

## MODELE POLLING. METODE ȘI ALGORITMI

Diana BEJENARI

Catedra Matematică Aplicată

The needs for solving various applied problems have contributed to the intense research in the Queueing Theory, where the research of Polling systems plays a significant role. In this paper, the Polling models and their historical evolution are presented. Research methods and algorithms are described.

## Introducere

Modelele Polling reprezintă modele de așteptare cu un singur nod, în care există mai multe spații de așteptare pentru diferite șiruri de mesaje, și un server, care deservește fiecare șir de așteptare, bazat pe o regulă stabilită (după așa-numitul tabel Polling).

Modelele de așteptare cu un singur nod sunt foarte importante în domeniul teoriei așteptării, deoarece acestea oferă perspective foarte bune pentru studierea șirurilor de așteptare complexe cu mai multe noduri. Tabloul general al modelului Polling este prezentat în Figura 1.

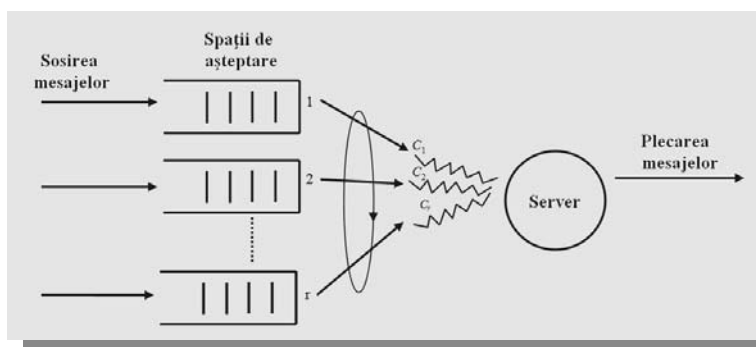


Fig.1. Șiruri de așteptare multiple, paralele și un singur server.

Un exemplu pentru acest sistem poate fi considerat o intersecție de trafic dirijată de semafoare (Fig.2) – fiecare drum din intersecție este un șir propriu și serverul, care reprezintă semaforul, luminează culoarea verde în conformitate cu o regulă stabilită pentru fiecare braț al drumului.



Fig.1. Exemplu de sistem de așteptare cu șiruri de așteptare multiple, paralele și un server.

De asemenea, acest tip de sistem de așteptare poate servi ca model în sistemele de telecomunicații, în controlul mediu de acces (MAC), în rețelele fără fir de bandă largă centralizată, unde pachetele (mesajele) de la diferite surse sosesc la nod pentru a fi prelucrate.

### 1. Breviar bibliografic cu privire la modelele Polling

Necesitățile de soluționare a diverselor probleme aplicative au contribuit la cercetările intense în domeniul teoriei așteptării, unde un rol semnificativ revine cercetării sistemelor de așteptare de tip Polling.

Modelele Polling au început să fie cercetate pe la sfârșitul anilor ‘50 ai secolului al XX-lea, datorită dezvoltării intense a metodelor numerice și aplicării tehnicii de calcul în acea perioadă. Printre primele rezultate din acest domeniu se enumeră lucrările ce aparțin autorilor: D.R. Cox și W.L. Smith [1], N.K. Jaiswal [2]. Examinarea modelelor, tehnicilor și rezultatelor din teoria sistemelor de așteptare de tip Polling, obținute până în anul 1995, sunt expuse în monografiile elaborate de B.V. Gnedenko [3], S.C. Borst [4], H.Takagi [5-8].

După anul 1995, odată cu creșterea vertiginoasă a cercetărilor în domeniul rețelelor și a tehnologiilor de rețea, a sporit simțitor și numărul publicațiilor în domeniul modelelor Polling. O bibliografie bogată privind acest domeniu este prezentată în [7]. Lucrări importante sunt citate și în [8, 9].

În lucrările autorilor G.P. Klimov și G.K. Mișcoi [11], M.I. Volkovinskii și A.N. Kabalevski [12] este studiat un caz special pentru sistemele de tip Polling, sistemele de așteptare cu priorități, cu flux de intrare Poisson și timp de orientare de o formă specială. Aceste monografii extind rezultatele obținute în acea perioadă și prezentate în [13]. Metodologia și instrumentele analitice folosite în aceste lucrări au fost prezentate și sistematizate de către G.P. Klimov în [14]. În cazul cel mai general, sistemul de tip Polling este prezentat în lucrarea lui D.G. Kendall [15], în care se propune o nouă metodologie de cercetare a sistemelor de tip Polling bazată pe teoria proceselor de semiregenerare și descompunere.

Însă, dezvoltarea rapidă a sistemelor de telecomunicație și a rețelelor, în particular a sistemelor de telecomunicație mobilă și a rețelelor fără fir de bandă largă, a dus la apariția a noi metode de analiză și sistematizare a modelelor Polling. De aceea, în următorii ani a apărut un număr impunător de lucrări științifice dedicate diverselor aspecte de cercetare a modelelor Polling.

În calitate de exemplu al unei lucrări speciale poate servi lucrarea lui Y.Deng și J.Tan [16], care conține studiul unui sistem cu o singură stație, două fluxuri de cerințe cu priorități și timp de orientare cu valoarea-treshold. Sosirile sunt repartizate după legea de repartiție Poisson, iar serviciile și orientările – după legea de repartiție exponențială. Folosind metodele analitice, autorii au obținut probabilitatea staționară a funcției generatoare a lungimilor acestor două șiruri de cerințe, precum și metoda de calculare a mediei lungimii șirului de cerințe din șirul de așteptare și a mediei timpului de așteptare.

Un alt exemplu este lucrarea lui L.V. Nazarov [17], în care este considerat un flux Poisson de  $N$  diferite tipuri de cerințe. Fiecare din cerințele din acest flux este de tipul  $i$  cu o careva probabilitate  $p_i$ , astfel încât

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1.$$
 Timpul de servire a cerințelor de tipul  $i$  este o variabilă aleatoare  $B_i$ . În sistem este numai un singur șir de așteptare, iar ordinea de servire este FIFO (primul intrat – primul ieșit).

Referitor la sistemele de așteptare de tip Polling, cu aplicații în rețele de comunicații, pot fi menționate lucrările [18,19]. În [20] se analizează sistemul de așteptare format din două șiruri, în unul din care sosesc două fluxuri de mesaje cu priorități. Disciplina de servire este exhaustivă, de acces sau global-acces (conform căreia se deservesc doar acele mesaje care se aflau în șir în momentul inițial al ciclului, iar celelalte mesaje trebuie să aștepte următorul ciclu). Pentru astfel de model s-au obținut repartiția lungimii ciclului, repartiția numărului de cereri în șiruri în momentul sondajului șirurilor și, de asemenea, a fost făcută analiza timpului de așteptare. În [21] se presupune că timpul de conectare a serverului la șiruri și timpul de servire a mesajelor sunt corelate și sunt descrise de timpul de aflare a unui lanț Markov în stările sale.

În [22] se studiază modelul Polling cu refuzuri de 2 tipuri: refuzuri în servirea mesajului și refuzuri în servirea șirului. Refuzul de primul tip are loc în timpul servirii mesajului, în rezultatul căruia mesajul părăsește sistemul, iar aparatul de servire trece la servirea următorului mesaj din șir. Pentru refuzul de-al doilea tip, serverul momentan întrerupe servirea mesajului, părăsește șirul și trece la următorul șir.

În [23] se analizează sistemul cu disciplina globală de servire a șirurilor. Șirul poate fi deservit, dacă lungimea șirului întrece o limită dată. În cazul în care toate șirurile au lungime insuficientă pentru începerea servirii, serverul finisează deservirea și o reîncepe în acel moment când careva din șiruri va avea un număr determinat de mesaje. Sistemele de diferite discipline de servire a mesajelor, asemănătoare celui din [24], au fost analizate în [25], pentru care au fost obținute repartițiile lungimii ciclului și a timpului de aflare a mesajelor într-un șir al sistemului.

În [26] se studiază modelul Polling cu parametrii dinamici. Se presupune că repartiția timpului de servire a mesajelor din șir și parametrul fluxului de intrare se schimbă de fiecare dată când serverul părăsește șirul. În [27] este prezentată analiza modelului Polling cu servire în grup (simultan se deservesc toate mesajele aflate în șir în timpul sondajului). Cu ajutorul metodei funcțiilor generatoare s-a obținut repartiția timpului de așteptare. Analiza modelului Polling fluid este prezentată în [28]. Sistemul respectiv este format din  $N$ -sisteme de așteptare și un aparat de servire. Disciplinele de servire se presupun a fi globale, de acces și global-acces. Ordinea sondajului șirurilor este ciclică sau aleatoare. S-a obținut repartiția Laplace-Stieltjes a nivelului lichid din șirurile sistemului în momentul sondajului de către server și într-un timp anumit. Adăugător s-a mai descris procedura de găsimă a ordinii probabilistice optimale a sondajului șirurilor.

Sistemul de așteptare de tip Polling cu mesaje pozitive și negative a fost studiat în [29], pentru care, prin metoda funcțiilor generatoare, s-au obținut repartiția numărului de mesaje din șiruri și repartiția timpului de așteptare în termenii transformatei Laplace-Stieltjes.

În [30] este studiat modelul Polling ce descrie funcționarea sistemelor cu sondaj ciclic în rețele fără fir de viteză înaltă – MESH. Deservirea ciclică a șirurilor e făcută de două aparate de servire. O parte din șiruri au acces la ambele aparate, iar fiecare din celelalte șiruri este asociat în ciclul de servire după „al său” aparat de servire. Pentru cercetarea unui astfel de sistem este folosită metoda analizei mediilor.

Sistemele Polling cu un număr infinit de aparate de servire au fost studiate în [31]. Șirurile sistemului sunt ciclic chestionate de o grupă infinită de aparate de servire. Aparatele deservesc șirurile într-un timp aleator, după care aparatele părăsesc șirurile, iar mesajele, ale căror serviri au fost întrerupte, se servesc din nou prin deservirea următoare a șirului.

## 2. Modelul Polling de tip general

Vom considera sistemul de așteptare de tip Polling cu schimb semi-Markov. Mecanismul de servire este dat de tabelul Polling  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ , unde funcția  $f$  arată că la etapa  $j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , este servit utilizatorul  $k$ ,  $k = \overline{1, r}$ . Itemii (mesajele) utilizatorului  $k$  sosesc după legea de repartiție Poisson cu parametrul  $\tilde{\lambda}_k$ . Timpul de servire pentru itemul de clasă  $k$  este dat de variabila aleatoare  $B_k$  cu funcția de repartiție  $B_k(x) = P\{B_k < x\}$ . Durata de orientare de la un utilizator către utilizatorul  $k$  este variabila aleatoare  $C_k$  cu următoarea funcție de repartiție  $C_k(x) = P\{C_k < x\}$ .

Scopul principal la studierea sistemelor Polling constă în determinarea caracteristicilor importante ale sistemului, ca de exemplu: perioada de ocupare, probabilitățile stărilor, lungimea șirului de așteptare etc. Dar, nu întotdeauna formulele analitice pot fi utilizate direct pentru a determina aceste caracteristici, de aceea o mare importanță se acordă elaborării unor noi metode numerice, precum și algoritmilor realizați în baza acestor metode.

## 3. Metode și algoritmi de cercetare ale sistemelor Polling

În prezent, pentru cercetarea sistemelor Polling sunt propuse mai multe metode. Ne vom opri succint la unele din ele.

1. **Metoda proceselor semiregenerate** a fost elaborată de profesorii V.Rikov și Gh.Mișcoi, (a se vedea [32-34]). Această metodă completată cu noțiunea de model generalizat, descrisă în [35], a permis obținerea unor noi rezultate analitice pentru o clasă largă de modele Polling: modele cu schimb nenul (de tip semi-Markov) al stărilor. Au fost obținute un șir de caracteristici, ca de exemplu: pentru  $k$ -perioada de ocupare, probabilitățile stărilor, repartiția șirului de așteptare, atât pentru regimul staționar, cât și pentru cel virtual etc.

2. **Metoda mediilor** este pe larg descrisă în [36] și este destinată pentru calcularea lungimilor medii ale șirurilor într-un moment de timp arbitrar din sisteme, pentru care pot fi obținute durata medie a frecventării șirurilor, în particular în sistemele cu sondaj ciclic  $M/G/1$ , și deservirea exhaustivă și de acces. Pe baza timpului mediu de frecventare a șirului și a valorii medii rămase se calculează numărul mediu de cereri în șirurile sistemelor ca soluție a sistemelor de ecuații liniare. Este cunoscut faptul că metoda mediilor poate fi lărgită pentru următoarele sisteme Polling: sisteme cu flux Poisson grupate, sisteme cu sondaj periodic, sisteme cu timp discret, de asemenea aplicarea metodei la analiza aproximativă a altor modele Polling (a se vedea [37-39]). Astfel, în [37] metoda mediilor este aplicată pentru calcularea aproximativă a timpului mediu

de așteptare în sisteme cu șiruri de servire limitate. Ideea de bază a aproximărilor constă în a descompune sistemul inițial cu  $N$ -cereri pe  $N$ -sisteme de așteptare cu un singur șir, starea de repaus a serverului și  $k$ -discipline de servire limitate. Și deoarece, cel mai probabil, după perioada de servire lungă (scurtă) urmează perioadă lungă (scurtă) între frecventarea șirurilor, se presupune că lungimea perioadelor dintre frecventările șirurilor corelează cu numărul de cereri deservite în timpul frecventării precedente a șirului. Analiza este dedicată obținerii primelor două momente ale perioadei între frecventările șirului cu condiția că  $l$ -cereri au fost deservite în acest șir în timpul perioadei de servire precedente; de asemenea, analiza poate fi aplicată și la găsirea perioadei de repartitie între frecventările șirului.

În [38], metoda mediilor este propusă pentru analiza sistemelor Polling cu servirea globală și de acces pentru diferite discipline de servire a cererilor din șir: în ordinea venirii cererilor, în ordinea inversă cu întreruperi a servirii sau fără întreruperi, disciplina de servire a primei cereri cu timpul minimal de servire rămas, disciplina descompunerii serverului. În [39] această metodă se aplică la analiza aproximativă a sistemelor ce funcționează în condițiile încărcării înalte.

Metoda mediilor pentru analiza sistemelor Polling cu sondaj dinamic adaptiv este descrisă în [40]. Sondajul adaptiv presupune că serverul eliberează acele șiruri care nu au cereri în momentul sondajului din ciclul precedent. Dacă toate șirurile sistemului trebuie să fie eliberate, atunci aparatul va fi în stare de repaus, după care începe sondajul tuturor șirurilor după ordinea lor. Analiza este bazată pe calcularea aproximativă a probabilităților că șirul va fi eliberat în ciclul cu următoarea aplicare a metodei mediilor pentru calcularea timpurilor medii de așteptare.

3. **Metoda proceselor ramificate.** Încă o metodă în cercetarea sistemelor Polling bazată pe teoria proceselor ramificate este propusă în [38]. Această metodă se aplică în sistemele ce funcționează în condițiile încărcării înalte și permite a obține expresii aproximative pentru transformatele Laplace-Stieltjes de repartitie a lungimilor șirurilor și a timpului de așteptare pentru clasele largi de sisteme Polling, al căror comportament poate fi descris de procesele ramificate.

#### 4. Algoritmi numerici

Analiza literaturii din domeniu, mai ales a publicațiilor din ultimii ani, indică la faptul că majoritatea caracteristicilor modelelor Polling sunt obținute în termeni de ecuații funcționale, transformate Laplace, Laplace-Stieltjes, funcții generatoare și alte structuri matematice. Pentru determinarea caracteristicilor, precum și în scop de modelare a evoluției lor pentru analiza problemelor practice, necesită a fi elaborate diverse metode numerice și algoritmi. Scopul acestor metode numerice, precum și al algoritmilor elaborați în baza lor, constă în soluționarea ecuațiilor funcționale, a sistemelor de ecuații recurente funcționale, în inversarea numerică a transformatelor Laplace-Stieltjes etc.

Soluționarea acestor probleme implică compartimente profunde ale matematicii contemporane, strâns legate de matematica de calcul și de metodologia modelării matematice. Atenția sporită a cercetărilor din domeniu față de problemele enumerate este atestată de multiplile solicitări ale practicii contemporane. Printre lucrările de avangardă din acest domeniu vom enumera și lucrările cercetătorilor din Moldova. Astfel, Gh.Mișcoi și A.Bejan au elaborat în [41,42] un algoritm eficient de soluționare a ecuației funcționale clasice Kendall. Algoritmii numerici de aproximații succesive pentru perioada de ocupare și coeficientul de trafic în modele cu priorități au fost elaborați de Gh.Mișcoi și O.Benderschi în [43,44]. Algoritmii pentru soluționarea probabilităților stărilor, repartitiei  $k$ -perioadelor de ocupare, repartitiei virtuale a șirului de așteptare au fost elaborați de către Gh.Mișcoi, D.Bejenari și L.Mitev în [45,46]. Printre rezultatele adiacente domeniului dat vom indica rezultatele obținute de E.Guțuleac pentru rețele Petri [47] și rezultatele obținute de I.Damian pentru rețele semimarkoviene [48-50].

#### Referințe:

1. Cox D.R., Smith W.L. Queues. - London: Methuen, 1961.
2. Jaiswal N.K. Priority Queues. - New York: Academic Press, 1968.
3. Гнеденко Б.В. и др. Приоритетные системы обслуживания. - Москва: Изд-во Московского Университета, 1973.
4. Borst S.C. Polling systems.-Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1996.
5. Takagi H. Analysis of Polling Systems. - Cambridge: MIT Press, 1986.
6. Takagi H. Queueing analysis of polling models // ACM Comput. Surveys, 1988, vol.20, p.5-28.

7. Takagi H. Queueing analysis of polling models: and update // *Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems*, 1990, p.267-318.
8. Alfa S. A. *Queueing Theory for Telecommunications*. Springer, 2010.
9. Yue W., Takahashi Y., Takagi H. *Advances in Queueing Theory and Networks Applications*. Springer, 2009.
10. Takagi H. Queueing analysis of polling models: progress in 1990-1994 // *Frontiers in Queueing. Probab. Stochastics Ser.*, CRC. -1997, p.119-146.
11. Климов Г.П., Мишкой Г.К. Приоритетные системы обслуживания с ориентацией. -Москва: Изд-во Московского Университета, 1979.
12. Волковинский М.И., Кабалецкий А.Н. Анализ приоритетных очередей с учетом времени переключения. - Москва: Энергоиздат, 1981.
13. Гнеденко Б.В. и др. Приоритетные системы обслуживания. - Москва: Изд-во Московского Университета, 1973.
14. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. - Москва: Наука, 1966.
15. Kendall D.G. Some problems in the theory of queues // *J. Roy. Statist. Soc. (B)*, 13(2), 1953, p.151-180.
16. Deng Y., Tan J. Priority queueing model with changeover times and switching threshold // *J. Appl. Probab.*, 38(A), 2001, p.263-273.
17. Назаров Л.В. Система обслуживания с ориентацией // *Изв. АН СССР. Техн. кибернет*, 1981, том 4, с.131-135.
18. Вишневецкий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. - Москва: Техносфера, 2003.
19. Вишневецкий В.М., Семенова О.В. Системы поллинга: Теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. - Москва: Техносфера, 2007.
20. Bejan A. Modelarea timpului de orientare în sisteme de așteptare cu priorități: Autoreferat al tezei de doctor în științe fizico-matematice. - Chișinău, 2007.
21. Boon M.A.A., Adan I.J.B.F., Boxma O.J. A two-queue polling model with two priority levels in the first queue // *Discrete Event Dynamic Systems*, 2009.
22. Shomrony M., Yechiali U. Polling systems with positive and negative customers // *Technical Report*, Department of Statistics and Operations Research, Tel-Aviv, 2006.
23. Shomrony M., Yechiali U. Polling systems with job failures and with station failures // *Technical Report*, Department of Statistics and Operations Research, Tel-Aviv, 2006.
24. Vasiou M., Yechiali U. M/G/∞ polling systems with random visit times // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2008, vol.22, no.1, p.212-245.
25. Вишневецкий В.М., Лаконцев Д.В., Семенова О.В., Шпилев С.А. Модель системы поллинга для исследования широкополосных беспроводных сетей // *Автоматика и телемеханика*, 2006, №12, с.123-135.
26. Vasiou M., Adan I.J.B.F., Boxma O.J. A two-station queue with dependent preparation and service times // *European Journal of Operational Research*, 2009, vol.195, no.1, p.104-116.
27. MacPhee I., Menshikov M., Petritis D., Popov S. A Markov chain model of a polling system with parameter regeneration // *Annals of Applied Probability*, 2007, vol.17, no.5/6, p.1447-1473.
28. Boxma O., Van der Wal J., Yechiali U. Polling with batch service // *Stochastic Models*, 2008, vol.24, no.4, p.604-625.
29. Yechiali U., Czerniak O. Fluid polling systems. // *Queueing Systems*, 2009, vol.63.
30. Boxma O.J., Bruin J., Fralix B.H. Sojourn times in polling systems with various service disciplines // *Performance Evaluation*, 2009, vol.66, no.11, p.621-639.
31. Вишневецкий В.М., Семенова О.В., Шпилев С.А. Дуплексная система циклического обслуживания смешанных очередей // *Автоматика и телемеханика*, 2009, №12.
32. Rykov, V.V., and Mishkoy, Gh.K. A new approach for analysis of polling systems, *Proceedings of the International Conference Control Problems*. - Moscow, 2009.
33. Vishnevsky V., Mishkoy Gh., Semenova O. New models and methods to study Polling Systems. // *Proceedings of the International Conference Distributed Computer and Communication Networks*, Sofia, Bulgaria, 2009, p.79-85.
34. Рыков В.В. К анализу поллинг-систем // *Автоматика и телемеханика*, 2008, №6, с.90-114.
35. Mishkoy Gh. *Generalized Priority Systems*. - Chisinau: Academy of Sciences of Moldova: Stiinta, 2009 (in Russian).
36. Winands E.M.M., Adan I.J.B.F., van Houtum G.J. Mean value analysis for polling systems // *Queueing Systems*, 2006, vol.54, p.35-44.
37. van Vuuren M., Winands E.M.M. Iterative approximation of  $k$ -limited polling systems // *Queueing Systems*, 2007, vol.55(3), p.161-178.
38. Wierman A., Winands E., Boxma O.J. Scheduling in polling systems // *Performance Evaluation*, 2007, vol.64 (9-12), p.1009-1028.
39. van der Mei R.D., Winands E. Heavy traffic analysis of polling models by mean value analysis // *Performance Evaluation*, 2008, vol.65(6-7), p.400-416.
40. Vishnevsky V.M., Semenova O.V. Adaptive dynamical polling in wireless networks // *Cybernetics and Information Technologies*, 2008, vol.8(1), p.3-11.

41. Mishkoy Gh. Rykov V. V., Giordano S., Bejan A. Multidimensional Analogs of the Kendall Equation for Priority Queueing Systems: Computation Aspects // *Automatics and Remote Control*, 2008, vol.69(6), p.980-992.
42. Mishkoy Gh. On multidimensional Analog of Kendall-Takacs Equations and its Numerical Solution. // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science. World Congress of Engineering*, London. U. K., 2008, vol.2, p.928-932.
43. Mishkoy Gh., Bejan A., Benderschi O. Evaluating of the traffic coefficient in priority queueing systems // *Computer Science Journal of Moldova*, 2008, vol.16, no.2(47), p.269-285.
44. Mishkoy Gh., Giordano S., Bejan A., Benderschi O. Generalized Priority Models for QoS and CoS Network Technologies // *Computer Science Journal of Moldova*, 2007, vol.15, no.2(44), p.217-242.
45. Mișcoi Gh., Bejenari D., Usatii L. Modele semimarkoviene de servire cu priorități // *Analele Universității Libere Internaționale din Moldova. Seria „Economie”*, 2011, vol.11, p.95-105.
46. Mișcoi Gh., Bejenari D., Mitev L. An analog of the Pollaczek-Khintchin transform equation // *Abstracts of the 7-th Congress of Romanian Mathematicians. Brașov, România*, 2011, p.79.
47. Guțuleac E. Evaluarea performanțelor sistemelor de calcul prin rețele Petri stochastice. -Chișinău: Tehnica Info, 2004.
48. Griza Iu., Korolyuk V., Mamonova A., Mishkoy Gh. Queueing Systems with semi-Markov Flow in the Series Scheme. Preprint. - Bielefeld University, Germany, 2008.
49. Griza Iu., Koroliuk V.S., Mamonova A.V., Mishkoy Gh.K. Queueing systems with semi-Markov flow in average and diffusion approximation schemes: Abstracts of the 16th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM-2008, Oradea, Romania, 2008, p.28-29.
50. Гриза Ю.Ф., Мамонова А.В. Флуктуации процесса обслуживания в сети с полумарковским (импульсным) входным потоком // *Кибернетика и Системный Анализ (Киев)*, 2010, №6, с.166-170.

*Prezentat la 14.11.2011*