STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă ştiinţifică a Universităţii de Stat din Moldova, 2011, nr.7(47)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ КАТЕГОРИИ G_{41} И ИХ ТОЧЕЧНЫХ ПОДГРУПП G_{410}

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

Sunt descrise grupurile unidimensionale ale P-simetriilor cristalografice, care se aplică la studierea grupurilor de simetrie a categoriilor G_{41} şi G_{410} ale spaţiului euclidian de dimensiunea patru.

The one-dimensional linear groups of the crystallographic P-symmetries are written. By using these groups the symmetry groups of the G_{41} and G_{410} categories of the sour-dimensional Euclidean space are described.

1. Группы симметрии категории G_{41} сохраняют в четырёхмерном пространстве прямую (одномерную плоскость), а их точечные подгруппы G_{410} в этом пространстве, кроме отмеченной прямой, сохраняют ещё точку (нульмерную плоскость) на ней, являющуюся пересечением отмеченной прямой и перпендикулярной к ней трёхмерной плоскости E_3. Следовательно, точечные группы симметрии категории G_{410} являются одновременно и точечными группами G_{430} четырёхмерных линейных групп симметрии категории G_{41}. Отсюда следует, что точечные группы G_{410} и G_{430} в четырёхмерном пространстве совпадают (ср. с. 150 в [1]).

Числовая характеристика групп симметрии категории G_{41} была впервые выявлена в п.4 работы [1] при исследовании трёхмерных кристаллографических групп конформной симметрии, а количество групп симметрии категории G_{410} совпадает с числом трёхмерных точечных групп симметрии и антисимметрии G_{30}^{1} (см. главу I, §1,п.III работы [2]). Однако судить о структуре четырёхмерных групп симметрии категории G_{41}, опираясь на трёхмерные кристаллографические группы конформной симметрии, не представляется возможным ввиду того, что эти группы интерпретируют не сами группы симметрии G_{41}, а их фактор-группы G_{41}/G_1, где G_1 – нормальный делитель группы G_{41}, порождённый её циклической подгруппой параллельных переносов. Что касается трёхмерных точечных групп G_{30}^{1} симметрии и антисимметрии, то они с точностью до строения моделируют все различные точечные группы симметрии категории G_{410}. Геометрический способ классификации кристаллографических P-симметрий при $P\simeq G_{30}$ выявил в [3] 32 различные P-симметрии, для обозначения которых использовались 11 осевых трёхмерных точечных групп симметрии и антисимметрии. В дальнейшем выяснилось, что одномерные группы G_1^P 32 кристаллографических P-симметрий при $P\simeq G_{30}$ являются наиболее приемлемыми для нас группами, которыми интерпретируются все различные группы симметрии категории G_{41}, а одномерные точечные группы G_{10}^P этих же 32 кристаллографических P-симметрий наиболее полно изображают с точностью до строения все различные точечные группы симметрии категории G_{410}.

Заметим, что дискретные группы симметрии одномерного пространства исчерпываются двумя категориями групп G_1 и G_{10}. Категория G_1 характеризуется двумя бесконечными группами – группой симметрии p1 направленной прямой и группой симметрии pm двусторонней (неориентированной) прямой, а точечные подгруппы G_{10} этих групп – группой симметрии 1 ориентированного отрезка и группой симметрии m обычного неориентированного отрезка. В символах этих групп p характеризует циклическую группу переносов на основной вектор одномерного пространства, 1 – тождественное преобразование, m – отражение от точки одномерного пространства или инвариантной точки отрезка [2].

Что касается самих групп G_1^P и G_{10}^P 32 кристаллографических P-симметрий, то они ещё никем полностью не выписывались, а использование таких групп даёт возможность проникнуть в структуру не совсем очевидных четырёхмерных групп симметрии категорий G_{41} и G_{410}. Выводу одномерных линейных и точечных групп 32 кристаллографических P-симетрий G_1^P и G_{10}^P с представлением их полного списка и посвящается главным образом настоящая статья.

2. Для многомерных приложений P-симметрии весьма плодотворен представленный в [3] геометрический принцип классификации P-симметрий, позволивший описать в [4] с помощью трёхмерных точечных групп G_{30}^{P} 32 кристаллографических P-симметрии, при P$\simeq G_{30}$, категорию шестимерных точечных групп симметрии G_{630} с инвариантной трёхмерной плоскостью. Позднее этот результат был воспроизведён в [5], а с помощью розеточных, таблеточных, бордюрных и ленточных групп этих же 32 P-симметрий в этой работе исследованы категории пятимерных и шестимерных плоскоточечных и плосколинейных групп G_{520}, G_{6320}, G_{521} и G_{6321} [5, гл. 2,3]. В дальнейшем геометрический принцип классификации P-симметрий был перенесён на гиперкристаллографические P-симметрии [6], а также на розеточные, таблеточные и гипертаблеточные P-симметрии [7].

Чтобы облегчить громоздкий подсчёт так называемых средних групп, которых слишком много при большом числе самих P-симметрий (например, 32 P-симметрии с группами подстановок P$\simeq G_{30}$), и свести его к предварительному выводу младших групп, в [8] введено понятие сильного изоморфизма групп и изоморфизма P-симметрий, а также обоснована связь между числом различных младших групп одних P-симметрий и числом различных средних групп других P-симметрий. Это положение существенно использовалось в [6] при нахождении количества всех различных групп полной P-симметрии для двумерных точечных групп G_{20}^{P} 32 кристаллографических (P$\simeq G_{30}$), 122 гиперкристаллографических P-симметрий 1-го порядка (P$\simeq G_{430}$) и 624 гиперкристаллографических P-симметрий 2-го порядка (P $\simeq G_{5430}$).

Из сказанного выше следует, что для получения всех групп P-симметрии, которыми моделируются все различные группы симметрии категории G_{41}, нужно одномерные линейные группы G_1 обобщить с 32 кристаллографическими P-симметриями при P$\simeq G_{30}$, а для получения групп P-симметрии, которыми моделируются группы симметрии категории G_{410}, нужно одномерные линейные точечные группы G_{10} также обобщить с этими же 32 трёхмерными кристаллографическими P-симметриями.

3. Итак, для решения поставленной задачи нам понадобятся одномерные линейные и точечные группы G_1^P и G_{10}^P 32 кристаллографических P-симметрий в геометрической классификации. Вывод этих групп опирается на хорошо известные и подробно описанные в [1,5] факты из теории P-симметрии, классификации как самих P-симметрий, так и групп P-симметрии, получаемых из классических.

Напомним эти факты. Приписывая каждой точке фигуры хотя бы один индекс i = 1,2,…,p и фиксируя некоторую группу P подстановок этих индексов, назовём преобразованием P-симметрии фигуры её изоморфическое преобразование, переводящее каждую точку с индексом i в точку с индексом κ_i так, что подстановка $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots p \\ k_1 & k_2 \dots k_p \end{pmatrix} \in P$. Такие преобразования разлагаются на преобразования симметрии s рассматриваемой фигуры и подстановки ε из группы P. Преобразования P-симметрии фигуры составляют мультипликативную группу G, входящие в них преобразования симметрии s – её порождающую группу S, а подстановки индексов ε – группу P_1. При $P_1 = P$ называем G группой полной P-симметрии, при $e \subset P_1 \subset P$ – неполной, а при $P_1 = e$ группа G = S. Обозначая через $Q=G\cap P$, получаем деление групп полной P-симметрии на порождающие, старшие, младшие и средние (Q - средние) соответственно случаям P=e, Q = P, Q = e, $e \subset Q \subset P$ [1,5]. Если G – группа полной P-симметрии, то $H = G \cap S$ – её подгруппа симметрии, а $Q=G\cap P$ – подгруппа подстановок индексов (P–тождественных преобразований).

Любую группу G полной P-симметрии можно вывести из её порождающей группы S следующими шагами: 1) разысканием таких нормальных делителей H и Q групп S и P, что фактор-группы S/H и P/Q изоморфны: 2) установлением изоморфизма χ фактор-группы S/H на P/Q и попарным перемножением соответствующих классов sH и $\varepsilon Q = \chi\,(sH)$; 3) объединением полученных произведений $(sH) \cdot (\varepsilon Q)$ (основная теорема А.М. Заморзаева о P-симметрии, см. [1,5]).

Полный перечень нужных нам 32 кристаллографических P-симметрий при P $\simeq G_{30}$ в интернациональной символике осевых трёхмерных точечных групп симметрии и антисимметрии приведен в [4], а также в [5, § 2.1]. Отношение изоморфизма P-симметрий является отношением эквивалентности, разбивающей множество интересующих нас 32 кристаллографических P-симметрий на следующие

22 класса сильной изоморфности: 1; 2, $\underline{1}$, $\underline{2}$; 3; 4, $\underline{4}$; 6, 3$\underline{1}$, $\underline{6}$; 22; 2$\underline{1}$; 2$\underline{2}$; 32, 3$\underline{2}$; 42, 4$\underline{2}$; $\underline{4}$2; 62, 6$\underline{2}$; 32$\underline{1}$, $\underline{6}$2; 4$\underline{1}$; 6$\underline{1}$; 22$\underline{1}$; 42$\underline{1}$; 62$\underline{1}$; 23; 43, $\underline{4}$3; 231; 43$\underline{1}$ (ср.[8]). Далее, так как в семействах изоморфных Р-симметрий с общей порождающей, согласно [8], совпадают как числа различных младших групп, так и числа различных Q-средних, то для обзора полного вывода интересующих нас одномерных линейных групп G_1^P и их точечных подгрупп G_{10}^P упоминавшихся выше 32 кристаллографических Р-симметрий при $P \simeq G_{30}$ достаточно подробно исследовать лишь одну Р-симметрию из каждого класса изоморфности. При этом следует помнить, что число различных Q-средних групп Р-симметрии с данной порождающей равно числу различных младших групп P_0-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа P/Q сильно изоморфна P_0 [8].

4. Приступим к выписыванию одномерных линейных групп G_1^P 32 кристаллографических Р-симметрий в геометрической классификации.

При 1-симметрии одномерные линейные группы G_1 совпадают с классическими группами p1 и pm, называемыми порождающими, так как в этом случае каждой точке фигуры приписывается один и тот же индекс, и симметрия рассматриваемой «индексированной» фигуры сохраняется.

При каждой из остальных кристаллографических Р-симметрий из любой порождающей выводится только одна старшая группа. Всего различных старших групп будет 2×31=62: $p1\times1^{(2)}$, $p1\times1^{(\underline{1})}$, $p1\times1^{(\underline{2})}$, $p1\times1^{(3)}$, $p1\times1^{(4)}$, $p1\times1^{(\underline{4})}$, …, $p1\times1^{(43\underline{1})}$ (всего 31 группа); $pm\times1^{(2)}$, $pm\times1^{(\underline{1})}$, $pm\times1^{(\underline{2})}$; $pm\times1^{(3)}$; $pm\times1^{(4)}$, $pm\times1^{(\underline{4})}$, …, $pm\times1^{(43\underline{1})}$ (всего такая же 31 группа), так как каждая старшая группа при любой Р-симметрии является прямым произведением порождающей и группы, задающей определённую Р-симметрию.

При 2-симметрии группы категории G_1 порождают 3 младших $p^{(2)}1$; $pm^{(2)}$, $p^{(2)}m$, полученных из порождающих заменой в системе образующих их элементов преобразований симметрии соответствующими преобразованиями Р-симметрии, а при всех изоморфных Р-симметриях 2-, $\underline{1}$- и $\underline{2}$- данного класса категория G_1 будет порождать таких младших групп в 3 раза больше, т.е. 3×3 = 9.

При 3-симметрии группы G_1 порождают только одну младшую $p^{(3)}1$, так как младшие энантиоморфные группы $p^{(q)}1$ и $p^{(-q)}1$ в приложениях к изучению многомерных групп симметрии не будут различаться при q=3,4,6.

При 4-симметрии рассматриваемые группы G_1 порождают одну младшую группу $p^{(4)}1$ и 3 две-средних $p^{(4)}1\cdot1^{(2)}$; $pm^{(4)}$ и $p^{(4)}m$ ввиду того, что при 4-симметрии Q=2, а фактор-группа 4/2 ≅ 2, следовательно, число 2-средних групп, порождаемых категорией G_1, будет равно, согласно п.3, числу младших групп 2-симметрии, порождаемых этой категорией групп. При 4- и $\underline{4}$- симметрии рассматриваемые линейные группы G_1 будут порождать таких групп в 2 раза больше, то есть 2×4=8, из которых 2-младших и шесть 2-средних.

При 6-симметрии категория G_1 порождает 1 младшую $p^{(6)}1$, одну 2-среднюю $p^{(3)}\times1^{(2)}$, так как в этом случае Q=2, а фактор-группа 6/2 ≅3 – три 3-средних $p^{(2)}\times1^{(3)}$, $pm^{(2)}\times1^{(3)}$, $p^{(2)}m\times1^{(3)}$, ибо в этом случае Q=3, а фактор-группа 6/3 ≅ 2 – всего 5 новых групп, из которых 1 младшая, одна 2-средняя и три 3-средних. При всех трёх Р-симметриях 6-, 3$\underline{1}$- и $\underline{6}$- данного класса изоморфности категория G_1 таких групп будет порождать в 3 раза больше, 3×5=15, из которых три младших, три 2-средних и девять 3-средних.

При (22)-симметрии группы категории G_1 порождают 1 младшую $p^{(2}m^{2)}$ и три 2- средних $p^{(2}1\cdot1^{2)}$, $pm^{(2}\cdot1^{2)}$, $p^{(2}m\cdot1^{2)}$ вследствие того, что в этом случае Q=2), а фактор-группа (22)/2)≅(2. Всего порождается при (22)-симметрии 4 новых группы, из которых 1 младшая и три 2-средних.

При (2$\underline{1}$)-симметрии группы G_1 порождают 3 младших $p^{(2}\underline{m}$, $\underline{p}m^{2)}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}$; три 2)-средних $\underline{p}1\cdot1^{(2}$, $p\underline{m}\cdot1^{(2}$, $\underline{p}m\cdot1^{(2}$ вследствие того, что при Q=(2 фактор-группа (2$\underline{1}$)/(2 ≅ $\underline{1}$, три $\underline{1}$-средних $p^{(2}1\cdot\underline{1}$, $pm^{(2}\cdot\underline{1}$, $p^{(2}m\cdot\underline{1}$, так как при Q =$\underline{1}$ фактор-группа (2$\underline{1}$)/$\underline{1}$ ≅ (2, три $\underline{2}$-средних $\underline{p}1\cdot\underline{1}^{(2}$, p $\underline{m}\cdot\underline{1}^{(2}$, $\underline{p}m\cdot\underline{1}^{(2}$ ввиду того, что при Q = $\underline{2}$ фактор-группа (2$\underline{1}$)/$\underline{2}$ ≅ $\underline{1}$. Итого, при (2$\underline{1}$)-симметрии категория G_1 порождает 12 новых групп, из которых 3 младших и по три 2-, $\underline{1}$- и $\underline{2}$-средних.

При (2$\underline{2}$)-симметрии группы симметрии G_1 порождают по 2 младших $p^{(2}\underline{m}^{2)}$, $\underline{p}^{2)}m^{(2}$, три (2-средних $\underline{p}^{2)}\cdot 1^{(2}$, $p\underline{m}^{(2}\cdot 1^{(2}$, $\underline{p}^{2)}m\cdot 1^{(2}$ ввиду того, что при Q = (2 фактор-группа (2$\underline{2}$)/(2 $\cong$ $\underline{2}$), три $\underline{2}$)-средних $p^{(2}\cdot\underline{1}^{2)}$, $pm^{(2}\cdot\underline{1}^{2)}$, $p^{(2}m\cdot\underline{1}^{2)}$, так как при Q=$\underline{2}$) фактор-группа (2$\underline{2}$)/$\underline{2}$) $\cong$ (2. Всего в этом случае группы категории G_1 порождают 8 новых групп, из которых 2 младших и по три 2- и $\underline{2}$- средних.

При (32)-симметрии группы категории G_1 порождают 1 младшую $p^{(3}m^{2)}$ и три (3-средних $p^{2)}\cdot 1^{(3}$, $pm^{2)}\cdot 1^{(3}$, $p^{2)}m\cdot 1^{(3}$, поскольку при Q = (3 фактор-группа (32)/(3 $\cong$2), а при P-симметриях (32)- и (3$\underline{2}$)- всего данного класса изоморфности группы G_1 порождают 8 новых групп, из которых 2 младших и шесть 3-средних.

При (42)-симметрии группы категории G_1 порождают 1 младшую $p^{(4}m^{2)}$, две (2-средних $p^{(4}m^{2)}\cdot 1^{(2}$, $p^{2)}m^{(4}$, так как при Q = (2 фактор-группа (42)/(2$\cong$(22), три (22)-средних $p^{(4}1\cdot 1^{(22)}$, $pm^{(4}\cdot 1^{2)}$, $p^{(4}m\cdot 1^{2)}$ ввиду того, что при Q = 22 фактор-группа (42)/(22)$\cong$(2, три 4-средних $p^{2)}1\cdot 1^{(4}$, $pm^{2)}\cdot 1^{(4}$, $p^{2)}m\cdot 1^{(4}$ поскольку при Q=(4 фактор-группа (42)/(4 $\cong$2). Всего выводится 9 групп, из которых 1 младшая и 8 Q-средних, а при двух P-симметриях (42)- и (4$\underline{2}$)- этого класса изоморфности группы категории G_1 порождают 18 новых групп, из которых 2 младших и 16 Q-средних.

При ($\underline{4}$2)-симметрии группы категории G_1 порождают 1 младшую $\underline{p}^{(4}m^{2)}$, три (2-средних $\underline{p}^{(4}1\cdot 1^{(2}$, $p^{(4}m^{2)}\cdot 1^{(2}$, $\underline{p}^{2)}\underline{m}^{(4}$, так как в этом случае Q=(2, а фактор-группа ($\underline{4}$2)/(2 $\cong$ 2$\underline{1}$; три $\underline{4}$- средних $p^{(2}1\cdot\underline{1}^{(4}$, $pm^{2)}\cdot\underline{1}^{(4}$, $p^{(2}m\times\underline{1}^{(4}$ ввиду того, что при этом Q=($\underline{4}$, а фактор-группа ($\underline{4}$2)/($\underline{4}$ $\cong$ 2), три (22)-средних $\underline{p}^{(4}1\times 1^{(22)}$, $p^{(2}\underline{m}^{(4}\times 1^{(22)}$, $\underline{p}^{(4}m^{2)}\cdot 1^{(22)}$, ибо при Q=(22) фактор-группа ($\underline{4}$2)/(22) $\cong$ ($\underline{2}$, три (2$\underline{2}$)-средних $p^{(2}1\times 1^{(2\underline{2})}$, $pm^{(2}\times 1^{(2\underline{2})}$, $p^{(2}m\times 1^{(2\underline{2})}$, поскольку фактор-группа ($\underline{4}$2)/(2$\underline{2}$) $\cong$ 2. Всего категория G_1 при ($\underline{4}$2)-симметрии порождает 13 новых групп, из которых 1 младшая и 12 Q-средних.

При (62)-симметрии группы G_1 порождают 1 младшую $p^{(6}m^{2)}$, одну (2-среднюю $p^{(3}m^{2)}\cdot 1^{(2}$, так как фактор-группа (62)/(2 $\cong$ (32), две 3-средних $p^{(2}m^{2)}\cdot 1^{(3}$ и $p^{2)}m^{(2}\cdot 1^{(3}$ ввиду того, что фактор-группа (62)/3$\cong$(22); три (32)-средних $p^{(2}1\times 1^{(32)}$, $pm^{(2}\times 1^{(32)}$, $p^{(2}m\times 1^{(32)}$, посколько фактор-группа (62)/(32) $\cong$ (2; три (6-средних $p^{(2}1\times 1^{(6}$, $pm^{2)}\times 1^{(6}$, $p^{2)}m\times 1^{(6}$, ибо фактор-группа (62)/(6 $\cong$ 2). Всего группы симметрии G_1 при (62)-симметрии порождают 10 новых групп, из которых 1 младшая и 9 Q-средних, а при двух P-симметриях (62)- и (6$\underline{2}$)- этого класса изоморфности таких групп будет 20, из которых 2 младших и 18 Q-средних.

При ($\underline{6}$2)-симметрии группы категории G_1 порождают 1 младшую $\underline{p}^{(6}m^{2)}$, одну ($\underline{2}$-среднюю $p^{(3}m^{2)}\cdot\underline{1}^{(2}$, ибо в этом случае фактор-группа ($\underline{6}$2)/($\underline{2}$ $\cong$ 32, три (3-средних, $p^{(2}\underline{m}\cdot 1^{(3}$, $\underline{p}m^{2)}\cdot 1^{(3}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot 1^{(3}$,так как фактор-группа ($\underline{6}$2)/(3$\cong$21, три($\underline{6}$-средних $p^{2)}1\cdot\underline{1}^{(6}$, $pm^{2)}\cdot\underline{1}^{(6}$, $p^{2)}m\cdot\underline{1}^{(6}$, поскольку фактор-группа ($\underline{6}$2)/($\underline{6}$ $\cong$ 2), три (32)-средних $\underline{p}^{2)}1\cdot 1^{(32)}$, $p\underline{m}^{(2}\cdot 1^{(32)}$, $\underline{p}^{(2}m\cdot 1^{(32)}$ ввиду того, что фактор-группа ($\underline{6}$2)/(32)$\cong$($\underline{2}$, три (3$\underline{2}$)-средних $p^{(2}1\cdot 1^{(3\underline{2})}$, $pm^{(2}\cdot 1^{(3\underline{2})}$, $p^{(2}m\cdot 1^{(3\underline{2})}$ вследствие того, что фактор-группа ($\underline{6}$2)/(3$\underline{2}$)$\cong$(2. Всего при ($\underline{6}$2)-симметрии категория G_1 порождает 14 новых групп, из которых 1 младшая и 13 Q-средних, а с двумя P-симметриями ($\underline{6}$2)- и (32$\underline{1}$)- данного класса изоморфности категория G_1 будет порождать таких групп в два раза больше, то есть 28, из которых 2 младших и 26 Q-средних. При оставшихся 10 P-симметриях категория G_1 не будет порождать младших групп.

При (4$\underline{1}$)-симметрии категория G_1 порождает $\underline{1}$)-среднюю группу $p^{(4}1\times\underline{1}$ ввиду того, что фактор-группа (4$\underline{1}$)/$\underline{1}$) $\cong$ (4, одну ($\underline{2}$-среднюю $p^{(4}1\times\underline{1}^{(2}$ вследствие того, что фактор-группа (4$\underline{1}$)/$\underline{2}$ $\cong$ (4, три (2-средних группы $p^{(2}\underline{m}\cdot 1^{(2}$, $\underline{p}m^{(2}\cdot 1^{(2}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot 1^{(2}$, так как фактор-группа (4$\underline{1}$)/(2$\cong$(2$\underline{1}$), три (4-средних $\underline{p}1\cdot 1^{(4}$, $p\underline{m}\cdot 1^{(4}$, $\underline{p}m\cdot 1^{(4}$, ибо фактор группа (4$\underline{1}$)/(4$\cong\underline{1}$, три $\underline{4}$-средних $\underline{p}1\cdot\underline{1}^{(4}$, $p\underline{m}\cdot\underline{1}^{(4}$, $\underline{p}m\cdot\underline{1}^{(4}$, поскольку фактор-группа (4$\underline{1}$)/$\underline{4}\cong\underline{1}$, три (2$\underline{1}$)-средних $p^{(2}1\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, $pm^{(2}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, $p^{(2}m\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, потому что фактор-группа (4$\underline{1}$)/(2$\underline{1}$)$\cong$(2. Следовательно, категория G_1 при (4$\underline{1}$)-симметрии порождает 14 Q-средних групп.

При (6$\underline{1}$)-симметрии группы категории G_1 порождают одну $\underline{1}$)-среднюю $p^{(6}1\cdot\underline{1}$, ибо фактор-группа (6$\underline{1}$)/$\underline{1}$) $\cong$ (6, одну (2-среднюю $\underline{p}^{(3}1\cdot 1^{(2}$, так как фактор-группа (6$\underline{1}$)/(2 $\cong$3$\underline{1}$, одну ($\underline{2}$-среднюю $p^{(6}1\cdot\underline{1}^{(2}$, потому что фактор-группа (6$\underline{1}$)/($\underline{2}$ $\cong$ (6, три (3-средних группы $p^{(2}\underline{m}\cdot 1^{(3}$, $\underline{p}m^{(2}\cdot 1^{(3}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot 1^{(3}$ вследствие того, что фактор-группа (6$\underline{1}$)/(3 $\cong$2$\underline{1}$, одну (2$\underline{1}$) среднюю $p^{(3}1\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, так как фактор-группа (6$\underline{1}$)/(2$\underline{1}$) $\cong$ (3, три (6-средних групп $\underline{p}1\times1^{(6}$, $p\underline{m}\times1^{(6}$, $\underline{p}m\times1^{(6}$ ввиду того, что фактор-группа $(6\underline{1})/(6\cong\underline{1}$, три ($\underline{6}$-средних $\underline{p}1\cdot\underline{1}^{(6}$, $p\underline{m}\cdot\underline{1}^{(6}$, $\underline{p}m\cdot\underline{1}^{(6}$, поскольку фактор-группа $(6\underline{1})/\underline{6}\cong\underline{1}$, три $(3\underline{1})$-средних $p^{(2}1\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$, $pm^{(2}\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$, $p^{(2}m\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$, так как фактор-группа $(6\underline{1})/(3\underline{1})\cong(2$. Таким образом, при $(6\underline{1})$-симметрии группы G_1 порождают 16 Q-средних групп.

При (22$\underline{1}$)-симметрии категория G_1 порождает одну $\underline{1}$-среднюю группу $p^{(2}m^{2)}\cdot\underline{1}$ вследствие того, что фактор-группа $(22\underline{1})/\underline{1}\cong22$, три 2)-средних $p^{(2}\underline{m}\cdot1^{2)}$, $\underline{p}m^{(2}\cdot1^{2)}$, $\underline{p}^{(2}m\cdot1^{2)}$, ибо фактор-группа $(22\underline{1})/2)\cong(2\underline{1})$, две $\underline{2}$)-средние $p^{2)}\underline{m}^{(2}\cdot\underline{1}^{2)}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot\underline{1}^{(2}$ так как фактор-группа $(22\underline{1})/\underline{2})\cong2\underline{2}$, три (22)-средних $\underline{p}1\cdot1^{(22)}$, $p\underline{m}\cdot1^{(22)}$, $\underline{p}m\cdot1^{(22)}$, потому что фактор-группа $(22\underline{1})/(22)\cong\underline{1}$, три $(2\underline{1})$- средних $p^{2)}1\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, $pm^{2)}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, $p^{2)}m\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, поскольку фактор-группа $(22\underline{1})/(2\underline{1})\cong2)$, три $(2\underline{2})$-средних $\underline{p}1\cdot1^{(2\underline{2})}$,$p\underline{m}\cdot1^{(2\underline{2})}$, $\underline{p}m\cdot1^{(2\underline{2})}$, ибо фактор-группа $(22\underline{1})/(2\underline{2})\cong\underline{1}$.

В итоге имеем, что категория G_1 при $(22\underline{1})$- симметрии порождает 15 Q-средних групп.

При (42$\underline{1}$)-симметрии группы G_1 порождают одну $\underline{1}$-среднюю группу $p^{(4}m^{2)}\cdot\underline{1}$, поскольку фактор-группа $(42\underline{1})/\underline{1}\cong42$, одну ($\underline{2}$-среднюю $p^{(4}m^{2)}\cdot\underline{1}^{(2}$, ибо фактор-группа $(42\underline{1})/(\underline{2}\cong(42)$, три (4-средних группы $p^{(2}\underline{m}\cdot1^{(4}$, $\underline{p}m^{(2}\cdot1^{(4}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot1^{(4}$ ввиду того, что фактор-группа $(42\underline{1})/(4\cong2\underline{1}$, три (22)-средние $p^{(2}\underline{m}\cdot1^{(22)}$, $\underline{p}m^{(2}\cdot1^{(22)}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\times1^{(22)}$, так как фактор-группа $(42\underline{1})/(22)\cong(2\underline{1})$, три $(2\underline{2})$-средние $p^{(2}\underline{m}\cdot1^{(2\underline{2})}$, $\underline{p}m^{(2}\cdot1^{(2\underline{2})}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot1^{(2\underline{2})}$ вследствие того, что фактор-группа $(42\underline{1})/(2\underline{2})\cong2\underline{1}$, две $\underline{4}$-средних $p^{(2}\underline{m}^{2)}\cdot\underline{1}^{(4}$, $\underline{p}^{2)}m^{(2}\cdot\underline{1}^{(4}$, потому что фактор-группа $(42\underline{1})/\underline{4}\cong(2\underline{2})$, две $(2\underline{1})$-средние $p^{(2}\underline{m}^{2)}\cdot(1^{2}\times\underline{1})$, $\underline{p}^{2)}m^{(2}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$ ввиду того, что фактор-группа $(42\underline{1})/(2\underline{1})\cong2\underline{2}$, три $(4\underline{1})$-средних $p^{2)}1\cdot(1^{(4}\times\underline{1})$, $pm^{2)}\cdot(1^{(4}\times\underline{1})$, $p^{2)}m\cdot(1^{(4}\times\underline{1})$, ибо фактор-группа $(42\underline{1})/(4\underline{1})\cong2)$, три $(22\underline{1})$-средних $p^{(2}1\cdot(1^{(22)}\times\underline{1})$, $pm^{(2}\cdot(1^{(22)}\times\underline{1})$, $p^{(2}m\cdot(1^{(22)}\times\underline{1})$, так как фактор-группа $(42\underline{1})/(22\underline{1})\cong(2$, три (42)-средних $\underline{p}1\cdot1^{(42)}$, $p\underline{m}\cdot1^{(42)}$, $\underline{p}m\cdot1^{(42)}$ вследствие того, что фактор-группа $(42\underline{1})/(42)\cong\underline{1}$, три $(4\underline{2})$-средних $\underline{p}1\cdot1^{(4\underline{2})}$, $p\underline{m}\cdot1^{(4\underline{2})}$, $\underline{p}m\cdot1^{(4\underline{2})}$, поскольку фактор-группа $(42\underline{1})/(4\underline{2})\cong\underline{1}$, три $(\underline{4}2)$-средних $\underline{p}1\cdot1^{(\underline{42})}$, $p\underline{m}\cdot1^{(\underline{42})}$, $\underline{p}m\times1^{(\underline{42})}$ вследствие того, что $(42\underline{1})/(\underline{42})\cong\underline{1}$. Из всего выписанного следует, что группы G_1 при их обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией порождают 30 новых Q-средних групп.

При (62$\underline{1}$)-симметрии одномерные линейные группы G_1 порождают одну $\underline{1}$-среднюю группу $p^{(6}m^{2)}\cdot\underline{1}$, ибо фактор-группа $(62\underline{1})/\underline{1}\cong(62)$, одну ($\underline{2}$-среднюю $p^{(6}m^{2)}\cdot\underline{1}^{(2}$ ввиду того, что фактор-группа $(621)/(\underline{2}\cong62$, одну (2-среднюю группу $p^{(3}\underline{m}^{2)}\cdot1^{(2}$, так как фактор-группа $(62\underline{1})/(\underline{2}\cong(32\underline{1})$,одну $(2\underline{1})$-среднюю $p^{(3}m^{2)}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, потому что фактор-группа $(62\underline{1})/(2\underline{1})\cong(32)$, три (6-средних $p^{2)}\underline{m}\cdot1^{(6}$, $\underline{p}m^{2)}\cdot1^{(6}$, $\underline{p}^{2)}\underline{m}\cdot1^{(6}$, поскольку фактор-группа $(62\underline{1})/6\cong2\underline{1}$, три (32)-средних $p^{(2}\underline{m}\times1^{(32)}$, $\underline{p}m^{(2}\cdot1^{(32)}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot1^{(32)}$ вследствие того, что фактор-группа $(62\underline{1})/(32)\cong(2\underline{1})$, три $(3\underline{2})$-средних $p^{(2}\underline{m}\cdot1^{(3\underline{2})}$, $\underline{p}m^{(2}\cdot1^{(3\underline{2})}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot1^{(3\underline{2})}$, потому что фактор-группа $(62\underline{1})/(3\underline{2})\cong(2\underline{1})$, две $(\underline{6}$-средние $p^{(2}\underline{m}^{2)}\cdot\underline{1}^{(6}$, $\underline{p}^{2)}m^{(2}\cdot\underline{1}^{(6}$, так как фактор-группа $(62\underline{1})/(\underline{6}\cong(2\underline{2})$, две $(3\underline{1})$-средние $p^{(2}\underline{m}^{2)}\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$, $\underline{p}^{2)}m^{(2}\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$ вследствие того, что фактор-группа $(62\underline{1})/(3\underline{1})\cong(2\underline{2})$, три $(6\underline{1})$-средних $p^{2)}1\cdot(1^{(6}\times\underline{1})$, $pm^{2)}\cdot(1^{(6}\times\underline{1})$, $p^{2)}m\cdot(1^{(6}\times\underline{1})$ в связи с тем, что фактор-группа $(62\underline{1})/(6\underline{1})\cong2)$, три $(32\underline{1})$-средних $p^{(2}1\cdot(1^{(32)}\times\underline{1})$, $pm^{(2}\cdot(1^{32}\times\underline{1})$, $p^{(2}m\cdot(1^{(32)}\times\underline{1})$, так как фактор-группа $(62\underline{1})/(32\underline{1})\cong(2$, три (62)-средних $\underline{p}1\cdot1^{(62)}$, $p\underline{m}\cdot1^{(62)}$, $\underline{p}m\cdot1^{(62)}$ вследствие того, что фактор-группа $(62\underline{1})/(62)\cong\underline{1}$, три $(6\underline{2})$-средних $\underline{p}1\cdot1^{(6\underline{2})}$, $p\underline{m}\cdot1^{(6\underline{2})}$, $\underline{p}m\cdot1^{(6\underline{2})}$ ввиду того, что фактор-группа $(62\underline{1})/(6\underline{2})\cong\underline{1}$, три $(\underline{6}2)$- средних $\underline{p}1\cdot1^{(\underline{62})}$, $p\underline{m}\cdot1^{(\underline{62})}$, $\underline{p}m\cdot1^{(\underline{62})}$, ибо фактор-группа $(62\underline{1})/(\underline{62})\cong\underline{1}$. Таким образом, классические группы категории G_1 при $(62\underline{1})$-симметрии порождают 32 новых различных Q-средних группы.

При (23)- симметрии группы G_1 порождают только одну (22)-среднюю группу $p^{(3}1\cdot1^{(22)}$, так как фактор-группа $(23)/(22)\cong3$, а при (43)-симметрии эти же группы G_1 порождают одну (22)- среднюю $p^{(3}m^{2)}\cdot1^{(22)}$ вследствие того, что фактор-группа $(43)/(22)\cong(32)$, и три (23)-средних $p^{(2}1\cdot1^{(23)}$, $pm^{(2}\cdot1^{(23)}$, $p^{(2}m\cdot1^{(23)}$ ввиду того, что фактор-группа $(43)/(23)\cong(2$. При двух P-симметриях (43)- и $(\underline{4}3)$- данного класса изоморфности группы G_1 будут порождать таких групп в 2 раза больше, то есть 8, из которых две (22)- средних и шесть (23)-средних.

При (23$\underline{1}$)-симметрии группы G_1 порождают одну (22)-среднюю $p^{(3}1\cdot1^{(22)}$ из-за того, что фактор-группа $(23\underline{1})/(22)\cong3\underline{1}$, одну $(22\underline{1})$-среднюю $p^{(3}1\cdot(1^{(22)}\times\underline{1})$ ввиду того, что фактор-группа $(23\underline{1})/(22\underline{1})\cong3$, три (23)-средних $\underline{p}1\cdot1^{(23)}$, $p\underline{m}\cdot1^{(23)}$, $\underline{p}m\cdot1^{(23)}$, ибо фактор-группа $(23\underline{1})/(23)\cong\underline{1}$. Следовательно, группы G_1 при $(23\underline{1})$-симметрии порождают 5 новых Q-средних групп.

При $(43\underline{1})$-симметрии категория G_1 порождает одну (22)-среднюю группу $p^{(\underline{6}}m^{2)}\cdot 1^{(22)}$, поскольку фактор-группа $(43\underline{1})/(22) \cong (\underline{6}2)$, одну $(22\underline{1})$-среднюю $p^{(3}m^{2)}\cdot(1^{(22)}\times\underline{1})$ ввиду того, что фактор-группа $(43\underline{1})/(22\underline{1}) \cong 32$, три $(23\underline{1})$-средних $p^{(2}1\times(1^{(23)}\times\underline{1})$, $pm^{(2}\cdot(1^{(23)}\times\underline{1})$, $p^{(2}m\cdot(1^{(23)}\times\underline{1})$, потому что фактор-группа $(43\underline{1})/(221) \cong (2$, три (43)-средних группы $\underline{p}1\cdot 1^{(43)}$, $p\underline{m}\cdot 1^{(43)}$, $\underline{p}m\cdot 1^{(43)}$, поскольку фактор-группа $(43\underline{1})/(43) \cong \underline{1}$, три $(\underline{4}3)$-средних группы $\underline{p}1\cdot 1^{(\underline{4}3)}$, $p\underline{m}\cdot 1^{(\underline{4}3)}$, $\underline{p}m\cdot 1^{(\underline{4}3)}$ вследствие того, что фактор-группа $(43\underline{1})/(43) \cong \underline{1}$, три (23)-средних группы $p^{(2}\underline{m}\cdot 1^{(23)}$, $\underline{p}m^{2)}\cdot 1^{(23)}$, $\underline{p}^{(2}\underline{m}\cdot 1^{(23)}$, ибо фактор-группа $(43\underline{1})/(23) \cong (2\underline{1})$.

Из всего сказанного выше следует, что категория G_1 при $(43\underline{1})$-симметрии порождает 14 Q-средних групп.

В итоге составлен список 343 различных без учета энантиоморфизма одномерных линейных групп G_1^P кристаллографических P-симметрий при $P \cong G_{30}$, из которых 2 порождающих, 62 старших, 30 младших и 249 Q-средних. Этими 343 группами интерпретируются с точностью до строения все различные четырёхмерные группы симметрии категории G_{41}, поскольку между выписанными группами G_1^P кристаллографических P-симметрий и группами симметрии четырёхмерных стержней G_{41} устанавливается сильноизоморфное соответствие [8]. Такое же сильноизоморфное соответствие устанавливается между 343 трёхмерными кристаллографическими группами конформной симметрии, не содержащими различных групп за счёт энантиоморфизма, полученными впервые в [1], и фактор-группами G_{41}/G_1, где G_1– нормальный делитель группы симметрии категории G_{41}, порождён её циклической подгруппой параллельных переносов. Тем самым независимым путём подтверждена истинность подробно описанного в [1] результата по выводу трёхмерных кристаллографических групп конформной симметрии.

5. Для исследования четырёхмерных точечных групп симметрии категории G_{410} нужно иметь полный список одномерных точечных групп G_{10}^P кристаллографических P-симметрий при $P \cong G_{30}$, так как этими группами полностью интерпретируются с точностью до строения все различные интересующие нас четырёхмерные точечные группы отмеченной категории.

Приступим к выводу и выписыванию этих групп.

При 1-симметрии, когда каждой точке преобразуемой фигуры приписывается один и тот же знак, порождаемые категорией G_{10}, новые группы тождественно совпадают с двумя группами симметрии 1 и m, составляющими саму категорию G_{10}. Группы 1 и m называются в этом случае порождающими.

При каждой из остальных кристаллографических P-симметрий из любой порождающей выводится только одна старшая группа. Всего различных старших групп будет 2×31=62. Это группы $1\times 1^{(2)}$, $1\times 1^{(\underline{1})}$, $1\times 1^{(\underline{2})}$,…, $1\times 1^{(43\underline{1})}$ (всего 31 группа), $m\times 1^{(2)}$, $m\times 1^{(\underline{1})}$, $m\times 1^{(\underline{2})}$, … , $m\times 1^{(431)}$ (всего такая же 31 группа). Всего таких групп 62.

Для завершения списка одномерных точечных групп G_{10}^P кристаллографических P-симметрий осталось привести перечень их младших и средних групп.

При 2-, $\underline{1}$- и $\underline{2}$-симметрии группа m категории G_{10} порождает только по одной младшей $m^{(2)}$, $\underline{m}$ и $m^{(\underline{2})}$ – всего 3 группы.

При 3-симметрии группы категории G_{10} порождают только две старшие группы $1\times 1^{(3)}$, $m\times 1^{(3)}$, которые уже учтены.

При 4- и $\underline{4}$- симметрии группа m категории G_{10} порождает только по одной 2-средней группе $m^{(4)}$ и $m^{(\underline{4})}$ ввиду того, что при этих P-симметриях Q=2, а фактор-группа $4/2 \cong \underline{4}/2 \cong 2$. Следовательно, в этом случае всего новых 2-средних групп будет две.

При 6-симметрии категория G_1 порождает одну 3-среднюю группу $m^{(6)}=m^{(2)}\times 1^{(3)}$, так как при Q=3 фактор-группа $6/3 \cong 2$. Что касается 2-средних групп, то группа m их не порождает, поскольку при $Q = 2$ фактор-группа $6/2 \cong 3$, а младших групп при 3-симметрии категория G_{10} не порождает. При всех трёх P-симметриях 6-, $(3\underline{1})$-и $\underline{6}$- данного класса изоморфности категория G_{10} таких групп будет порождать в три раза больше 1×3=3 - $m^{(6)}$, $m^{(3\underline{1})} = \underline{m}\times 1^{(3)}$, $m^{(\underline{6})}= m^{(\underline{2})}\times 1^{(3)}$.

При (22)-симметрии группы G_{10} порождают одну 2)-среднюю группу $m^{(2}\cdot 1^{2)}$, так как при Q =2) фактор-группа $(22)/2) \cong (2$, а при $(2\underline{1})$-симметрии – одну (2-среднюю группу $\underline{m}\cdot 1^{(2}$, так как при Q=(2 фактор-группа $(2\underline{1})/(2 \cong \underline{1}$, одну $\underline{1}$-среднюю $m^{(2}\underline{1}$ ввиду того, что $(2\underline{1})/\underline{1} \cong (2$, одну $\underline{2}$-среднюю группу $\underline{m}\cdot 1^{(2}$, поскольку фактор-группа $(2\underline{1})/(\underline{2} \cong \underline{1}$. В итоге имеем 3 новых Q-средних группы.

При $(2\underline{2})$-симметрии группы категории G_{10} порождают одну (2-среднюю группу $m^{2)}1^{(2}$, так как при Q =(2 фактор-группа $(2\underline{2})/(2 \cong \underline{2})$, одну $\underline{2}$-среднюю $m^{(2}1^{\underline{2})}$ ввиду того, что при Q=$\underline{2}$) фактор-группа $(2\underline{2})/\underline{2}) \cong (2$. Всего имеем 2 новые Q-средние группы.

При (32)- и $(3\underline{2})$-симметрии группы G_{10} порождают по одной 3-средней группе $m^{(32)} = m^{2)}1^{(3}$, так как фактор-группа $(32)/(3 \cong 2)$, и $m^{\underline{2})}1^{(3}$ ввиду того, что фактор-группа $(3\underline{2})/(3 \cong \underline{2})$. Таким образом, при P-симметриях этого класса имеется две Q-средние новые группы.

При (42)-симметрии группы категории G_{10} порождают одну (22)-среднюю группу $m^{(2}1^{(22)}=m^{(4}1^{2)}$ ввиду того, что при Q = 22 фактор-группа $(42)/(22) \cong (2$, одну (4-среднюю группу $m^{2)}1^{(4}$, так как при Q = (4 фактор-группа $(42)/(4 \cong 2)$, а при $(4\underline{2})$-симметрии – одну $(2\underline{2})$-среднюю $m^{(2}1^{(2\underline{2})} = m^{(4}1^{\underline{2})}$ вследствие того, что при Q = (22) фактор-группа $(4\underline{2})/(22) \cong \underline{2}$, и одну 4-среднюю $m^{\underline{2})}1^{(4}$, ибо при Q = 4 фактор-группа $(4\underline{2})/4 \cong \underline{2})$. Таким образом, при отмеченных двух симметриях (42)- и $(4\underline{2})$- этого класса изоморфности категория G_1 порождает 4 новых Q-средних группы.

При $(\underline{4}2)$-симметрии (или $(\underline{4}\ \underline{2})$-симметрии) группы G_{10} порождают одну $(\underline{4}$-среднюю $m^{2)}1^{(\underline{4}}$, поскольку при Q=$(\underline{4}$ фактор-группа $(\underline{4}2)/(\underline{4} \cong 2)$, одну (22)-среднюю группу $\underline{m}^{(2}1^{(22)}= m^{(\underline{4}}\ 1^{2)}$ ввиду того, что при Q=22 фактор-группа $(\underline{4}2)/(22) \cong (\underline{2}$, одну $(2\underline{2})$-среднюю $m^{(2}1^{(2\underline{2})}=m^{(\underline{4}}1^{\underline{2})}$, потому что при Q = $(2\underline{2})$ фактор-группа $(\underline{4}2)/(2\underline{2}) \cong (2$. Следовательно, при $(\underline{4}2)$-симметрии группы G_{10} порождают 3 Q-средних группы.

При (62) симметрии группы рассматриваемой категории G_{10} порождают одну (32)-среднюю $m^{(2}1^{(32}= m^{(6}1^{(2}$, так как при Q=32 фактор-группа $(62)/(32) \cong (2$, одну 6-среднюю $m^{2)}1^{(6}$, ибо при Q = (6 фактор-группа $(62)/(6 \cong 2)$, а при $(6\underline{2})$-симметрии эта категория порождает одну $(3\underline{2})$-среднюю $m^{(2}1^{(3\underline{2})}= m^{(6}1^{\underline{2})}$ ввиду того, что при Q=3$\underline{2}$ фактор-группа $(6\underline{2})/(3\underline{2}) \cong (2$, одну (6-среднюю группу $\underline{m}^{2)}1^{6)}$, поскольку при Q=(6 фактор-группа $(6\underline{2})/(6 \cong \underline{2})$. Следовательно, группы G_{10} при двух P-симметриях (62)- и $(6\underline{2})$- этого класса изоморфности порождают 4 Q-средних группы.

При $(32\underline{1})$-симметрии группы G_{10} порождают одну (32)-среднюю $\underline{m}1^{(32)}=m1^{(32\underline{1})}$ ввиду того, что при Q = (32) фактор-группа $(32\underline{1})/(32) \cong \underline{1}$, одну $(3\underline{1})$-среднюю $m^{2)}1^{(3\underline{1})}$, так как при Q=3$\underline{1}$ фактор-группа $(32\underline{1})/(3\underline{1}) \cong 2)$, одну $(3\underline{2})$-среднюю $\underline{m}1^{(3\underline{2})}$, поскольку при Q = $(3\underline{2})$ фактор-группа $(32\underline{1})/(3\underline{2}) \cong \underline{1}$, а при $(\underline{6}2)$-симметрии группы G_{10} порождают одну $(\underline{6}$-среднюю $m^{2)}1^{(\underline{6}}$, так как при Q=$(\underline{6}$ фактор-группа $(\underline{6}2)/(\underline{6} \cong 2)$, одну (32)-среднюю $\underline{m}^{(2}1^{(32)} = m^{(\underline{6}}1^{2)}$, так как при Q=(32) фактор-группа $(\underline{6}2)/(32) \cong (\underline{2}$, одну $(3\underline{2})$-среднюю $m^{(2}1^{(3\underline{2})}=m^{(\underline{6}}1^{\underline{2})}$, так как при Q=$(3\underline{2})$ фактор-группа $(\underline{6}2)/(3\underline{2}) \cong (2$. Таким образом, при двух P-симметриях $(32\underline{1})$- и $(\underline{6}2)$- этого класса изоморфности группы симметрии категории G_{10} порождают 6 Q-средних групп.

При $(4\underline{1})$-симметрии группы G_{10} порождают одну (4-среднюю группу $\underline{m}1^{(4}$ ввиду того, что при Q=(4 фактор-группа $(4\underline{1})/(4 \cong \underline{1}$, одну $(\underline{4}$-среднюю группу $\underline{m}1^{(\underline{4}}$, так как при Q=$(\underline{4}$ фактор-группа $(4\underline{1})/\underline{4} \cong \underline{1}$, одну $(2\underline{1})$-среднюю группу $m^{(2}1^{(2\underline{1})}=m^{(4\underline{1})}$, поскольку при Q= 2$\underline{1}$ фактор-группа $(4\underline{1})/(2\underline{1}) \cong (2$. Отсюда следует, что категория G_{10} при $(4\underline{1})$-симметрии порождает 3 Q-средних группы.

При $(6\underline{1})$-симметрии категория G_{10} порождает одну (6-среднюю группу $\underline{m}1^{(6}$, так как при Q=(6 фактор-группа $(6\underline{1})/(6 \cong \underline{1}$, одну $(\underline{6}$-среднюю $\underline{m}1^{(\underline{6}}$ вследствие того, что при Q=$(\underline{6}$ фактор-группа $(6\underline{1})/(\underline{6} \cong \underline{1}$, одну $(3\underline{1})$-среднюю $m^{(2}1^{(3\underline{1})}= m^{(6\underline{1})}$ ввиду того, что при Q=3$\underline{1}$ фактор-группа $(6\underline{1})/(3\underline{1}) \cong (2$. Всего при $(6\underline{1})$-симметрии группы G_{10} порождают 3 Q-средние группы.

При $(22\underline{1})$-симметрии группы G_{10} порождают одну (22)-среднюю группу $\underline{m}1^{(22)}$, поскольку при Q=(22) фактор-группа $(22\underline{1})/(22) \cong \underline{1}$, одну $(2\underline{1})$-среднюю группу $m^{2)}1^{(2\underline{1})}=m^{2)}1^{(2}\underline{1}$, поскольку при Q=2$\underline{1}$ фактор-группа $(22\underline{1})/(2\underline{1}) \cong 2)$, одну $(2\underline{2})$-среднюю $\underline{m}1^{(2\underline{2})} = m1^{(2}1^{\underline{2})}$ ввиду того, что при Q=2$\underline{2}$ фактор-группа $(22\underline{1})/(2\underline{2}) \cong \underline{1}$. Отсюда следует, что группы G_{10} при $(22\underline{1})$-симметрии порождают 3 Q-средних группы.

В свою очередь, **при (42$\underline{1}$)-симметрии** категория G_{10} порождает одну (4$\underline{1}$)-среднюю $m^{2)}1^{(4\underline{1})}=m^{2)}1^{(4}\underline{1}$, так как при Q=(4$\underline{1}$) фактор-группа (42$\underline{1}$)/(4$\underline{1}$) ≅ 2), одну (22$\underline{1}$)-среднюю $m^{(2}1^{(22\underline{1})}=m^{(4}1^{2)}\underline{1}$, так как при Q=22$\underline{1}$ фактор-группа (42$\underline{1}$)/(22$\underline{1}$) ≅ (2, одну (42)-среднюю $\underline{m}1^{(42)}= \underline{m}1^{(4}1^{2)}$ ввиду того, что при Q=(42) фактор-группа (421)/(42) ≅ $\underline{1}$, одну (4$\underline{2}$)-среднюю $\underline{m}1^{(4\underline{2})} = \underline{m}1^{(4}1^{\underline{2})}$ вследствие того, что (42$\underline{1}$)/(4$\underline{2}$) ≅ $\underline{1}$, одну ($\underline{4}$2)-среднюю $\underline{m}1^{(\underline{4}2)}$ вследствие того, что при Q=($\underline{4}$2) фактор-группа (42$\underline{1}$)/($\underline{4}$2) ≅ $\underline{1}$. Таким образом, группы G_{10} при (42$\underline{1}$)-симметрии порождают 5 Q-средних групп.

При (62$\underline{1}$)-симметрии группы G_{10} порождают одну (6$\underline{1}$)-среднюю $m^{2)}1^{(6\underline{1})}= m^{2)}1^{(6}\underline{1}$, так как при Q=6$\underline{1}$ фактор-группа (62$\underline{1}$)/(6$\underline{1}$) ≅ 2), одну (32$\underline{1}$)-среднюю $m^{(2}1^{(32\underline{1})} = m^{(6}1^{2)}\underline{1}$, поскольку при Q=32$\underline{1}$ фактор-группа (62$\underline{1}$)/(32$\underline{1}$) ≅ (2, одну (62)-среднюю $\underline{m}1^{(62)}$ ввиду того, что при Q=62 фактор-группа (62$\underline{1}$)/(62) ≅ $\underline{1}$, одну (6$\underline{2}$)-среднюю $\underline{m}1^{(6\underline{2})}= m^{(6}\cdot\underline{1}1^{\underline{2})}$, ибо при Q=$\underline{6}$2 фактор-группа (62$\underline{1}$)/($\underline{6}$1) ≅ $\underline{1}$. Итог сказанного выше – группа m при (62$\underline{1}$)-симметрии порождает 4 различных Q-средних группы.

В свою очередь, **при (23)-симметрии** группы G_{10} не порождают средних групп, так как группа 23, задающая (23)-симметрию, не содержит такого нормального делителя Q, чтобы фактор-группа (23)/Q ≅ 2, а **при (43)- и ($\underline{4}$3)-симметриях** группа m категории G_{10} порождает одну (23)-среднюю $m^{(2}1^{(23)}= m^{(4}1^{3)}$, поскольку при Q=23 фактор-группа (43)/(23) ≅ (2, и одну (23)-среднюю группу $m^{(\underline{2}}\ 1^{(23)}= m^{(\underline{4}}1^{3)}$ при ($\underline{4}$3)-симметрии ввиду того, что при Q=(23) фактор-группа ($\underline{4}$3)/(23)≅($\underline{2}$. Поэтому при двух симметриях (43)- и ($\underline{4}$3)- рассматриваемого класса изоморфности группа m порождает 2 Q-средние группы.

Далее, **при (23$\underline{1}$)-симметрии** группа m порождает только одну (23)-среднюю группу $\underline{m}\ 1^{(23)}$ вследствие того, что при Q=23 фактор-группа (23$\underline{1}$)/(23)≅$\underline{1}$.

Наконец, **при ($\underline{4}$3$\underline{1}$)-симметрии** группа m порождает одну (23$\underline{1}$)-среднюю группу $m^{(2}1^{(231)}=m^{(4}\ 1^{3)}1^{2)}\underline{1}$, так как при Q=23$\underline{1}$ фактор-группа (431)/(231) ≅ (2, одну (43)-среднюю $\underline{m}1^{(43)}$, поскольку при Q=43 фактор-группа (43$\underline{1}$)/(43)≅$\underline{1}$, и одну ($\underline{4}$3)-среднюю $\underline{m}1^{(\underline{4}3)}= m^{(4}(1^{3)}\underline{1})$ ввиду того, что при Q=$\underline{4}$3 фактор-группа (43$\underline{1}$)/($\underline{4}$3)≅$\underline{1}$. В итоге имеем, что группа m при (43$\underline{1}$)-симметрии порождает 3 различных Q-средних группы.

Таким образом, при обобщении двух групп 1 и m категории G_{10} с 32 кристаллографическими P-симметриями при P ≃ G_{30} получаем 2 порождающие, 31 старшую, 3 младших и 55 Q-средних – всего 122 группы G_{10}^{P}, которыми интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категории G_{410} , тождественно совпадающие со 122 группами симметрии категории G_{430}, моделируемые с точностью до строения трёхмерными точечными шубниковскими классами симметрии и антисимметрии G_{30}^{1} [2,9].

В приводимой ниже таблице для каждой группы G_{10}^{P} 32 кристаллографических P-симметрий укажем изображаемую ею группу категории G_{30}^{1}, так как для групп симметрии категории G_{410} ещё не разработана символика их записи. При этом соответствии между группами G_{10}^{P} и G_{30}^{1}, антитождественному преобразованию $\underline{1}$ в группах категории G_{10}^{P} будет соответствовать инверсионно поворотная ось первого порядка $\bar{1}$ в группах G_{30}^{1}, а отражению m от точки в группах G_{10}^{P} будет соответствовать антитождественное преобразования $1'$ в группах G_{30}^{1} . Далее, порождающей группе 1 и выводимым из неё старшим группам категории G_{10}^{P} будут соответствовать 32 порождающие группы (или что то же самое 32 точечные группы симметрии G_{30}) категории G_{30}^{1}, группе m и выводимым из неё старшим группам категории G_{10}^{P} будут соответствовать 32 старшие группы категории G_{30}^{1}, а младшим группам $\underline{m}$, $m^{(2)}$, и $\underline{m}^{(2)}$, а также Q-средним группам категории G_{10}^{P} будут соответствовать 58 младших групп антисимметрии категории G_{30}^{1}. Полное сопоставление в интернациональной символике в порядке записи одномерных точечных групп G_{10}^{P} 32 кристаллографических P-симметрий с сильноизоморфными с ними трёхмерными точечными группами G_{30}^{1} симметрии и антисимметрии с соблюдением вышеупомянутых разъяснений выполнено в приводимой таблице.

Таблица

Сопоставление одномерных точечных групп G_{10}^{P} 32 кристаллографических Р-симметрий и трёхмерных точечных групп G_{30}^{1} симметрии и антисимметрии

Одномерные точечные группы G_{10}^{P} 32 кристаллографических Р-симметрий	Трехмерные кристаллографические точечные группы G_{30}^{1} симметрии и антисимметрии
$1;\ 11^{(2)},\ 11^{(3)},\ 11^{(4)},\ 11^{(6)},\ 11^{(22)},\ 11^{(3.2)}$ $11^{(42)},\ 11^{(62)},\ 11^{(23)},\ 11^{(43)},\ 1\underline{1}$ $11^{(2\underline{1})},\ 11^{(3\underline{1})},\ 11^{(4\underline{1})},\ 11^{(6\underline{1})},\ 11^{(22\underline{1})}$ $11^{(32\underline{1})},\ 11^{(42\underline{1})},\ 11^{(62\underline{1})},\ 11^{(231)}$ $11^{(43\underline{1})},\ 11^{(\underline{2})},\ 11^{(\underline{4})},\ 11^{(\underline{6})},\ 11^{(2\underline{2})},\ 11^{(3\underline{2})}$ $11^{(4\underline{2})},\ 11^{(\underline{4}2)},\ 11^{(6\underline{2})},\ 11^{(\underline{6}2)},$ $11^{(\underline{4}3)},\ m,\ m1^{(2)},\ m1^{(3)},\ m1^{(4)},\ m1^{(6)}$ $m1^{(22)},\ m1^{(32)},\ m1^{(42)},\ m1^{(62)}$ $m1^{(23)},\ m1^{(43)},\ m\underline{1},\ m1^{(2\underline{1})},\ m1^{(3\underline{1})}$ $m1^{(4\underline{1})},\ m1^{(6\underline{1})},\ m1^{(22\underline{1})},$ $m1^{(32\underline{1})},\ m1^{(42\underline{1})},\ m1^{(62\underline{1})},\ m1^{(23\underline{1})}$ $m1^{(43\underline{1})},\ m1^{(\underline{2})},\ m1^{(\underline{4})},\ m1^{(\underline{6})},\ m1^{(2\underline{2})}$ $m1^{(3\underline{2})},\ m1^{(4\underline{2})},\ m1^{(\underline{4}2)},\ m1^{(6\underline{2})}$ $m1^{(\underline{6}2)},\ m1^{(\underline{4}3)};\ m^{(2)},\ m^{(4)},\ m^{(6)}$ $m^{2)}1^{(2},\ m^{2)}1^{(3};\ m^{2)}\ 1^{(4},\ m^{(4}1^{2)}$ $m^{2)}1^{(6},\ m^{(6}\ 1^{2)};\ m^{(4}1^{3)},\ \underline{m},$ $m^{(2}\ \underline{1},\ \underline{m}1^{(2},\ \underline{m}1^{(\underline{2}};\ m^{(3\underline{1})};\ \underline{m}\ 1^{(4}$ $\underline{m}1^{(\underline{4}},\ m^{(4}\ \underline{1};\ m^{(6}\ \underline{1},\ \underline{m}\ 1^{(\underline{6}},\ m^{(6}\ \underline{1}$ $\underline{m}1^{(2\underline{2})},\ m^{2)}1^{(2}\ \underline{1},\ \underline{m}1^{(2}\ 1^{\underline{2})},$ $m^{(2)}1^{(3\underline{1})},\ m^{(3\underline{1})}\ 1^{(\underline{2})},\ m^{(3\underline{1})}\ 1^{2)};\ \underline{m}1^{(42)},$ $m^{(4}1^{2)}\ \underline{1},\ m^{2)}1^{(4}\underline{1},\ \underline{m}\ 1^{(4}1^{\underline{2})}$ $m^{(4}\underline{1}1^{(\underline{2})};\ \underline{m}1^{(62)},\ m^{(6}1^{2)}\ \underline{1}$ $m^{2)}\ 1^{(6}\ \underline{1},\ \underline{m}1^{(6}1^{\underline{2})},\ m^{(6}\underline{1}\ 1^{\underline{2})}$ $\underline{m}1^{(23)},\ \underline{m}\ (1^{(4},\ 1^{3)}),\ m^{(4}(1^{(3}\underline{1}),\ m^{(4}(1^{3)}1^{(2}\underline{1})$ $m^{(\underline{2})};\ m^{(\underline{4})},\ m^{(\underline{6})};\ m^{(2}\ 1^{\underline{2})},\ m^{\underline{2})}1^{(2};$ $m^{(\underline{2}}1^{(3};\ m^{\underline{2})}1^{(4},\ m^{(4}1^{\underline{2})};\ m^{\underline{2})}1^{(6}$ $m^{(6}1^{\underline{2})};\ m^{(\underline{4}}1^{2)};\ m^{2)}1^{(\underline{4}},$ $m^{(\underline{4}}\ 1^{\underline{2})};\ m^{(\underline{6}}1^{2)},\ m^{2)}1^{(\underline{6}},\ m^{(\underline{6}}1^{\underline{2})}$ $m^{(\underline{4}}\ 1^{3)};$	1, 2, 3, 4, 6, 222, 322 422, 622, 23, 432, $\bar{1}$ 2/m, $\bar{3}$, 4/m, 6/m, mmm $\bar{3}m$, 4/mmm, 6/mmm, m3 m3m, m, $\bar{4}$, $\bar{6}$, mm2, 3m 4mm, $\bar{4}2m$, 6mm, $\bar{6}m2$ $\bar{4}3m$; $1'$, $21'$, $31'$, $41'$, $61'$ $2221'$, $3221'$, $4221'$, $6221'$ $231'$, $4321'$, $\bar{1}1'$, $2/m1'$, $\bar{3}1'$ $4/m1'$, $6/m1'$, $mmm1'$ $\bar{3}m1'$, $4/mm1'$, $6/mmm1'$, $m31'$ $m3m1'$, $m1'$, $\bar{4}1'$, $\bar{6}1'$, $mm21'$ $3m1'$, $4mm1'$, $\bar{4}2m1'$, $6mm1'$ $\bar{6}m21'$, $\bar{4}3m1'$; $2'$, $4'$, $6'$ $22'2'$, $32'2'$, $42'2'$, $4'22'$; $62'2'$, $6'22'$; $4'32'$, $\bar{1}'$ $2'/m'$, $2/m'$, $2'/m$; $\bar{3}'$; $4/m'$ $4'm$, $4'/m'$; $6'/m'$, $6/m'$, $6'/m$; $m'm'm'$, $mm'm'$, $m'mm$ $\bar{3}m'$, $\bar{3}'m$, $\bar{3}'m'$; $4/m'm'm'$, $4'/mmm'$, $4/mm'm'$, $4/m'mm$ $4'/m'mm'$, $6/m'm'm'$, $6'/mmm'$, $6/mm'm'$, $6/m'mm$, $6'/m'mm'$ $m'3$; $m'3m'$, $m3m'$, $m'3m$, m'; $\bar{4}'$, $\bar{6}'$; $mm'2'$, $m'm'2$; $3m'$; $4m'm'$, $4'mm'$; $6m'm'$, $6'mm'$; $\bar{4}'2m'$, $\bar{4}2'm'$, $\bar{4}'2'm$; $\bar{6}'2m'$, $\bar{6}2'm'$, $\bar{6}'2'm$ $\bar{4}'3m'$.

Из представленной таблицы непосредственно видно, что каждая группа Р-симметрии категории G_{10}^{F} и соответствующая ей группа категории G_{30}^{1} имеют одинаковое строение.

Литература:

1. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, её обобщения и приложения. - Кишинёв: Штиинца, 1978. - 275 с.
2. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинёв: Штиинца, 1976. - 283 с.
3. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрическая классификация Р-симметрий // ДАН СССР, 1981, том 256, №4, с.856-859.
4. Палистрант А.Ф. Применение трёхмерных точечных групп Р-симметрии к выводу шестимерных групп симметрии // ДАН СССР, 1981, том 260, №4, с.884-888.
5. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. Р-симметрия и её дальнейшее развитие. - Кишинёв: Штиинца, 1986. - 155 с.

6. Заморзаев А.М. Двумерные точечные группы гиперкристаллографических P-симметрий // Известия АН РМ. Математика, 1995, №2(18)–3(19), с.22-31.
7. Палистрант А.Ф. О группах розеточных, таблеточных и гипертаблеточных P-симметрий и их связях с группами многомерных симметрий // Кристаллография, 2000, т.45, №6, с.967-973.
8. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме P-симметрий // Известия АН РМ. Математика, 1994, №1, с.75-84.
9. Шубников А.В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. - Москва: изд-во АН СССР, 1951. - 172 с.

Prezentat la 15.04.2011