Посвящается 85-летию со дня рождения
профессора ЗАМОРЗАЕВА А.М.,
члена-корреспондента АН Молдовы

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ С ИНВАРИАНТНОЙ ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ И ИХ ТОЧЕЧНЫХ ПОДГРУПП

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

Sunt descrise grupurile bidimensionale ale P-simetriilor de rozete G_2^P şi subgrupurile lor punctuale G_{20}^P, care se aplică la studierea grupurilor de simetrie a categoriilor G_{42} si G_{420} ale spaţiului euclidian de dimensiunea patru.

The two-dimensional of the rosettal P-simmetries are written. By using these groups the symmetry groups of the G_{42} and G_{420} categories of the four-dimensional Euclidian space described.

1. Четырёхмерные группы симметрии с инвариантной двумерной плоскостью (G_{42} в краткой записи) сохраняют в четырёхмерном пространстве двумерную плоскость E_2, а их точечные подгруппы G_{420} сохраняют в этом пространстве ещё точку E_0 на отмеченной инвариантной плоскости. Всего точечные группы категории G_{420} сохраняют в четырёхмерном пространстве две абсолютно перпендикулярные двумерные плоскости E_2 и $E_2^{'}$ с общей точкой E_0.

Числовые характеристики количества групп, которыми характеризуются группы симметрии категории G_{42} и их точечные подгруппы G_{420}, в настоящее время полностью выявлены и представлены на с.154 в [1]. Однако сами двумерные группы G_2^P и их точечные подгруппы G_{20}^P 10 розеточных Р-симметрий при $P \simeq G_{20}$, которыми интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категорий G_{42} и G_{420}, ещё никем полностью не выписывались. Выводу и выписыванию всех различных двумерных групп G_2^P и G_{20}^P 10 розеточных Р-симметрий при $P \simeq G_{20}$, с целью их использования для выявления структуры групп симметрии категорий G_{42} и G_{420} соответственно и посвящается настоящая статья.

2. Важное значение для многомерных приложений Р-симметрии имеет представленный в [2, §1.2] геометрический принцип классификаций Р-симметрий, позволивший описать с помощью трёхмерных точечных групп G_{30}^P 32 кристаллографических Р-симметрий при $P \simeq G_{30}$ категорию шестимерных точечных групп симметрии с инвариантной трёхмерной плоскостью G_{630} [2]. В случае, когда группа Р подстановок качеств, приписанных точкам фигуры, последовательно изоморфна двумерным кристаллографическим точечным группам G_{20}, геометрический способ классификации Р-симметрий приводит к 10 розеточным Р-симметриям, нульмерными группами G_0^P которых можно моделировать все кристаллографические точечные группы розеток, являющиеся одновременно точечными кристаллографическими группами G_{20}, отчего эти Р-симметрии названы в [3] розеточными.

Чтобы облегчить громоздкий подсчёт так называемых средних групп, которых слишком много при большом числе самих Р-симметрий (например, 32 Р-симметрии с группами подстановок $P \simeq G_{30}$), и свести его к предварительному выводу младших групп, в [4] введено понятие сильного изоморфизма групп и изоморфизма Р-симметрий, а также обоснована связь между числом различных младших групп одних Р-симметрий и числом различных средних групп других Р-симметрий. Это положение существенно использовались в [5] при нахождении количества всех различных групп G_{20}^P полной Р-симметрии для 32 кристаллографических ($P \simeq G_{30}$), 122 гиперкристаллографических 1-го порядка ($P \simeq G_{430}$) и 624 гиперкристаллографических 2-го порядка Р-симметрий ($P \simeq G_{5430}$).

Таким образом, как это непосредственно вытекает из всего сказанного выше, для получения всех групп Р-симметрии, которыми интерпретируются различные группы симметрии категорий G_{42} и их точечные подгруппы G_{420}, нужно двумерные классические группы G_2 и их точечные подгруппы G_{20}

обобщить последовательно с 10 розеточными P-симметриями при $P \simeq G_{20}$, исчерпывающимися p- и (p/)- симметриями при p=1, 2,3, 4,6 [3].

3. Приведём необходимые для решения нашей задачи факты из классификации и теории как самих P-симметрий, так и их групп, подробно изложенные в [1,2]. Приписывая каждой точке фигуры хотя бы один индекс i=1,2,…, p и фиксируя некоторую группу P подстановок этих индексов, назовём преобразованием P-симметрии фигуры её изометрическое преобразование, переводящее каждую точку с индексом i в точку с индексом k_i так, что подстановка ε = $\begin{matrix} 1 & 2 \dots p \\ k_1 & k_2 \dots k_p \end{matrix} \in P$. Отсюда непосредственно следует, что всякое преобразование P-симметрии g разлагается на коммутирующие друг с другом множители: на преобразования симметрии s (геометрически совпадающие с g, если отвлечься от изменения индексов) и на подстановку индексов (P-тождественное преобразование) ε (совпадающих с g с точки зрения соответствия индексов, если отвлечься от точечного преобразования). Сомножители s и ε назовём компонентами преобразования $g = s\varepsilon = \varepsilon s$. Совокупность преобразований P-симметрии данной фигуры образуют мультипликативную группу G, входящие в них преобразования симметрии s – её порождающую группу S, а подстановки индексов ε – подгруппу P_1. Если P_1=P называем G группой полной P-симметрии, если $e \subset P_1 \subset P$ – неполной (в этом случае G можно рассматривать как группу P_1- симметрии) и если $P_1 = e$, то группа G совпадает с S. Множество всех групп P-симметрии с общей порождающей назовем семейством.

Если G – группа полной P-симметрии, то непосредственно следует, что $H=G \cap S$ и $Q=G \cap P$ являются в G, соответственно, подгруппой симметрии и подгруппой подстановок индексов (P-тождественных преобразований). Назовём группу G старшей, младшей или средней (Q-средней, ввиду того, что таких групп может быть несколько), если группа Q совпадает с P (тогда H = S и $G=S \times P$), является единичной (тогда $G \simeq S$) или есть нетривиальная подгруппа группы P.

Любая группа G полной P-симметрии выводится из своей порождающей S следующими шагами: 1) разысканием таких нормальных делителей H и Q групп S и Q, что фактор-группы S/H и P/Q изоморфны; 2) установлением изоморфизма χ фактор-группы S/H на P/Q и попарным перемножением соответствующих по изоморфизму классов sH и εQ=χ (sH); 3) объединением полученных произведений (основная теорема А.М. Заморзаева о P-симметрии) [1,2].

Так как на группу P, задающую P-симметрию, не налагается никаких ограничений, P-симметрия охватывает все обобщения шубниковской антисимметрии [6,7] и беловской цветной симметрии [8,1], в которых закон изменения качеств, приписанных точкам фигуры, непосредственно комбинируется с геометрическим преобразованием, действующим только на точки, и не связан с выбором частей фигуры.

Нужные для решения поставленной задачи розеточные P-симметрии, двумерными группами G_2^P которых интерпретируются с точностью до строения все различные четырёхмерные группы симметрии категории G_{42}, были впервые получены в [2, §3.2] при использовании геометрического принципа классификации P-симметрий [9], когда группа P подстановок качеств, приписанных точкам преобразуемой фигуры, была последовательно изоморфна двумерным группам симметрии категории G_{20}. Отношение изоморфизма P-симметрий, согласно [4], является отношением эквивалентности, разбивающей множество 10 розеточных P-симметрий на следующие 9 классов сильной изоморфности 1; 2, 1/; 3; 4; 6; 2/; 3/; 4/; 6/ [ср.[3]). Далее, так как в семействах изоморфных P-симметрий с общей порождающей, согласно [4], совпадают как числа различных младших групп, так и числа различных Q-средних, то для обзора полного вывода интересующих нас двумерных кристаллографических групп и их точечных подгрупп с 10 розеточными P-симметриями при $P \simeq G_{20}$ достаточно подробно исследовать лишь одну P-симметрию из каждого класса изоморфности. При этом следует помнить, что число различных Q-средних групп симметрии с данной порождающей равно числу различных младших групп P_0-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа P/Q сильно изоморфна P_0 [4].

4. Приступим к выписыванию двумерных групп G_2^P 10 розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$. Эти группы исчерпываются, согласно п.3 данной работы, порождающими, старшими, младшими и Q-средними группами отмеченных P-симметрий.

Порождающие группы при обобщении любой категории классических групп с произвольной P-симметрией совпадают с классическими группами симметрии рассматриваемой категории, так как эти группы соответствуют 1-симметрии рассматриваемой P-симметрии, когда каждой точке взятой фигуры приписывается один и тот же индекс и симметрия «индексированной» фигуры не меняется. Следовательно, порождающие группы при обобщении двумерных фёдоровских групп G_2 с розеточными P-симметриями исчерпываются плоскими группами симметрии, полученными впервые Е.С. Фёдоровым в 1891 году [10]. Каждая из этих 17 групп является произведением группы, порождённой переносами на два неколлиниарных вектора, на группу, образующие элементы которой не являются переносами. Обозначая через a и b векторы, на которых строится параллелограмм Браве соответствующей плоской сетки, получим группы переносов: 1) a, b (соответствует примитивной сетке p); 2) $a, \frac{a+b}{2}$ (соответствует центрированной сетке c). Двумерную фёдоровскую группу записываем как произведение двух указанных групп. Если символ оси отражения m (может быть скользящего $\frac{b}{2}m$) входит в запись без символа центра вращения или справа от него, считаем ось направленной перпендикулярно вектору a, если же слева – то вдоль a; индекс $\frac{a}{4}$, помещённый внизу справа от символа оси, указывает, что ось сдвинута на вектор $\frac{a}{4}$ от центра вращения.

Перечислим введённые в [11] и подробно объяснённые в [7] символы плоских фёдоровских групп G_2, отражающих полную систему образующих, и общепринятые интернациональные символы этих групп.

Наклонная сингония: a, b [p1] , a, b (2) [p2].

Ортогональная сингония: a, b (m)[pm], a, b $\frac{b}{2}m$ $[pg]$, a, b $2{\cdot}m$ $[pmm]$, a, b $2{\cdot}\frac{b}{2}m$ $[pgm]$, a, b $2{\cdot}\frac{b}{2}m_{\frac{a}{4}}$ $[pgg]$, $a, \frac{a+b}{2}$ m [cm], $a, \frac{a+b}{2}$ $2 \cdot m$ [cmm].

Квадратная сингония: a, b 4 $p4$, a, b $4 \cdot m$ $p4mm$, a, b $4 \cdot \frac{b}{2}m_{\frac{a}{4}}$ $[p4gm]$.

Гексагональная сингония: a, b 3 $[p3]$, a, b (3·m)[p3m], a, b (m·3)[p31m], a, b 6 [p6], a, b $6{\cdot}m$ $[p6mm]$.

При каждой из остальных девяти нетривиальных розеточных P-симметрий из любой порождающей двумерной фёдоровской группы G_2 выводится, согласно общей теории P-симметрии [1,2], только одна старшая. Следовательно, различных старших групп категории G_2^p будет 17×9 =153, каждая из которых разлагается в прямое произведение порождающей группы и группы, задающей розеточную P-симметрию, например, a, b $\times 1^{\;2}$,…, a, b $\times 1^{\;6'}$ и т.д.

Следовательно, для завершения полного списка всех различных двумерных групп G_2^P розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$ осталось привести список младших и Q-средних плоскостных групп p- и (p/)-симметрии при p = 1,2,3,4,6.

Двумерные группы p-симметрии при p = 2,3,4,6 характеризуют группы p-симметрии плоскости, каждой точке которой приписан по крайней мере один индекс i, принимающий p значений, если её преобразования p-симметрии удовлетворяют требованиям плоскостной однородности, а симметрии – локальной дискретности. В [1,2] показано, что при любом p эти группы составляют категорию G_2^p,то есть исчерпываются группами p-симметрии с 17 порождающими G_2. Все младшие группы G_2^p выведены в [1] из выписанных в п.4 настоящей статьи 17 групп G_2 методом замены преобразований симметрии соответствующими преобразованиями p-симметрии в системе образующих элементов порождающих групп (метод Шубникова-Заморзаева).

Перечислим эти группы и впервые выведенные в настоящей статье Q-средние, в символах которых положительная или отрицательная цифра в скобках, помещённая справа вверху элемента симметрии, указывает на его замену соответствующим элементом p-симметрии.

При 2-симметрии группы G_2 порождают 46 младших G_2^2 и ни одной Q-средней. Перечислим эти группы по семействам: a^2, b ; a, b $2^{\,2}$, $a^{\,2}, b$ 2 ; a, b $m^{\,2}$, $a^{\,2}, b$ m , $a, b^{\,2}$ m , $a, b^{\,2}$ $m^{\,2}$, $a^{\,2}, b^{\,2}$ m ; a, b $\frac{b}{2}m^{\,2}$, $a^{\,2}, b$ $\frac{b}{2}m$; a, b $2^{\,2} \cdot m$, a, b $2 \cdot m^{\,2}$, $a^{\,2}, b$ $2 \cdot m$, a^2, b $2 \cdot m^{\,2}$, $a^{\,2}, b^{\,2}$ $2 \cdot m$; a, b $2^{\,2} \cdot \frac{b}{2}m$, a, b $2 \cdot \frac{b}{2}\,m^{\,2}$,

$a,b\ \ 2^{2} \cdot \frac{b}{2} m^{2}$, $a^{2},b\ \ 2 \cdot \frac{b}{2} m$; $a^{2},b\ \ 2 \cdot \frac{b}{2} m^{2}$; $a,b\ \ 2^{2} \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}$, $a,b\ \ 2 \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}^{2}$; $a,\frac{a+b}{2}\ \ m^{2}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 2}\ \ m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 2}\ \ m^{2}$; $a,\frac{a+b}{2}\ \ 2^{2} \cdot m$, $a,\frac{a+b}{2}\ \ 2 \cdot m^{2}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 2}\ \ 2 \cdot m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 2}\ \ 2^{2} \cdot m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 2}\ \ 2 \cdot m^{2}$; $a,b\ \ 4^{2}$, $a^{2},b^{2}\ \ 4$; $a,b\ \ 4^{2} \cdot m$, $a,b\ \ 4 \cdot m^{2}$, $a,b\ \ 4^{2} \cdot m^{2}$, $a^{2},b^{2}\ \ 4 \cdot m$, $a^{2},b^{2}\ \ 4 \cdot m^{2}$; $a,b\ \ 4^{2} \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}$, $a,b\ \ 4 \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}^{2}$, $a,b\ \ 4^{2} \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}^{2}$; $a,b\ \ 3 \cdot m^{2}$; $a,b\ \ m^{2} \cdot 3$; $a,b\ \ 6^{2}$; $a,b\ \ 6^{2} \cdot m$, $a,b\ \ 6 \cdot m^{2}$, $a,b\ \ 6^{2} \cdot m^{2}$. Если в символах выписанных 46 младших групп 2-симметрии вместо знака (2) на том же месте поставить знак «/» то получим 46 младших двумерных групп (1/)-симметрии. Следовательно, при двух P-симметриях класса изоморфизма 2 и 1/ группы симметрии категории G_2 порождают по 46 младших групп 2 и – 1/ симметрии (всего 46 × 2 = 92 группы).

При 3-симметрии группы G_2 порождают следующие младшие группы: a^{3},b ; $a,b^{3}\ \ m$; $a,b^{3}\ \ \frac{b}{2} m^{-3}$; $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 3}\ \ m$; $a,b\ \ 3^{3}$, $a,b\ \ 3^{-3}$, $a^{3},b^{3}\ \ 3$; $a^{3},b^{3}\ \ m \cdot 3$; $a,b\ \ 6^{3}$, $a,b\ \ 6^{-3}$, которых 10 и ни одной Q–средней, так как группа 3, задающая 3-симметрию, не имеет нетривиальных нормальных делителей.

При 4-симметрии группы G_2 порождают следующие младшие: $a^{(4},b$; $a,b^{4}\ \ m$, $a,b^{4}\ \ m^{2}$, $a^{2},b^{4}\ \ m$; $a,b^{2}\ \ \frac{b}{2} m^{4}$, $a^{2},b^{2}\ \ \frac{b}{2} m^{4}$; $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 4}\ \ m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 4}\ \ m^{2}$; $a^{2},b^{2}\ \ 2 \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}^{4}$; $a,b\ \ 4^{4}$, $a,b\ \ 4^{-4}$, $a^{2},b^{2}\ \ 4^{4}$; $a^{2},b^{2}\ \ 4^{4} \cdot \frac{b}{2} m^{4}$, $a^{2},b^{2}\ \ 4^{4} \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}^{-4}$, которых всего 14, а также 46 две-средних, так как в этом случае Q = 2, а фактор-группа 4/2 ≃ 2, поэтому количество 2-средних групп категории G_2 при 4-симметрии совпадает, согласно [4], с количеством младших групп этой категории при 2-симметрии. Список этих групп выглядит так: $a^{4},b\ \cdot 1^{2}$; $a,b\ \ 2^{4}$, $a^{4},b\ \ 2$; $a,b\ \ m^{4}$, $a^{4},b\ \ m$, $a,b^{4}\ \ m \times 1^{2}$, $a,b^{4}\ \ m^{4}$, $a^{4},b^{4}\ \ m$; $a,b^{2}\ \ \frac{b}{2} m^{4}\ \cdot 1^{2}$, $a^{4},b\ \ \frac{b}{2} m$; $a,b\ \ 2^{4} \cdot m$, $a,b\ \ 2 \cdot m^{4}$, $a^{4},b\ \ 2 \cdot m$, $a^{4},b\ \ 2 \cdot m^{4}$, $a^{4},b^{4}\ \ 2 \cdot m$; $a,b\ \ 2^{4} \cdot \frac{b}{2} m$, $a,b^{2}\ \ 2 \cdot \frac{b}{2} m^{4}\ \cdot 1^{2}$, $a,b\ \ 2^{4} \cdot \frac{b}{2} m^{4}$, $a^{4},b\ \ 2 \cdot \frac{b}{2} m$, $a^{4},b\ \ 2 \cdot \frac{b}{2} m^{4}$; $a,b\ \ 2^{4} \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}$, $a,b\ \ 2 \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}^{4}$; $a,\frac{a+b}{2}\ \ m^{4}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 4}\ \ m \cdot 1^{2}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 4}\ \cdot m^{4}$; $a,\frac{a+b}{2}\ \ 2^{4} \cdot m$, $a,\frac{a+b}{2}\ \ 2 \cdot m^{4}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 4}\ \ 2 \cdot m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 4}\ \ 2^{4} \cdot m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 4}\ \ 2 \cdot m^{4}$; $a,b\ \ 4^{4}\ \cdot 1^{2}$, $a^{4},b^{4}\ \ 4$; $a,b\ \ 4 \cdot m^{4}$; $a,b\ \ 4^{4} \cdot m$, $a,b\ \ 4^{4} \cdot m^{4}$, $a^{4},b^{4}\ \ 4 \cdot m$, $a^{4},b^{4}\ \ 4 \cdot m^{4}$; $a,b\ \ 4^{4} \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}$, $a,b\ \ 4 \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}^{4}$, $a,b\ \ 4^{4} \cdot \frac{b}{2} m_{\frac{a}{4}}^{4}$; $a,b\ \ 3 \cdot m^{4}$, $a,b\ \ m^{4} \cdot 3$; $a,b\ \ 6^{4}$; $a,b\ \ 6^{4} \cdot m$, $a,b\ \ 6 \cdot m^{4}$, $a,b\ \ 6^{4} \cdot m^{4}$.

Следовательно, при 4-симметрии двумерные фёдоровские группы G_2 порождают 60 новых групп, из которых 14 младших и 46 две-средних.

При 6-симметрии категория G_2 порождает 14 младших групп, список которых выглядит следующим образом: a^{6},b ; $a,b^{3}\ \ m^{2}$, $a,b^{6}\ \ m$, $a,b^{6}\ \ m^{2}$, $a^{2},b^{3}\ \ m$, $a^{2},b^{6}\ \ m$; $a,b^{3}\ \ \frac{b}{2} m^{6}$, $a^{2},b^{3}\ \ \frac{b}{2} m^{6}$; $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 6}\ \ m^{2}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 6}\ \ m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{\ 6}\ \ m^{2}$; $a^{3},b^{3}\ \ m^{2} \cdot 3$; $a,b\ \ 6^{6}$, $a,b\ \ 6^{-6}$, а также 10 две-средних и 46 три-средних ввиду того, что группа 6, задающая 6-симметрию, обладает двумя нетривиальными нормальными делителями Q_1=2 и Q_2=3, фактор-группа 6/$Q_1 \simeq$3, а фактор-группа 6/$Q_2 \simeq$ 2 [4].

Для составления полного списка 2-средних двумерных групп при 6-симметрии нужно каждую младшую двумерную группу при 3-симметрии умножить на группу 2-тождественных преобразований $1^{(2)}$, например, $a^{3}, b \cdot 1^{2}$; $a, b^{3} \quad m \cdot 1^{2}$, …, $a, b \quad 6^{3} \quad \cdot 1^{2}$, $a, b \quad 6^{-3} \quad \cdot 1^{2}$; а для записи аналогичных 3-средних групп при 6-симметрии, необходимо каждую младшую двумерную группу при 2-симметрии умножить на группу 3-тождественных преобразований, $1^{(3)}$, например, $a^{2}, b \cdot 1^{3}$; $a, b \quad 2^{2} \quad \cdot 1^{3}$, …, $a, b \quad 6^{2} \cdot m^{2} \quad \cdot 1^{3}$, так как группа 6, задающая 6-симметрию, разлагается в прямое произведение двух групп 2 и 3.

В итоге имеем, что группы категории G_2 при их обобщении с 6-симметрией порождают 70 новых групп G_2^6, из которых 14 младших, 10 две-средних и 46 три-средних.

Таким образом, из 17 G_2 при p–симметрии выводятся 84 младших G_2^p при p = 2,3,4,6 ($46G_2^2 + 10G_2^3 + 14G_2^4 + 14G_2^6$) и 102 Q-средних, из которых 46 две-средних при 4-симметрии, 10 две-средних и 46 три-средних при 6-симметрии, а если не различать правые и левые центры вращений на плоскости, то получим 80 младших $G_2^p \quad 46G_2^2 + 8G_2^3 + 13G_2^4 + 13G_2^6$ и 100 Q-средних, из которых 46 две-средних при 4-симметрии, 8 две-средних и 46 три-средних при 6-симметрии (ср. п. 4 в [12]).

5. Для завершения полного списка групп G_2^P розеточных P-симметрий при геометрическом способе их классификации, недостаёт двумерных групп (p/)-симметрии при p = 2,3,4,6. Они характеризуют группы преобразований «индексированной» плоскости, каждой точке которой приписан по крайней мере индекс *i*, принимающий 2p значений (i = *1*,…, p, 1, … , p), если её преобразования (p/)-симметрии удовлетворяют преобразованиям плоскостной однородности, а преобразования симметрии – локальной дискретности. В [1,2] показано, что при любом p ≥ 2 интересующие нас группы составляют категорию $G_2^{p/}$, то есть исчерпываются группами (p/)-симметрии с 17 порождающими G_2.

Выпишем эти группы в использованной в п.4 символике при p = 2,3,4,6, где индекс "(p" справа вверху символа элемента симметрии указывает на его замену элементом p-симметрии, соответствующим подстановке $\varepsilon_0 = (1, \dots, p) \quad p, \dots, 1$; индекс "/)" справа вверху – на замену элементом, комбинируемым с подстановкой ε_1 = (1,1)… p, p или её произведением на подстановку ε_0, а индекс "//" справа вверху элемента указывает на его замену при (4/)-симметрии элементом, соответствующим подстановке $\varepsilon_2 = \quad 1,4 \quad 2,1 \quad 3,2 \quad 4,3$ [1,2].

При (2/)-симметрии, группа подстановок которой P= 1,2 2,1 , 1,1 2,2 , рассматриваемые нами двумерные группы G_2 порождают следующие младшие: $a^{(2}, \mathrm{b}^{/)}$; $a^{(2}, \mathrm{b} \quad 2^{/)}$, $a^{/}, \mathrm{b} \quad 2^{2}$ (2 группы); $a^{(2}, \mathrm{b}^{/)} \quad 2$; $a^{(2}, \mathrm{b} \quad m^{/)}$, $a^{/}, \mathrm{b} \quad m^{2}$ (2 группы); $a, \mathrm{b}^{(2} \quad m^{/)}$, $a, \mathrm{b}^{/)} \quad m^{(2}$, $a, \mathrm{b}^{(2'} \quad m^{/)}$ (3 группы); $a^{2}, \mathrm{b}^{(2} \quad m^{/)}$, $a^{/)}, \mathrm{b}^{/} \quad m^{(2}$ (2 группы), $a^{(2}, \mathrm{b}^{/)} \quad m$, $a^{/)}, \mathrm{b}^{(2} \quad m$, $a^{(2^{/}}, \mathrm{b}^{/)} \quad m$ (3 группы); $a^{(2}, \mathrm{b}^{/)} \quad m^{/)}$, $a^{/)}, \mathrm{b}^{(2'} \quad m^{(2'}$, $a^{(2'}, \mathrm{b}^{/)} \quad m^{/)}$ (3 группы); $a^{(2}, b \quad \frac{b}{2} m^{/)}$, $a^{/)}, b \quad \frac{b}{2} m^{(2}$ (2 группы); $a, \frac{a+b}{2}^{(2} \quad m^{/)}$, $a, \frac{a+b}{2}^{/)} \quad m^{(2'}$, $a, \frac{a+b}{2}^{(2'} \quad m^{/)}$ (3 группы); $a, b \quad 2^{(2} \cdot m^{/)}$, $a, b \quad 2^{/)} \cdot m^{(2}$ (2 группы), $a^{(2}, b \quad 2 \cdot m^{/)}$, $a^{/)}, b \quad 2 \cdot m^{(2'}$, $a^{(2'}, b \quad 2 \cdot m^{/)}$ (3 группы); $a^{(2}, b \quad 2^{/)} \cdot m$, $a^{/)}, b \quad 2^{(2^{/}} \cdot m$, $a^{(2'}, b \quad 2^{/)} \cdot m$ (3 группы), $a^{2}, b \quad 2^{/} \cdot m^{/}$, $a^{/}, b \quad 2^{2} \cdot m^{2}$ (2 группы); $a^{2}, b \quad 2^{/} \cdot m^{2'}$, $a^{/}, b \quad 2^{2'} \cdot m^{2}$ (2 группы), $a^{2}, b^{2} \quad 2 \cdot m^{/}$, $a^{/}, b^{/} \quad 2 \cdot m^{2}$ (2 группы); $a^{2}, b^{2} \quad 2^{/} \cdot m$, $a^{/}, b^{/} \quad 2^{2} \cdot m$ (2 группы); $a^{2}, b^{/} \quad 2 \cdot m$, $a^{/}, b^{2} \quad 2 \cdot m$ (2 группы); $a^{2}, b^{/} \quad 2 \cdot m^{2}$, $a^{/}, b^{2'} \quad 2 \cdot m^{/}$, $a^{2'}, b^{/} \quad 2 \cdot m^{2'}$ (3 группы); $a^{2}, b^{/} \quad 2 \cdot m^{2'}$, $a^{/}, b^{2'} \quad 2 \cdot m^{2}$ (2 группы); $a, b \quad 2^{2} \cdot \frac{b}{2} m^{/}$, $a, b \quad 2^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{2'}$, $a, b \quad 2^{2'} \cdot \frac{b}{2} m^{/}$ (3 группы); $a^{2}, b \quad 2 \cdot \frac{b}{2} m^{/}$, $a^{/}, b \quad 2 \cdot \frac{b}{2} m^{2'}$, $a^{2'}, b \quad 2 \cdot \frac{b}{2} m^{/}$ (3 группы); $a^{2}, b \quad 2^{/} \cdot \frac{b}{2} m$, $a^{/}, b \quad 2^{2'} \cdot \frac{b}{2} m$, $a^{2'}, b \quad 2^{/} \cdot \frac{b}{2} m$ (3 группы); $a^{2}, b \quad 2^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{/}$,

$a^{/},b \quad 2^{2}\cdot\frac{b}{2}m^{2}$ (2 группы); $a^{2},b \quad 2^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{2'}$, $a^{/},b \quad 2^{2'}\cdot\frac{b}{2}m^{2}$ (2 группы); $a,b \quad 2^{2}\cdot\frac{b}{2}m^{/}_{\frac{a}{4}}$, $a,b \quad 2^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{2}_{\frac{a}{4}}$ (2 группы); $a,\frac{a+b}{2}\quad 2^{2}\cdot m^{/}$, $a,\frac{a+b}{2}\quad 2^{/}\cdot m^{2}$ (2 группы); $a,\ \frac{a+b}{2}^{2}\quad 2\cdot m^{/}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{/}\quad 2\cdot m^{2}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{2'}\quad 2\cdot m^{/}$ (3 группы); $a,\ \frac{a+b}{2}^{2}\quad 2^{/}\cdot m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{/}\quad 2^{2}\cdot m$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{2'}\quad 2^{/}\cdot m$ (3 группы); $a,\ \frac{a+b}{2}^{2}\quad 2^{2}\cdot m^{/}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{/}\quad 2^{/}\cdot m^{2}$ (2 группы); $a,\ \frac{a+b}{2}^{2}\quad 2^{/}\cdot m^{2}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{/}\quad 2^{2}\cdot m^{/}$, $a,\ \frac{a+b}{2}^{2'}\quad 2^{/}\cdot m^{2'}$ (3 группы); $a^{2},b^{2}\quad 4^{/}$, $a^{/},b^{/}\quad 4^{2}$ (2 группы); $a,b\quad 4^{2}\cdot m^{/}$, $a,b\quad 4^{/}\cdot m^{2}$, $a,b\quad 4^{2'}\cdot m^{/}$ (3 группы); $a^{2},b^{2}\quad 4\cdot m^{/}$, $a^{/},b^{/}\quad 4\cdot m^{2}$, $a^{2'},b^{2'}\quad 4\cdot m^{/}$ (3 группы); $a^{2},b^{2}\quad 4^{/}\cdot m$, $a^{/},b^{/}\quad 4^{2}\cdot m$, $a^{2'},b^{2'}\quad 4^{/}\cdot m$ (3 группы); $a^{2},b^{2}\quad 4^{/}\cdot m^{/}$, $a^{/},b^{/}\quad 4^{2}\cdot m^{2}$ (2 группы); $a^{2},b^{2}\quad 4^{/}\cdot m^{2'}$, $a^{/},b^{/}\quad 4^{2'}\cdot m^{2}$ (2 группы); $a,b\quad 4^{2}\cdot\frac{b}{2}m^{/}_{\frac{a}{4}}$, $a,b\quad 4^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{2}_{\frac{a}{4}}$, $a,b\quad 4^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{2'}_{\frac{a}{4}}$ (3 группы); $a,b\quad 6^{2}\cdot m^{/}$, $a,b\quad 6^{/}\cdot m^{2}$, $a,b\quad 6^{2'}\cdot m^{/}$ (3 группы).

Всего двумерные группы G_2 при (2/)-симметрии порождают 94 младших групп $G_2^{2/}$. Далее, так как группа P, определяющая (2/)-симметрию имеет два нетривиальных нормальных делителя $Q_1 = \ 1,2\ \ 2,1\ = 1^{(2}$ и $Q_2 = \ 1,1\ \ 2,2\ = 1/$, то группы G_2 кроме перечисленных младших, порождают 2- и (1/)-средние, так как фактор-группа $P/Q_1 \cong Q_2$, а фактор-группа $P/Q_2 \cong Q_1$. Для получения Q_2-средних двумерных групп при (2/)- симметрии нужно, согласно [4], каждую младшую двумерную группу (1/)-симметрии умножить на группу 1^{2}, например, $a^{/},b\ \ 1^{2}, \ldots, a,b\quad 6^{/}\cdot m^{/}\cdot 1^{2}$ – всего 46 групп, а также $a^{2},b\cdot 1^{/}, \ldots, a,b\quad 6^{2}\cdot m^{2}\cdot 1^{/}$ – всего 46 групп. Таким образом, при (2/)-симметрии двумерные группы G_2 порождают 186 новых групп, из которых 94 младших и 92 Q-средних.

При (3/)-симметрии двумерные фёдоровские группы G_2 порождают 18 младших групп, список которых таков: $a^{3},b\quad 2^{/}$; $a^{3},b\quad m^{/}$; $a^{3},b\quad\frac{b}{2}m^{/}$; $a^{-3},\ \frac{a+b}{2}^{3}\quad m^{/}$; $a,b^{3}\quad 2^{/}\cdot m$; $a^{3},b\quad 2^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{/}$, $a,b^{3}\quad 2^{/}\ \frac{b}{2}m^{-3}$; $a,b^{-3}\quad 2^{/}\ \frac{b}{2}m^{3}_{\frac{a}{4}}$; $a,\ \frac{a+b}{2}^{3}\quad 2^{/}\cdot m$, $a,b\quad 3^{3}\cdot m^{/}$, $a,b\quad 3^{-3}\cdot m^{/}$, $a^{3},b^{3}\quad 3\cdot m^{/}$; $a,b\quad m^{/}\cdot 3^{3}$, $a,b\quad m^{/}\cdot 3^{-3}$; $a^{3},b^{3}\quad 6^{/}$; $a,b\quad 6^{3}\cdot m^{/}$, $a,b\quad 6^{-3}\cdot m^{/}$, $a^{2},b^{3}\quad 6^{/}\cdot m^{/}$, а также 46 3-средних группы ввиду того, что группа 3/, задающая (3/)-симметрию, имеет нормальный делитель Q = 3, а фактор-группа (3/)/3 изоморфна (1/). Для составления списка этих 3-средних групп нужно каждую младшую группу (1/)-симметрии умножить на группу 1^{3}. Список этих 3-средних групп таков: $a^{/},b\cdot 1^{3}, \ldots, a,b\ \ 6^{/}\cdot m^{/}\cdot 1^{3}$ – всего 46 групп.

Следовательно, при (3/)-симметрии группы G_2 порождают 64 новые группы, из которых 18 младших и 46 три-средних.

При (4/)-симметрии группы G_2 порождают 26 младших, список которых выглядит так: $a^{4},b\quad 2^{/}$; $a^{4},b\quad m^{/}$, $a^{4},b^{2}\quad m^{/}$; $a^{4},b\quad\frac{b}{2}m^{/}$; $a^{2},\ \frac{a+b}{2}^{/}\ (m^{/})$, $a^{2},\ \frac{a+b}{2}^{4}\quad m^{/}$; $a,b^{4}\quad 2^{/}\cdot m$, $a,b^{4}\quad 2^{/}\cdot m^{2}$, $a^{2},b^{4}\quad 2^{/}\cdot m$; $a,b^{2}\quad 2^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{4}$, $a^{2},b^{2}\quad 2^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{4}$, $a^{4},b\quad 2^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{/}$, $a^{4},b\quad 2^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{2'}$; $a,b^{2}\quad 2^{/}\cdot\frac{b}{2}m^{4}_{\frac{a}{4}}$; $a^{2},\ \frac{a+b}{2}^{/}\quad 2\cdot m^{//}$,

$a, \frac{a+b}{2}$ ^{4} $2^{/} \cdot m$, $a, \frac{a+b}{2}$ ^{4} $2^{/} \cdot m^{2}$; $a^{2'}, b^{/}$ 4^{4} ; a, b $4^{4} \cdot m^{/}$, a, b $4^{-4} \cdot m^{/}$, a^{2}, b^{2} $4^{4} \cdot m^{/}$; $a^{/}, b^{2'}$ $4^{4} \cdot m^{/}$, $a^{2'}, b^{/}$ $4^{4} \cdot m^{/}$; a, b $4^{4} \cdot \frac{b}{2} m^{/}_{\frac{a}{4}}$, a, b $4^{-4} \cdot \frac{b}{2} m^{/}_{\frac{a}{4}}$, a^{2}, b^{2} $4^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{4}_{\frac{a}{4}}$, а также 4-, 2- и (2/)-средних, поскольку группа 4/, задающая (4/)-симметрию, обладает тремя различными нетривиальными нормальными делителями $Q_1 = 4$, $Q_2 = 2$ и $Q_3 = 2/$.

Чтобы выписать нужные нам двумерные 4-средних группы при (4/)-симметрии, придётся каждую младшую двумерную группу (1/)-симметрии умножить на группу $1^{(4}$, в результате чего получим следующие 46 групп: $a^{/}, b$ $\cdot 1^{4}, \ldots,$ a, b $6^{/} \cdot m^{/}$ $\cdot 1^{4}$, ввиду того, что фактор-группа $(4/)/Q_1 \cong 1/$. По аналогичной причине для получения списка 2-средних двумерных групп при (4/)-симметрии придётся каждую младшую двумерную группу (2/)-симметрии умножить на группу $1^{(2}$, в результате чего получим следующие 94 группы $a^{2}, b^{/}$ $\times 1^{2}, \ldots,$ a, b $6^{2} \cdot m^{/}$ $\cdot 1^{2}$, так как фактор-группа $(4/)/Q_2 \cong 2/$. Наконец, для получения полного списка (2/)-средних двумерных групп при (4/)-симметрии нужно каждую младшую двумерную группу 2-симметрии умножить на группу$1^{2'} = 1^{2} \cdot 1^{/}$, в результате чего получим 46 групп a^{2}, b $\cdot$ $1^{2} \cdot 1^{/}$,…, a, b $6^{2} \cdot m^{(2}$ $\cdot$ $1^{2} \cdot 1^{/}$ [4].

Из всего сказанного выше следует, что группы G_2 при (4/)-симметрии порождают 212 новых групп, из которых 16 младших и 186 Q-средних.

При (6/)-симметрии группы G_2 порождают 23 младших, список которых таков: a^{6}, b $2^{/}$; a^{6}, b $m^{/}$, a^{3}, b^{2} $m^{/}$, a^{6}, b^{2} $m^{/}$; a^{6}, b $\frac{b}{2} m^{/}$; $a^{3}, \frac{a+b}{2}$ ^{6} $m^{/}$; a^{6}, b $2^{/} \cdot m^{/}$, a^{2}, b^{3} $2^{/} \cdot m$, a^{2}, b^{6} $2^{/} \cdot m$, a, b^{3} $2^{/} \cdot m^{2}$, a, b^{6} $2^{/} \cdot m^{2}$; a^{3}, b $2^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{2'}$, a, b^{3} $2^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{6}$, a^{2}, b^{3} $2^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{6}$, a^{6}, b $2^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{/}$, a^{6}, b $2^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{2'}$; a, b^{3} $2^{/} \cdot \frac{b}{2} m^{6}_{\frac{a}{4}}$; $a, \frac{a+b}{2}$ ^{6} $2^{/} \cdot m$, $a, \frac{a+b}{2}$ ^{3} $2^{/} \cdot m^{2}$, $a, \frac{a+b}{2}$ ^{6} $2^{/} \cdot m^{2}$; a, b $6^{6} \cdot m^{/}$, a, b $6^{-6} \cdot m^{/}$, a^{3}, b^{3} $6^{/} \cdot m^{2'}$. Кроме того, при этой P-симметрии группы G_2 порождают 2-, 3-, 6- и (3/)-средних группы, ибо перечисленные группы, характеризующие категории Q-средних, являются нетривиальными нормальными делителями группы 6/.

Для записи 2-средних групп при (6/)-симметрии нужно каждую младшую двумерную группу (3/)-симметрии умножить на группу $1^{(2}$, так как фактор-группа $(6/)/(2 \simeq (3/)$, а количество интересующих нас 2-средних двумерных групп при (6/)-симметрии равно количеству младших групп, порождаемых группами категории G_2, согласно [4], при их обобщении с (3/)-симметрией. Отсюда следует, что 2-средних двумерных группы при их обобщении с (6/)-симметрией будет 18, список которых следующий: a^{3}, b $2^{/}$ $\cdot 1^{2}$; a^{3}, b $m^{/}$ $\cdot 1^{2}$;…; a, b $6^{3} \cdot m^{/}$ $\cdot 1^{2}$, a, b $\cdot$ $6^{-3} \cdot m^{/}$ $\cdot 1^{2}$. Аналогичным образом для записи 3-средних двумерных групп при (6/)-симметрии нужно каждую младшую двумерную группу (2/)-симметрии умножить на группу $1^{(3}$, так как фактор-группа $(6/)/3 \cong (2/)$. Таким образом, список двумерных 3-средних групп при (6/)-симметрии содержит 94 группы и выглядит так: $a^{2}, b^{/}$ $\cdot 1^{3}$; a^{2}, b $\cdot$ $2^{/}$ $\cdot 1^{3}$, $a^{/}, b$ 2^{2} $\cdot 1^{3}$, $a^{2}, b^{/}$ 2 $\cdot 1^{3}$; …; a, b $6^{2} \cdot m^{/}$ $\cdot 1^{3}$, a, b $6^{/} \cdot m^{2}$ $\cdot 1^{3}$, a, b $6^{2'} \cdot m^{/}$ $\cdot 1^{3}$.

Далее, для записи **6-средних** двумерных групп при их обобщении с (6/)-симметрией нужно каждую младшую двумерную группу (1/)-симметрии умножить на группу $1^{(6}$, так как фактор-группа $(6/)/(6 \cong 1/$. Следовательно, список 6-средних двумерных групп при (6/)-симметрии содержит 46 групп и представляется следующим образом: $a^{/}, b$ $\cdot 1^{6}$, a, b $2^{/}$ $\cdot 1^{6}$, $a^{/}, b$ 2 $\cdot 1^{6}$; …; a, b $6^{/} \cdot m$ $\cdot 1^{6}$, a, b $6 \cdot m^{/}$ $\cdot 1^{6}$, a, b $6^{/} \cdot m^{/}$ $\cdot 1^{6}$.

Наконец, для записи **(3/)-средних** двумерных групп при их обобщении с (6/)- симметрией нужно каждую младшую двумерную группу 2-симметрии умножить на группу $1^{3'} = 1^{3} \cdot 1^{/}$, так как фактор-группа (6/)/(3/)≃(2, поэтому список двумерных (3/)-средних групп при их обобщении с (6/)-симметрией содержит 46 групп и представляется следующим образом: $a\ ^2, b\ \cdot\ 1\ ^3{\cdot}1^{/}$; $a, b\ \ 2\ ^2)\cdot(\ 1\ ^3{\cdot}1^{/}$, $a\ ^2, b\ \ 2\ \cdot$ $(1\ ^3{\cdot}1^{/}$);…; $a, b\ \ 6\ ^2\cdot m\ \cdot\ 1\ ^3{\cdot}1^{/}$, $a, b\ \ 6\cdot m\ ^2\ \cdot\ 1\ ^3\cdot 1^{/}$, $a, b\ \ 6\ ^2\ \cdot m\ ^2\ \cdot$ $1\ ^3{\cdot}1^{/}$.

Итак, при обобщении групп G_2 с (6/)-симметрией получили 227 новых групп, из которых 23 младших, 18 две-средних, 94 три-средних, 46 шесть-средних и 46 (3/)-средних.

В итоге имеем, что 17 двумерных групп G_2 при их обобщении с (p/)-симметрией при p=1, 2, 3, 4, 6 порождают 735 новых групп, из которых 207 младших, включающих $46\, G_2^{1'} + 94\, G_2^{2'} + 18 G_2^{3'} + 26\, G_2^{4'} + 23\, G_2^{6'}$, и 528 Q-средних, среди которых $92\, G_2^{2'} + 46 G_2^{3'} + 186 G_2^{4'} + 204\, G_2^{6'}$. А если не различать правые и левые центры p-вращений на плоскости, то двумерных групп $G_2^{p'}$ при p=1, 2,3,4, 6 будет 757, содержащих 201 младшую, среди которых $46 G_2^{1'} + 94\, G_2^{2'} + 15 G_2^{3'} + 24 G_2^{4'} + 22 G_2^{6'}$, а также 556 Q–средних, содержащих $92 G_2^{2'} + 46 G_2^{3'} + 186 G_2^{4'} + 232 G_2^{6'}$ двумерных Q-средних групп (p/)-симметрии при p = 2,3,4,6 (ср. п.5. в [12]).

Всего при обобщении 17 групп G_2 с 10 розеточными P-симметриями при $P \simeq G_{20}$ порождается 1091 двумерная группа G_2^p, связанная с группами G_2, G_2^1, G_2^p и $G_2^{p'}$ при p = 2,3,4,6 следующим образом: $17 G_2 +\ \ 46M + 17C\ \ G_2^1 +\ \ 46M + 17C\ \ G_2^2 +\ \ 10M + 17C\ \ G_2^3 +\ \ 14 + 17 + 46\ \ G_2^4$ (младших, старших и 2-средних)+(14+17+46+10) G_2^6 (младших, старших, 3- и 2-средних) + (94 + 17+2×46) $G_2^{2'}$(младших, старших, (1/) - и 2-средних) + (18 +17 + 46) $G_2^{3'}$ (младших, старших и 3-средних) + (26 + 17 + 2×46 + 94) $G_2^{4'}$ (младших, старших, (2/)- , 4- и 2-средних) + (23 + 17 + 2 × 46 + 94 +18) $G_2^{6'}$ (младших, старших, (3/)- , 6-, 3- и 2-средних) = 1091 – это столько двумерных групп G_2^P при $P \simeq G_{20}$ соответствует различным четырёхмерным группам G_{42} с инвариантной двумерной плоскостью [2, с.90, п.2]). При этом каждая двумерная группа категории G_2^P моделирует с точностью до строения соответствующую ей группу категории G_{42}, а пара различных энантиоморфных двумерных групп категории G_2^P изображает различную энантиоморфную пару групп категории G_{42}.

Если на плоскости не различать правые и левые P-поворотные центры, то при обобщении двумерных групп симметрии с 10 розеточными P-симметриями получим следующее количество групп категории G_2^P : $17G_2$ + (46M + 17C) G_2^1 + (46M + 17C) G_2^2 + (8M +17C) G_2^3+ (13 + 17 +46) G_2^4(младших, старших и 2-средних) +(13 + 17 + 46 + 8) G_2^6 (младших, старших, 3- и 2-средних) + (94 +17 + 2 × 46) $G_2^{2'}$ (младших, старших, (1/) и 2-средних) +(15 +17 +46) $G_2^{3'}$ (младших, старших и 3-средних) +(24 +17 +2×46 + 94) $G_2^{4'}$(младших, старших, (2/)-, 4- и 2-средних) + (22 + 17 + 2×46 + 94 + 15) $G_2^{6'}$ (младших, старших, (3/)-, 6-, 3- и 2-средних) = 1076, которые соответствуют различным без учёта энантиоморфизма четырёхмерным группам симметрии категории G_{42} с инвариантной двумерной плоскостью. Таким образом, четырёхмерных кристаллографических групп симметрии категории G_{42}, с учётом и без учёта энантиоморфизма, насчитывается 1091 и 1076 соответственно (ср. с.92 в [2]). По записи каждой двумерной группы G_2^P розеточных P-симметрий просматривается строение моделируемой ею четырёхмерной группы симметрии категории G_{42}.

6. Для исследования четырёхмерных точечных групп симметрии с инвариантной плоскостью и точкой на ней, т.е. групп симметрии категории G_{420} в краткой записи, нужно иметь полный список двумерных точечных групп G_{20}^P розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$, ибо этими группами полностью моделируются с точностью до строения все различные четырёхмерные группы симметрии категории G_{420} при соответствующей геометрической интерпретации качеств, приписанных точкам плоскости при выводе самих групп G_{20}^P [2, с. 92].

Нужные нам двумерные точечные группы G_{20}^P розеточных P-симметрий выводятся из 10 двумерных кристаллографических точечных групп симметрии категории G_{20} путём их расширения с помощью розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$, использованных уже нами в пп.4 и 5 настоящей работы при нахождении двумерных групп G_2^P этих же P-симметрий. Таким образом перечень двумерных групп G_2^P, собранных в пп.4 и 5 настоящей работы, служит ориентиром поиска нужных нам групп G_{20}^P розеточных P-симметрий. В связи с этим отпадает необходимость характеризовать смысл символики, в которой будут представлены ниже нужные нам двумерные точечные группы G_{20}^P розеточных P-симметрий.

Обобщая двумерные точечные кристаллографические группы категории G_{20} с 1-симметрией, получим эти же 10 групп 1, 2, 3, 4, 6, m, 2·m, 3·m, 4·m, 6·m (представленных в [7, 5, 3] в шубниковской символике) ввиду того, что в этом случае каждой точке плоскости с инвариантной точкой приписывается один и тот же индекс, отчего симметрия преобразуемой плоскости не меняется. Перечисленные двумерные кристаллографические точечные группы в этом случае будут называться порождающими.

При каждой из остальных 9 нетривиальных розеточных P-симметриях из любой порождающей группы G_{20} выводится только одна старшая группа, распадающаяся в прямое произведение этой порождающей группы и взятой группы P, задающей рассматриваемую розеточную P-симметрию. Таким образом, различных старших групп категории G_{20}^{P} розеточных P-симметрий будет 10×9 = 90 (ср. п.4).

Для завершения полного списка двумерных точечных групп G_{20}^{P} розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$ осталось привести список младших и Q-средних плоскостных точечных групп p- и (p/)-симметрии при p = 1,2,3,4,6, которыми исчерпываются розеточные P-симметрии.

При 2-симметрии группы G_{20} порождают 11 младших G_{20}^{2}, копирующих младшие шубниковские группы [6,7], и ни одной Q-средней. Перечислим эти группы по семействам: $2^{(2)}$; $4^{(2)}$; $6^{(2)}$; $m^{(2)}$; $2^{(2)}\cdot m$, $2\cdot m^{(2)}$; $3\cdot m^{(2)}$; $4^{(2)}\cdot m$, $4\cdot m^{(2)}$; $6^{(2)}\cdot m$, $6\cdot m^{(2)}$.

При 3-симметрии группы G_{20} порождают следующие 4 младших: $3^{(3)}$, $3^{(-3)}$; $6^{(3)}$ и $6^{(-3)}$ и ни одной Q-средней.

При 4-симметрии группы G_{20} порождают 2 младших $4^{(4)}$ и $4^{(-4)}$ и следующие 11 две-средних: $2^{(4)}$; $4^{(4)}\times 1^{(2)}$; $6^{(4)}$; $m^{(4)}$; $2^{(4)}\cdot m$, $2\cdot m^{(4)}$; $3\cdot m^{(4)}$; $4^{(4}\cdot m$, $4\cdot m^{(4)}$; $6^{(4)}\cdot m$, $6\cdot m^{(4)}$, так как группа 4, задающая 4-симметрию, обладает нетривиальным нормальным делителем Q=2, а фактор-группа $4/2 \simeq 2$. Следовательно, 2–средние группы категория G_{20}^{P} при 4-симметрии будит порождать столько младших групп 2-симметрии, сколько их порождает категории G_{20}[4].

При 6-симметрии группы G_{20} порождают следующие 2 младшие $6^{(6)}$ и $6^{(-6)}$, а также четыре 2-средних и одиннадцать 3-средних, так как группа 6, задающая 6-симметрию, имеет два нетривиальных делителя $Q_1 = 2$ и $Q_2 = 3$, фактор-группа $6/Q_1 \cong 3$, а $6/Q_2 \cong 2$.

Для записи 2-средних групп при 6-симметрии нужно каждую младшую двумерную точечную группу при 3-симметрии умножить на группу 2-тождественных преобразований $1^{(2)}$. В результате получим следующие 4 группы $3^{(3)}\times 1^{(2)}$, $3^{(-3)}\times 1^{(2)}$, $6^{(3)}\times 1^{(2)}$, $6^{(-3)}\times 1^{(2)}$, так как фактор-группа $6/Q \cong 3$, а для записи 3-средних групп при 6-симметрии каждую двумерную точечную группу при 2-симметрии следует умножить на группу 3-тождественных преобразований $1^{(3)}$, в результате чего получим 11 3-средних групп $2^{(2)}\times 1^{(3)}$; $4^{(2)}\times 1^{(3)}$; $6^{(2)}\times 1^{(3)}$; $m^{(2)}\times 1^{(3)}$; $(2\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$, $(2^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$; $(3\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(4\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(4^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$; $(6^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$; $(6\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$, ибо Q-средних групп при данной P-симметрии, согласно [4], категория G_{20} будет порождать столько, сколько эта категория порождает младших при P_0-симметрии, где $P_0 = P/Q$.

В результате имеем, что при обобщении 10 двумерных точечных групп G_{20} с p-симметрией при p = 1, 2,3, 4, 6 получаем 10 порождающих, 40 старших, 19 младших и 26 Q-средних различных с учётом энантиоморфизма групп G_{20}^{p}, а без учёта энантиоморфизма таких двумерных точечных групп p-симметрии G_{20}^{p} будет 10 порождающих, 40 старших, 15 младших и 24 Q-средних.

Для завершения полного перечня двумерных точечных групп G_{20}^{P} розеточных P-симметрий недостаёт только групп (p/)-симметрии $G_{20}^{p'}$ при p = 1, 2, 3, 4, 6. Приступим к их выводу и перечислению.

Обобщая двумерные точечные группы G_{20} с (p/)-симметрией при p=1,2,3,4,6, получим 50 старших, структура которых известна, а также группы (1/)- , (2/)-, (3/)-, (4/)- и (6/)- симметрии.

При (1/)-симметрии двумерные точечные группы G_{20} порождают 11 младших, список которых таков: $2^{/)}$; $4^{/)}$; $6^{/)}$; $m^{/)}$; $2^{/)}\cdot m$, $2\cdot m^{/)}$; $3\cdot m^{/)}$; $4^{/)}\cdot m$, $4\cdot m^{/)}$; $6^{/)}\cdot m$, $6\cdot m^{/)}$ и ни одной Q-средней.

При (2/)-симметрии рассматриваемые нами двумерные точечные группы порождают 6 младших: $2^{(2\cdot m^{/)}}$, $2^{/)\cdot m^{2)}}$; $4^{(2\cdot m^{/)}}$, $4^{/)\cdot m^{2)}}$; $6^{(2\cdot m^{/)}}$; $6^{/)\cdot m^{2)}}$, а также 11 (1/)-средних $2^{(2\cdot 1^{/)}}$; $m^{(2\cdot 1^{/)}}$; $4^{(2\cdot 1^{/)}}$; $6^{(2\cdot 1^{/)}}$; $m^{(2\cdot 1^{/)}}$; $(2^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(2\cdot m^{(2})\cdot 1^{/)}$; $(4^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(4\cdot m^{(2})\cdot 1^{/)}$; $(6^{(2}\cdot m)\cdot 1^{/)}$, $(6\cdot m^{(2})\cdot 1^{/)}$ и 11 две-средних $2^{/)} \cdot 1^{(2}$; $4^{/)} \cdot 1^{(2}$; $6^{/)} \cdot 1^{(2}$; $m^{/)} \cdot 1^{(2}$; $(2^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(2}$, $(2 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$; $(3 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$; $(4^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(2}$, $(4 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$; $(6^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(2}$, $(6 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$, так как группа 2/, задающая (2/)-симметрию, обладает двумя нетривиальными нормальными делителями $Q_1 = 2$ и $Q_2 = (1/)$, а фактор-группы $(2/)/2 \simeq 1/$ и $(2/)/(1/) \simeq 2$.

При (3/)-симметрии группы G_{20} порождают 4 младших $3^{(3} \cdot m^{/)}$, $3^{(-3} \cdot m^{/)}$; $6^{(3} \cdot m^{/)}$, $6^{(-3} \cdot m^{/)}$, а также 11 3-средних $2^{/)} \cdot 1^{(3}$; $4^{/)} \cdot 1^{3)}$; $6^{/)} \cdot 1^{(3}$; $m^{/)} \cdot 1^{(3}$; $(2^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(3}$, $(2 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(3}$; $(3 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(3}$; $(4 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(3}$, $(4^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(3}$; $(6^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(3}$, $(6^{/)} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(3}$ ввиду того, что группа 3/, задающая (3/)-симметрию, обладает нормальным делителем $Q = 3$, а $(3/)/\, Q = 1/$.

При (4/)-симметрии двумерные точечные группы G_{20} порождают 2 младших $4^{(4} \cdot m^{/)}$; $4^{(-4} \cdot m^{/)}$, а также (2/)-, 4- и 2-средних группы ввиду того, что группа (4/) обладает тремя нормальными делителями $Q_1 = 2/$, $Q_2 = 4$ и $Q_3 = 2$.

Список (2/)-средних групп $G_{20}^{4'}$ содержит 11 групп, так как фактор–группа $(4/)/\approx (2/) \approx 2$, и выглядит следующим образом: $2^{(4} \cdot 1^{/)}$; $(4^{(4} \cdot 1^{(2)}) \cdot 1^{/)}$; $6^{(4} \cdot 1^{/)}$; $m^{(4} \cdot 1^{/)}$; $(2^{(4} \cdot m) \cdot 1^{/)}$; $(2 \cdot m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(3 \cdot m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(4^{(4} \cdot m) \cdot 1^{/)}$, $(4 \cdot m^{4)}) \cdot 1^{/)}$; $(6^{(4} \cdot m) \cdot 1^{/)}$, $(6 \cdot m^{(4}) \cdot 1^{/)}$. В свою очередь, список 4-средних групп $G_{20}^{4'}$ содержит 11 групп ввиду того, что фактор-группа $(4/)/4 \simeq 1/$, и выглядит так $2^{/)} \cdot 1^{(4}$; $4^{/)} \cdot 1^{(4}$; $6^{/)} \cdot 1^{(4}$; $m^{/)} \cdot 1^{(4}$; $(2^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(4}$, $(2 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(4}$; $(3 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(4}$; $(4^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(4}$; $(4 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(4}$; $(6^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(4}$; $(6 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(4}$. Наконец, список 2-средних групп $G_{20}^{4'}$ содержит 6 групп, ибо фактор-группа $(4/)/2 \simeq 2/$: $2^{(4} \cdot m^{/)}$; $2^{/)} \cdot m^{(4}$; $(4^{(4} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$; $4^{/)} \cdot m^{(4}$; $6^{(4} \cdot m^{/)}$; $6^{/)} \cdot m^{(4}$.

При (6/)-симметрии двумерные точечные группы G_{20} порождают 2 младшие $6^{(6} \cdot m^{/)}$ и $6^{(-6} \cdot m^{/)}$, а также (3/)-, 6-, 3- и 2-средние группы, так как группа (6/) обладает четырьмя нетривиальными нормальными делителями $Q_1 = 3/$, $Q_2 = 6$, $Q_3 = 3$ и $Q_4 = 2$.

Список (3/)-средних групп категории $G_{20}^{6'}$ содержит 11 групп ввиду того, что фактор-группа $(6/)/3/ \approx 2$, и выглядит следующим образом: $2^{(2} \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $4^{(2} \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $6^{(2} \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $m^{(2} \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $(2^{(2} \cdot m) \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$, $(2 \cdot m^{(2}) \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $(3 \cdot m^{(2}) \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $(4^{(2} \cdot m) \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $(4 \cdot m^{(2}) \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $(6^{(2} \cdot m) \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$, $(6 \cdot m^{(2)}) \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$.

Что касается 6-средних групп двумерных точечных групп $G_{20}^{6'}$, то они содержат 11 групп вследствие того, что фактор-группа $(6/)/6 \simeq 1/$, список которых таков: $2^{/)} \cdot 1^{(6}$; $4^{/)} \cdot 1^{(6}$; $6^{/)} \cdot 1^{(6}$; $m^{/)} \cdot 1^{(6}$; $(2^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(6}$; $(2 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(6}$; $(3 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(6}$; $(4^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(6}$; $(4 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(6}$; $(6^{/)} \cdot m) \cdot 1^{(6}$; $(6 \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(6}$. В свою очередь, 3-средних группы категории $G_{20}^{6'}$ исчерпываются списком, содержащим 6 групп, ибо фактор группа $(6/)/3 \approx 2/$: $(2^{2)} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(3}$, $(2^{/)} \cdot m^{(2}) \cdot 1^{(3}$; $(4^{(2} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(3}$, $(4^{/)} \cdot m^{(2}) \cdot 1^{(3}$; $(6^{(2} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(3}$, $(6^{/)} \cdot m^{(2}) \cdot 1^{(3}$. Наконец список 2-средних групп $G_{20}^{6'}$ содержит 4 группы, ибо фактор-группа $(6/)/2 \approx 3/$: $(3^{(3} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$, $(3^{(-3} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$; $(6^{(3} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$, $(6^{(-3} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$.

Таким образом, при обобщении двумерных точечных кристаллографических групп G_{20} с (p/)-симметрией получаем следующие различные с учётом энантиоморфизма группы $G_{20}^{p'}$: 50 старших, 25 младших и 93 Q-средних, а без учёта энантиоморфизма таких групп будет 50 старших, 21 младшая и 91 Q-средняя.

В итоге имеем, что при обобщении использованных нами двумерных точечных групп G_{20} с 10 розеточными P-симметриями выводится 263 группы G_{20}^{P}, из которых 10 порождающих, 90 старших, 44 младших и 119 Q-средних (ср. [13]). Характерной особенностью всех этих выписанных нами групп является то, что ими с точностью до строения, согласно [4], моделируются все различные четырёхмерные точечные группы симметрии, сохраняющие две абсолютно перпендикулярные двумерные плоскости, пересекающиеся в особенной точке, т.е. группы симметрии категории G_{420} [13], строение которых легко усматривается по списку представленных всех различных двумерных точечных групп G_{20}^{P} розеточных P-симметрий.

Если не учитывать правые и левые P-поворотные центры на плоскости, то различных двумерных точечных групп G_{20}^{P} розеточных P-симметрий без учёта энантиоморфизма будет 251, из которых 10 порождающих, 90 старших, 36 младших и 115 Q-средних (ср.с.92 в [2]). Следовательно, среди 263 четырёхмерных точечных групп симметрии категории G_{420} содержится 12 различных энантиоморфных пар.

7. В заключение отметим, что когда группа P приписываемых преобразуемой фигуре качеств последовательно изоморфна четырёхмерным точечным группам симметрии категории G_{420}, то геометрический способ классификации P-симметрий, развитый в [9], приводит к 263 так называемым бирозеточным P-симметриям, подробно описанным в [14, 15]. Характерной особенностью упомянутых бирозеточных P-симметрий является то, что при обобщении, например, r-мерных групп симметрии G_r с 263 бирозеточными P-симметриями получаем новые группы G_r^P, которыми моделируются группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+2)\,r}$.

Литература:

1. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, её обобщения и приложения. - Кишинёв: Штиинца, 1978. - 275 с.
2. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. P-симметрия и её дальнейшее развитие. - Кишинёв: Штиинца, 1986. - 155 с.
3. Палистрант А.Ф. О группах розеточных, таблеточных и гипертаблеточных P-симметрий и их связях с группами многомерных симметрий // Кристаллография, 2000, т.45, №6, с.967-973.
4. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме P-симметрий // Известия АН РМ. Математика, 1994, №1(14), с.75-84.
5. Заморзаев А.М. Двумерные точечные группы гиперкристаллографических P-симметрий и их многомерные приложения // Известия АН РМ. Математика, 1995, №2(18), №3(19), с.22-31.
6. Шубников А.В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. - Москва: изд-во АН СССР, 1951. - 172 с.
7. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинёв: Штиинца, 1976. - 283 с.
8. Белов Н.В., Тархова Т.Н. Группы цветной симметрии // Кристаллография, 1956, т.1, вып.1, с.4-13.
9. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрическая классификация P-симметрий // ДАН СССР, 1981, т.256, №4, с.856-859.
10. Фёдоров Е.С. Симметрия на плоскости // Записи минералогического общества. Ср.2, 1891, т.28, с.345-390.
11. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Двумерные шубниковские группы // Кристаллография, 1960, т.5, вып.4, с.517-524.
12. Палистрант А.Ф., Заморзаев А.М. Группы P-симметрии обоев и их применение к исследованию плоскостных подгрупп многомерных фёдоровских групп // Пространственные группы симметрии: К столетию их открытия. - Москва: Наука, 1992, с.112-131.
13. Палистрант А.Ф. Некоторые геометрические особенности четырёхмерных кристаллографических точечных групп симметрии и их подгурпп // Кристаллография, 2000, т.45б №4, с.591-595.
14. Палистрант Александр. Бирозеточные P-симметрии, их свойства и геометрические приложения // Studia Universitatis. Revista ştiinţifică. Seria: Ştiinţe exacte şi economice (Matematică, Informatică, Economie), №7(27). - Chişinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2009, c.12-14.
15. Палистрант Александр. Средние группы бирозеточных P-симметрий // Studia Universitatis. Revista ştiinţifică. Seria: Ştiinţe exacte şi economice (Matematică, Informatică, Economie), №2(32). - Chişinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2010, c.15-26.

Prezentat la 14.11.2011