \neq 0$, *b)* $\det[a + \hat{h}^2(t)] \neq 0$, $-\infty \le t \le +\infty$, *unde*

$$a = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{Vmatrix}, \ \ h^k(x) = \begin{Vmatrix} h_1^k(x) & h_2^k(-x) \\ h_2^k(x) & h_1^k(-x) \end{Vmatrix}, \ k = 1,2,$$

iar $\hat{h}^1(t)$ și $\hat{h}^2(t)$ *sunt transformatele Fourier ale funcțiilor* $h^1(x)$ *și* $h^2(x)$. *Dacă condițiile a) și b) sunt îndeplinite, atunci*

$$IndM = -\frac{1}{2} ind \frac{\det(a+\hat{h}_1(t))}{\det(a+\hat{h}_2(t))}.$$

Pentru demonstrarea acestei teoreme vom avea nevoie de un rezultat din [1], pe care îl formulăm în următoarea lemă.

Lema 1. *Fie* $k(t) \in L_1(-\infty,+\infty)$ *și*

$$(K\varphi)(x) = \varphi(x) + \int_0^{+\infty} k(x-t)\varphi(t)dt \ , \ x>0.$$

Operatorul K *este noetherian în spațiul* $H_\lambda(0,+\infty)$, *dacă și numai dacă*

$$1+\hat{k}(x) \neq 0, \ -\infty \le x \le +\infty .$$

Dacă această condiție este verificată, atunci

$$IndK = -\frac{1}{2\pi}\{\arg(1+\hat{k}(x))\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

Demonstrația teoremei 3. Vom aplica teorema 1. În calitate de operator U, care figurează în axioma 1 din această teoremă, considerăm operatorul $(U\varphi)(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \varphi(x)$. Evident, $UV = -VU$ și, totodată, $A_j V = VA_j + T_j$, $j = 1,2$. Astfel, axioma 2 de asemenea este verificată. Operatorul $\widetilde{M}$ din teorema 1 are forma (la detalii nu ne oprim aici)

$$(\widetilde{M}\varphi)(x) = a\varphi(x) + \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h^1(x-t)\varphi(t)dt, \textit{pentru} \ \ x>0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x-t)\varphi(t)dt, \textit{pentru} \ \ x<0. \end{cases},$$

și acționează în spațiul $\widetilde{H}_\lambda^2 = H_{\lambda+}^2 \oplus H_{\lambda-}^2$. Din teorema 1 rezultă că operatorul M este noetherian în spațiul $\widetilde{H}_\lambda$ dacă și numai dacă operatorul $\widetilde{M}$ este noetherian în spațiul $\widetilde{H}_\lambda^2$ și, în plus, $Ind M = \frac{1}{2} Ind\widetilde{M}$. Scriem operatorul $\widetilde{M}$ sub forma

$$\widetilde{M} = P_+ A^1 + P_- A^2,$$

unde $(P_\pm\varphi)(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sgn} x)\varphi(x) = \theta_\pm(x)\varphi(x)$ și $A^r\varphi = a\varphi + h^r * \varphi$, $r = 1,2$. Considerăm operatorii

$$(P_+A^1P_-\varphi)(x) = \theta_+(x)\int_{-\infty}^{o} h^1(x-t)\varphi(t)dt = (T_1\varphi)(x) \ ,$$

$$(P_-A^2P_+\varphi)(x) = \theta_-(x)\int_0^{+\infty} h^2(x-t)\varphi(t)dt = (T_2\varphi)(x) \ .$$

Din [3] putem deduce că operatorii T_1 și T_2 sunt compacți în spațiul $\widetilde{H}_\lambda^2$. Atunci (*a se vedea* [3]), operatorul $\widetilde{M}$ este noetherian în spațiul $\widetilde{H}_\lambda^2$ dacă și numai dacă operatorii

$$(\widetilde{M}_1\varphi)(x) = a\varphi(x) + \int_0^{+\infty} h^1(x-t)\varphi(t)dt \ , \ x>0 \ \textit{și} \ \ (\widetilde{M}_2\varphi)(x) = a\varphi(x) + \int_0^{+\infty} h^2(x-t)\varphi(t)dt \ , \ x>0$$

sunt noetherieni în spațiile $\widetilde{H}_{\lambda+}^2$ și, respectiv, în $\widetilde{H}_{\lambda-}^2$ și, în plus, $Ind\widetilde{M} = Ind\widetilde{M}_1 + Ind\widetilde{M}_2$.

Pentru finalizarea demonstraţiei teoremei rămâne să aplicăm lema 1 pentru operatorii $\widetilde{M}_1$ şi $\widetilde{M}_2$. Teorema este demonstrată.

2. Condiţii noetheriene pentru ecuaţii integrale în convoluţii cu reflectare şi cu conjugare complexă. Fie

$$(K\varphi)(x) = a\varphi(x) + b\overline{\varphi}(x) + c\varphi(\alpha - x) + d\overline{\varphi}(\alpha - x) + \theta_+(x)\int_{-\infty}^{+\infty}[h_1(x-t) + h_3(x+t-\alpha)]\varphi(t)dt +$$

$$\theta_-(x)\int_{-\infty}^{+\infty}[k_1(x-t) + k_3(x+t-\alpha)]\varphi(t)dt + \theta_+(x)\int_{-\infty}^{+\infty}[h_2(x-t) + h_4(x+t-\alpha)]\varphi(t)dt +$$

$$\theta_-(x)\int_{-\infty}^{+\infty}[k_2(x-t) + k_4(x+t-\alpha)]\varphi(t)dt, \tag{9}$$

unde $\theta_\pm(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sgn} x)$, $h_j(x), h_j(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ şi α este un număr real. În studiul operatorului (9) vom aplica teorema 2. În acest caz operatorii V, W, U_V şi U_W sunt definiţi în felul următor:

$$(V\varphi)(x) = \overline{\varphi}(x), \quad (W\varphi)(x) = \varphi(\alpha - x),$$

$$(U_V\varphi)(x) = i\varphi(x), \quad (U_W\varphi)(x) = \operatorname{sgn}\varphi(x - \frac{\alpha}{2}), \text{ iar } \nu = \gamma = 1.$$

Aplicând teorema 2 obţinem următorul rezultat.

Teorema 4. *Operatorul (9) este noetherian în spaţiul* $L_p(-\infty, +\infty)$ $1 \le p \le \infty$, *dacă şi numai dacă* $\det \sigma_\pm(x) \ne 0$, $-\infty \le x \le +\infty$, *unde*

$$\sigma_+(x) = \begin{Vmatrix} a + H_1(x) & b + H_2(x) & c + H_3(x) & d + H_4(x) \\ \overline{b} + \overline{H}_2(-x) & \overline{a} + \overline{H}_1(-x) & \overline{d} + \overline{H}_4(-x) & \overline{c} + \overline{H}_3(-x) \\ c + K_3(-x) & d + K_4(-x) & a + K_1(-x) & b + K_2(-x) \\ \overline{d} + \overline{K}_4(x) & \overline{c} + \overline{K}_3(x) & \overline{b} + \overline{K}_2(x) & \overline{a} + \overline{K}_1(x) \end{Vmatrix},$$

$$H_j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_j(t)e^{ixt}dt, \quad K_j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(t)e^{ixt}dt, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

iar matricea $\sigma_-(x)$ *se obţine din matricea* $\sigma_+(x)$ *înlocuind în ea* $H_j(x)$ *cu* $K_j(x)$ *şi invers. Dacă* $\det \sigma_\pm(x) \ne 0$, $-\infty \le x \le +\infty$, *atunci*

$$IndK = \frac{1}{4\pi}\left\{\arg\det(\sigma_+^{-1}(x)\sigma_-(x))\right\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

3. Condiţii noetheriene pentru ecuaţii integrale singulare cu două translaţii de tip Carleman.

Fie

$$\begin{aligned}(K\varphi)(t) = \sum_{k=1}^{n}\left[a_{1k}(t)\varphi(\alpha_{k-1}(t)) + b_{1k}(t)(S\varphi)(\alpha_{k-1}(t))\right] + \\ \sum_{k=1}^{n}\left[a_{2k}(t)\varphi(\alpha_{k-1}(\beta(t))) + b_{2k}(t)(S\varphi)(\alpha_{k-1}(\beta(t)))\right]\end{aligned}, \tag{10}$$

unde S este operatorul integral singular cu nucleu Cauchy,

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

Γ este un contur închis de tip Liapunov, $\alpha(t)$ – o translație de tip Carleman generalizată care păstrează orientarea conturului Γ: $\alpha_n(t)=\alpha(\alpha_{n-1}(t))\equiv t$, iar $\beta(t)$ – translație de tip Carleman care schimbă orientarea conturului Γ: $\beta(\beta(t))\equiv t$. Vom presupune că există derivatele $\alpha'(t)$, $\beta'(t)$ și $\alpha'(t)$, $\beta'(t)\in H_\lambda(\Gamma)$, iar coeficienții $a_{jk}(t)$ și $b_{jk}(t)$ sunt funcții continue pe porțiuni pe Γ cu punctele de discontinuitate $t_1, t_2, \dots, t_N$ în care sunt incluse și toate imaginile lor de forma $\beta(\alpha_m(t_r))$. Mai presupunem că punctele de discontinuitate ale funcțiilor $a_{jk}(t)$ și $b_{jk}(t)$ nu coincid cu punctele fixe ω_m^j $(j=1,\,2)$ ale translațiilor $\beta(\alpha_m(t))$. Notăm cu V și W operatorii $(V\varphi)(t)=\varphi(\beta(t))$, $(W\varphi)(t)=\varphi(\alpha(t))$; atunci, axioma 3 este realizată numai în cazul $(\beta\circ\alpha\circ\beta\circ\alpha)(t)\equiv t$, adică $\gamma=1$ și $\nu=-1$. Definim operatorii U_V și U_W din axioma 2 în felul următor: $(U_V\varphi)(t)=u_\alpha(t)\varphi(t)$, $(U_W\varphi)(t)=u(t)\varphi(t)+v(t)(S\varphi)(t)$, unde $u_\alpha(t)$ este (*a se vedea* [4]) soluția ecuației $\varepsilon_n u_\alpha(t)-u_\alpha(t)=0$,

$$v(t)=\prod_{j=1}^{N}\prod_{k=0}^{n-1}\left|\alpha_k(t)-t_j\right|\left|\alpha_k(\beta(t))-t_j\right|,\quad u(t)=u_0(t)\chi(t),$$

$$u_0(t)=\begin{cases}\prod_{j=0}^{n-1}\left|\beta(\alpha_j(t))-\alpha_j(t)\right|\left|\alpha_k(t)-t_j\right|, & \text{pentru n impar,}\\ \prod_{j=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left|\beta(\alpha_{k+k}(t))-\alpha_j(t)\right|\left|\alpha_k(\beta(t))-t_j\right|, & \text{pentru n par,}\end{cases}$$

$$\chi(t)=\prod_{j=0}^{n-1}\chi_0(\alpha_j(t)),\ \chi_o(t)=\begin{cases}1, & \omega_0^1\prec t\prec\omega_0^2\\ -1, & \omega_0^2\prec t\prec\omega_0^1\end{cases},\ \text{pentru } n \text{ impar și}$$

$$\chi_o(t)=\begin{cases}1, & \alpha_{r-1}(\omega_0^1)\prec t\prec\alpha_{r+\frac{n}{2}}(\omega_1^1)\\ -1, & \alpha_{r+\frac{n}{2}}(\omega_1^1)\prec t\prec\alpha_r(\omega_0^1)\end{cases},\ r=1,2,\dots,n,\ \text{pentru } n \text{ par.}$$

Notăm $\tilde{\tilde{K}}=A+B\tilde{\tilde{S}}$, unde $A=\left\|A_{jk}\right\|_{j,k=1}^{n}$, $B=\left\|B_{jk}\right\|_{j,k=1}^{n}$, $\tilde{\tilde{S}}=\left\|\delta_{jk}S\right\|_{j,k=1}^{2n}$ și

$$A_{jk}=\begin{Vmatrix}a_{1,j+k-1}(\alpha_{n-j+1}) & a_{2,n-j-k+3}(\alpha_{n-j+1})\\ a_{2,j+k-1}(\beta\circ\alpha_{n-j+1}) & a_{1,\,n-j-k+3}(\beta\circ\alpha_{n-j+1})\end{Vmatrix},$$

iar B_{jk} se obține din A_{jk} prin înlocuirea funcțiilor $a_{1,j+k-1}$ și $a_{2,j+k-1}$ prin $b_{1,j+k-1}$ și, respectiv, prin $b_{2,j+k-1}$, iar $a_{2,n-j-k+3}$ și $a_{1,n-j-k+3}$ prin $-b_{2,n-j-k+3}$ și, respectiv, prin $-b_{1,n-j-k+3}$.

Teorema 5. *Operatorul K, definit de egalitatea (10), este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma)$, $1<p<+\infty$, dacă și numai dacă este noetherian operatorul matriceal $\tilde{\tilde{K}}=A+B\tilde{\tilde{S}}$ în spațiul $L_p^{2n}(\Gamma)$. Dacă operatorul $\tilde{\tilde{K}}$ este noetherian, atunci $IndK=\frac{1}{2n}ind\tilde{\tilde{K}}$.*

Menționăm că, în cazul conturului deschis, teorema similară teoremei 5 are o formă mult mai simplă, datorită faptului că în acest caz grupul finit de translații are doar forma $\{e,\ \beta\}$, unde e este transformarea identică, iar β este o translație de tip Carleman, care schimbă orientarea conturului Γ. În mod similar, folosind schema din punctul 3, pot fi studiate ecuațiile integrale singulare cu coeficienți continui pe porțiuni, cu translații și cu conjugare complexă în cazul conturului deschis. Este de menționat și faptul că schema descrisă în I și II poate fi aplicată și în cazul în care ecuațiile (8)-(10) sunt înlocuite cu sisteme de astfel de ecuații.

Referințe:

1. Karapetyants N., Samko S. Equations with an involutive operators and Their Applications. - Boston: Birkhäuser, 2001.
2. Krupnik N.Y. Banach algebras with symbol and singular integral operators // Operator Theory: Advances and Applications. - Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäuser 1997.
3. Gohberg I., Feldman I. Convolution Equations and Projection Methods for Their Solution. - American Mathematical Society, 1974.
4. Litvinchiuk G. Intoduction to Theory of Singular Integral Operators with Shift. - Kluwer, 2001.

Prezentat la 09.12.2010