STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2011, nr.7(47)

ASUPRA CONDIȚIILOR NOETHERIENE ŞI FORMULEI DE CALCUL AL INDICELUI UNEI CLASE DE OPERATORI LINIARI

Petru MOLOŞNIC

Universitatea Agrară de Stat din Moldova

In the present article it is studied a class of linear operators of singular integral type. The Noether theory of operators of this class is constructed on the base of composition formulae accepted as axioms. It is deduced the formula for calculation of index.

1. Fie Γ un contur simplu şi închis pe planul complex $\mathbb{C}$. Notăm prin $B(\Gamma)$ spațiul Banach de funcții definite pe conturul Γ încât operatorul de multiplicare la funcțiile continue, $(A\varphi)(t) = a(t)\,\varphi(t)$, să fie mărginit în spațiul $B(\Gamma)$ şi $\|A\|_{B(\Gamma)} \le const\|a\|_{C(\Gamma)}$. Prin $\mathfrak{T}$ notăm mulțimea tuturor operatorilor compacți, care acționează în spațiul $B(\Gamma)$.

Fie în spațiul $B(\Gamma)$ sunt dați operatorii liniari şi mărginiți $M_1, M_2, \ldots M_n$ şi S, care verifică următoarele axiome:

1) pentru orice funcție $a \in C(\Gamma)$ există astfel de funcții $a_k \in C(\Gamma)$, încât operatorii $M_k aI - a_k M_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, sunt compacți în $B(\Gamma)$ şi, în plus, dacă $a(t) \ne 0$, atunci şi $a_k(t) \ne 0$;

2) dacă $a \in C(\Gamma)$, atunci $SaI - aS$ este compact în $B(\Gamma)$;

3) $S^2 = I$ $(S^2 \ne \pm I)$;

4) operatorii $M_k a M_j$ sunt compacți pentru orice $a \in C(\Gamma)$ и $j,k = 1,2,\ldots,n$;

5) $M_k S = h_k M_k + T_k$ şi $SM_k = \widetilde{h}_k M_k + \widetilde{T}_k$, unde T_k и $\widetilde{T}_k \in \mathfrak{T}(\mathfrak{B}(\Gamma))$, iar funcțiile $h_k(t)$ şi $\widetilde{h}_k(t)$ sunt, respectiv, egale cu unitatea pe unele mulțimi măsurabile $l_k (\subset \Gamma)$ şi $\widetilde{l}_k (\subset \Gamma)$ şi cu minus unitatea pe $\Gamma \setminus l_k$ şi $\Gamma \setminus \widetilde{l}_k$.

Dacă conturul Γ este Leapunov pe porțiuni, α_k sunt nişte numere complexe, $\{z : z = t + \alpha_k, t \in \Gamma\} \cap \Gamma$ şi $\{z : z = t - \alpha_k, t \in \Gamma\} \cap \Gamma$ conțin un număr finit de puncte şi $\{z : z = t + \alpha_k, t \in \Gamma\} \cap \{z : z = t - \alpha_j, t \in \Gamma\} = \emptyset$, atunci axiomele 1)-5) sunt verificate de către operatorii

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \qquad (M_k\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - \alpha_k}\,d\tau,$$

considerați în spațiul $B(\Gamma) = L_p(\Gamma)$ (*a se vedea* [1, 2]).

2. În spațiul $B(\Gamma)$ definim operatorul

$$A = aI + bS + \sum_{i=1}^{n} c_i M_i, \tag{1}$$

unde $a, b, c_1, \ldots c_n$ sunt funcții continue pe Γ, iar operatorii S şi M_k verifică axiomele 1)-5).

Teorema 1. *Operatorul*

$$N = I + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k, \ (c_k(t) \in C(\Gamma))$$

este noetherian în spațiul $B(\Gamma)$ şi indicele lui este egal cu zero.

Într-adevăr, aşa cum pentru orice funcție continuă $a(t)$ operatorii $M_k a M_j$ sunt compacți, atunci

$$(I + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k)(I - \sum_{k=1}^{n} c_k M_k) = I + T_1 \text{ şi } (I - \sum_{k=1}^{n} c_k M_k)(I + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k) = I + T_2,$$

unde T_1 şi T_2 sunt operatori compacţi. Aşadar, operatorul N admite o regularizare bilaterală şi, în baza cunoscutei teoreme a lui Atkinson, el este noetherian. Pentru $0 \le \lambda \le 1$ operatorul

$$N_\lambda = I + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k M_k$$

realizează o omotopie a operatorului N în operatorul $N_0 = I$; prin urmare, $IndN = 0$. Teorema este demonstrată.

Teorema 2. *Operatorul* $A = aI + bS + \sum_{i=1}^{n} c_i M_i$ este noetherian în spațiul $B(\Gamma)$, dacă şi numai dacă sunt verificate condițiile

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0, \ t \in \Gamma. \tag{2}$$

Dacă aceste condiții sunt îndeplinite, atunci

$$IndA = \frac{\mu}{\pi i}\left\{\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)-b(t)}\right\}_\Gamma, \tag{3}$$

unde μ *este un număr întreg care se determină în mod unic dacă se cunoaşte indicele unui operator de forma* $aI + bS$.

Demonstrație. Fie $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ pentru toate valorile lui $t \in \Gamma$. În baza axiomei 1) există funcțiile $a_k(t) \in C(\Gamma)$ şi $b_k^2(t) \in C(\Gamma)$ încât operatorii $M_k aI - a_k M_k$ şi $M_k bI - b_k M_k$ sunt compacți şi, în plus, $a_k^2(t) - b_k^2(t) \neq 0$. În spațiul $B(\Gamma)$ considerăm operatorul N, definit de egalitatea

$$N = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{a_k + h_k b_k} M_k,$$

în care funcțiile h_k se determină din axioma 5). Operatorul A poate fi exprimat sub forma

$$A = N(aI + bS) + T, \tag{4}$$

unde $T \in \mathrm{T}(B(\Gamma))$. Aşa cum $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, operatorul $aI + bS$ este noetherian. Atunci, din egalitatea (4) şi teorema 1 rezultă că A de asemenea este noetherian. Observăm că din teorema 1 mai rezultă că $IndA = Ind(aI + bS)$.

Vom demonstra necesitatea. Admitem că operatorul A este noetherian însă, condițiile (2) nu sunt verificate. Fie, de exemplu, funcția $a(t) + b(t)$ se anulează pe Γ. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate de ales două funcții continue $g_1(t)$ и $g_2(t)$, astfel încât

1) $g_j(t) \neq 0$ pe Γ; 2) $\max\left|a(t) + b(t) - g_j(t)\right| < \varepsilon$, $j = 1,2$; 3) $\{\arg g_1(t)\}_\Gamma \neq \{\arg g_2(t)\}_\Gamma$.

Considerăm operatorii

$$A_j = a^{(j)} I + b^{(j)} S + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(j)} M_k, \text{ unde}$$

$$a^{(j)} = \frac{1}{2}(g_j + a - b), \quad b^{(j)} = \frac{1}{2}(g_j - a + b), \quad c_k^{(j)} = c_k, \ j = 1,2.$$

Operatorii A_j $(j = 1,2)$ verifică condiția $\left\|A - A_j\right\| < \alpha\varepsilon$, unde α este o constantă. Deoarece $(a^{(j)}(t) + b^{(j)}(t))(a^{(j)}(t) - b^{(j)}(t)) \neq 0$ pe conturul Γ, atunci în baza celor demonstrate mai sus rezultă că A_j sunt noetherieni şi, în plus, $IndA_j = Ind(a^{(j)} I + b^{(j)} S)$. În baza rezultatelor prezentate în [1], indicele operatorilor de forma $aI + bS$ se determină din formula

$$Ind(aI + bS) = \frac{\mu}{2\pi}\left\{\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right\}_\Gamma.$$

Aici μ este o constantă pentru a cărei determinare este necesar de calculat indicele unui operator de forma $aI + bS$. Prin urmare,

$$Ind(a^{(j)}I + b^{(j)}S) = \frac{\mu}{2\pi}\left\{\arg\frac{a^{(j)}(t) - b^{(j)}(t)}{a^{(j)}(t) + b^{(j)}(t)}\right\}_{\Gamma}$$

şi în baza alegerii funcțiilor $a^{(j)}$ şi $b^{(j)}$ avem $Ind(a^{(1)}I + b^{(1)}S) \neq Ind(a^{(2)}I + b^{(2)}S)$. Înseamnă că $IndA_1 \neq IndA_2$.

Pe de altă parte, din teorema lui Atkinson despre stabilitatea indicelui operatorilor, începând de la un $\varepsilon_0 > 0$ (determinat de operatorul noetherian A), operatorii A_j, care verifică condiția $\|A - A_j\| < \varepsilon_0$, trebuie să aibă indici egali cu indicele operatorului A, adică $IndA = IndA_1 = IndA_2$. Cu contrazicerea obținută teorema este demonstrată.

Din teorema 2 rezultă

Corolarul 1*. Operatorii*

$$A = aI + bS + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k \quad \text{şi} \quad A_0 = aI + bS$$

simultan sunt noetherieni şi indicii lor coincid.

Aşadar, proprietatea operatorului $A_0 = aI + bS$ de a fi noetherian este stabilă în raport cu perturbarea lui cu operatori de forma $\sum_{k=1}^{n} c_k M_k$, cu toate că ultimii pot fi cu norme oricât de mari şi necompacți.

Observație. *Aşa cum am remarcat mai sus, este adevărată egalitatea*

$$IndA_0 = \frac{\mu}{2\pi}\left\{\arg\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\right\}_{\Gamma},$$

şi în calitate de μ *poate fi luat numărul* $\mu = Ind\left[(1+t)I + (1-t)S\right]$, *care depinde doar de realizarea concretă a operatorului abstract* S *verificând axiomele 2, 3 şi 5. Aici, fără a restrânge generalizarea, considerăm că punctul* $z = 0$ *se află în interiorul domeniului mărginit de conturul* Γ.

3. Fie $S, M_1, M_2, \ldots M_n$ operatori liniari şi mărginiți care acționează în spațiul $B^m(\Gamma) = B(\Gamma) \times B(\Gamma) \times \ldots \times B(\Gamma)$ şi $a(t)I$ operatorul de multiplicare la matricea de funcții de ordinul m cu elemente de funcții continue. Dacă operatorii S, M_j, $j = 1,2,\ldots,n$, şi aI verifică axiomele 1)-5), atunci are loc teorema

Teorema 3. *Pentru ca operatorul*

$$A = aI + bS + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k$$

să fie noetherian în spațiul $B^m(\Gamma)$, *este necesar şi suficient să fie îndeplinită condiția* $\det(a(t) \pm b(t)) \neq 0$.

Demonstrația este similară cu demonstrația teoremei 1. Aici se foloseşte rezultatul lui S.Mihlin [1] referitor la faptul că indicele operatorului $aI + bS$ $(S^2 = I)$ poate fi calculat cu ajutorul formulei

$$Ind(aI + bS) = \frac{\mu}{2\pi}\int_{\Gamma} d\arg\det\left[(a(t) + b(t))^{-1}(a(t) - b(t))\right],$$

unde μ este un număr constant. În particular, dacă S este operatorul integral singular cu nucleu de tip Cauchy, atunci $\mu = 1$.

Acum vom considera operatori de o formă mai generală, şi anume: operatori formați din sume de produse de operatori studiați mai sus. Aceşti operatori au forma

$$A = \sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}I + b_{jk}S + \sum_{i=1}^{n} c_{jk}^{(i)} M_i)\ , \tag{5}$$

unde a_{jk}, b_{jk} şi c_{jk} sunt funcții din $C(\Gamma)$.

Teorema 4. *Operatorul definit de egalitatea (5) este noetherian în spațiul $B(\Gamma)$, dacă şi numai dacă sunt verificate condițiile*

$$\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}(t) \pm b_{jk}(t)) \neq 0 .$$

Dacă aceste condiții sunt verificate, atunci

$$IndA = \frac{\mu}{2\pi}\left\{\arg \frac{\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}(t) - b_{jk}(t))}{\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}(t) + b_{jk}(t))}\right\}_{\Gamma} .$$

Demonstrație. De rând cu operatorul A considerăm şi operatorul

$$A_0 = \sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}I + b_{jk}S) .$$

Operatorilor A şi A_0, care acționează în spațiul $B(\Gamma)$, le punem în corespondență (*a se vedea* [2]) întinderile lor liniare $\widetilde{A}$ şi $\widetilde{A}_0$, care acționează în spațiul $B^m(\Gamma)$ $(m = r(s+1)+1)$. Operatorul $\widetilde{A}$ are forma

$$\widetilde{A} = \widetilde{a}I + \widetilde{b}S + \sum_{k=1}^{n}\widetilde{c}_k M_k ,$$

iar operatorul $\widetilde{A}_0$ are forma $\widetilde{A}_0 = \widetilde{a}I + \widetilde{b}S$, unde $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}_k$ sunt matrice de funcții de ordinul m cu elemente din $C(\Gamma)$. Operatorii $A(A_0)$ şi $\widetilde{A}(\widetilde{A}_0)$ simultan sunt noetherieni în spațiile respective [2] şi, în plus, $IndA = Ind\widetilde{A}$, $IndA_0 = Ind\widetilde{A}_j$. În baza teoremei 3 şi corolarului 1 operatorii $\widetilde{A}$ şi $\widetilde{A}_0$ simultan sunt sau nu sunt noetherieni şi $Ind\widetilde{A} = Ind\widetilde{A}_0$. Aşa cum operatorul A_0 diferă de operatorul $aI + bS$, unde

$$a(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}(t) + b_{jk}(t)) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}(t) - b_{jk}(t)),$$

$$b(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}(t) + b_{jk}(t)) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}(t) - b_{jk}(t)),$$

cu un termen compact, atunci rămâne să aplicăm teorema 1. Teorema este demonstrată.

4. Fie $\mathfrak{A}$ algebra operatorilor liniari şi mărginiți care acționează într-un spațiu Banach $\mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{T}$ – idealul operatorilor compacți în $\mathfrak{A}$. Prin $\hat{\mathfrak{A}}$ notăm algebra cât în raport cu idealul T: $\hat{\mathfrak{A}} = \mathrm{A}/\mathrm{T}$.

Definiție. *Operatorii $B_0, B_1, \dots, B_n$, $B_k \in A$ se numesc liniari independenți relativ la $\hat{\mathfrak{A}} = \mathrm{A}/\mathrm{T}$, dacă egalitățile*

$$\sum_{k=0}^{n} b_k B_k = 0 , \quad \sum_{k=0}^{n} B_k c_k = 0 \tag{6}$$

au loc atunci şi numai atunci când $b_k = c_k = 0,\ k = \overline{0,n}$.

Menționăm că egalitățile (6) sunt înțelese în inelul cât A/T, adică au loc în $\mathfrak{A}$ cu exactitatea unui termen care aparține idealului $\mathfrak{T}$.

Considerăm $n+1$ operatori liniari independenți $A_0 = I, A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ în următoarele axiome:

1) $A_i A_j = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(i,j)} A_k = \sum_{k=0}^{n} A_k b_k^{(i,j)}$; (2') $A_i \alpha = \sum_{k=0}^{n} c_{ki}(\alpha) A_k$; (7)

$$2'')\ \beta A_i = \sum_{k=0}^{n} A_k \alpha_{ki}(\beta),\ i,j=0,1,\dots,n,\ a_k^{(i,j)},\ b_k^{(i,j)},\ \alpha,\ \beta,\ c_{ki}(\alpha),\ \alpha_{ki}(\beta) \in X.$$

Din axiomele 1), 2') şi 2'') imediat rezultă următoarea teoremă

Teorema 5. *Operatorii de forma* $\widetilde{A}_s = \sum_{k=0}^{n} a_k A_k$, $\widetilde{A}_\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_k b_k$ *formează în* $X \setminus T$ *o subalgebră* $\mathfrak{R}$ *de rang* $n+1$.

Observăm că orice putere până la ordinul $n+1$ a operatorului A din $\mathfrak{R}$ este liniar dependentă în raport cu T. Astfel, din teorema 5 rezultă

Teorema 6. *Pentru orice operator* A *din* $\mathfrak{R}$ *există în* $\mathfrak{R}$ *polinoame de anulare a operatorului* A *cu coeficienți din* T *atât din dreapta, cât şi din stânga.*

Construirea polinoamelor de anulare pentru A reprezintă o problemă în sine şi prezintă interes deosebit. În continuare ne vor interesa coeficienții c_0, d_0 ai polinoamelor respective

$$P_l(A) = \sum_{m=1}^{n+2} c_{k_m} A^{k_m} = 0; \quad P_r(A) = \sum_{m=1}^{n+2} A^{s_m} d_{s_m} = 0; \ k_1 = s_1 = 0.$$

Teorema 7. *Dacă operatorii* c_0 *şi* d_0 *sunt noetherieni, atunci şi operatorul* A *este noetherian.*

Demonstrația rezultă din existența regularizatorilor respectivi care sunt operatorii

$$R_{c_0}\left\{\sum_{m=2}^{n+2} c_{k_m} A^{k_m - 1}\right\} \quad \left(\left\{\sum_{m=2}^{n+2} A^{s_m - 1} d_{s_m}\right\} R_{d_0}\right),$$

unde R_{c_0} şi R_{d_0} sunt regularizatorii operatorilor c_0 şi d_0.

Operatorul $A_1 = B_1 A B_2$, unde B_1, B_2 sunt noetherieni cu indici cunoscuți $(\kappa_{B_1}, \kappa_{B_2})$, de asemenea posedă un polinom de anulare. Presupunem că pentru operatorul A dat s-a reuşit de ales doi operatori B_1 şi B_2, încât cel puțin un polinom pentru A_1 degenerează într-un binom de forma

$$A_1^l + \delta A_1^p = 0 \ (\text{sau } A_1^m + A_1^n \beta = 0). \tag{8}$$

Utilizând proprietățile cunoscute ale operatorilor noetherieni, obținem următoarea afirmație:

Corolarul 2. *Fie* c_0 *şi* d_0 *operatori noetherieni, atunci operatorul* δ, *respectiv* β, *în mod necesar este noetherian şi*

$$\kappa_A = \frac{1}{l-p}\kappa_\delta - \kappa_{B_1} - \kappa_{B_2} \quad \left(\kappa_A = \frac{1}{m-n}\kappa_\beta - \kappa_{B_1} - \kappa_{B_2}\right). \tag{9}$$

În continuare vom considera două probleme concrete legate de determinarea condițiilor noetheriene şi calculului indicelui pentru $n = 1, 2$ în cadrul unor axiome asupra inelului T şi proprietăților (2).

Fie $n = 1$. Notăm generatorii $A_0 = I$ şi $A_1 = M$. Relațiile (2) au forma

$$1.\quad I^2 = I;\ IM = MI = M;\ M^2 = I \tag{10}$$

$$2'.\quad I\alpha = \alpha I;\ M\alpha = \overline{\alpha} M;\ 2''.\ \beta I = I\beta;\ \beta M = M\overline{\beta},\ \overline{\alpha}, \overline{\beta} \in X \setminus T.$$

Algebra $\mathfrak{R}$ este alcătuită din elementele de forma $A = \alpha_0 + \alpha_1 M$. Este uşor de arătat că polinoamele de adunare pentru A au forma

$$A^2 - (\alpha_0 + \overline{\alpha}_0)A + (\alpha_0\overline{\alpha}_0 - \alpha_1\overline{\alpha}_1) = 0,\ A^2 - A(\alpha_0 + \overline{\alpha}_0) + (\alpha_0\overline{\alpha}_0 - \alpha_1\overline{\alpha}_1) = 0. \tag{11}$$

Din teorema 7 rezultă

Teorema 8. *Dacă operatorul* $\alpha_0\overline{\alpha}_0 - \alpha_1\overline{\alpha}_1$ *este noetherian, atunci* A *de asemenea este noetherian.*

Mai presupunem suplimentar a) operatorul α_0 este noetherian şi b) în $X \setminus T$ există un operator γ noetherian încât $\overline{\gamma} = -\gamma$. Considerăm operatorii $B_1 = \overline{\alpha}_0 \gamma$ şi $B_2 = I$, atunci $A_1 = \overline{\alpha}_0 \gamma A$ şi $A^2 + \alpha_0\overline{\alpha}_0\gamma^2(\alpha_0\overline{\alpha}_0 - \alpha_1\overline{\alpha}_1) = 0$ (operatorii α_0 şi $\overline{\alpha}_0$ sunt simultan noetherieni şi indicii lor coincid: $M\alpha_0 = \overline{\alpha}M$). Din formula (9) obținem

$$\kappa_A = \frac{1}{2}\kappa_\delta - \kappa_{\bar{\alpha}_0} - \kappa_M = \frac{1}{2}\kappa_{\bar{\alpha}_0} + \frac{1}{2}\kappa_{\bar{\alpha}_0} + \kappa_\gamma + \frac{1}{2}\kappa_{\alpha_0\bar{\alpha}_0 - \alpha_1\bar{\alpha}} - \kappa_{\bar{\alpha}_0} - \kappa_\gamma = \frac{1}{2}\kappa_{\alpha_0\bar{\alpha}_0 - \alpha_1\bar{\alpha}} \quad . \tag{12}$$

Axioma (10) şi condiţiile a) şi b) reprezintă proprietăţi generalizate ale operatorilor integrali singulari cu translaţii de tip Carleman de ordinul doi. Inelul $\Im$, în acest caz, este inelul de operatori $aI + bS$, unde $a, b \in C(\Gamma)$,

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

iar Γ este un contur închis de tip Leapunov. Formula (8) generalizează formula de calculare a indicelui unor astfel de operatori, obţinut de către G.Litvinchuk.

Menţionăm că în cazul unui număr de $n+1$ generatori de puterile operatorului involutiv M, $M^{n+1} = I$ pentru operatorii (11) are loc următoarea formulă pentru indice:

$$\kappa_A = \frac{1}{n+1}\kappa_{\alpha_0\alpha_0^{[1]}\ldots\alpha_0^{[n]}} + \varepsilon^{[ln(n+1)]/2}\alpha_1\alpha_1^{[1]}\ldots\alpha_1^{[n]},$$

unde $\alpha^{[k]} = M\alpha^{[k-1]}$; $\alpha^{[0]} = \alpha$; iar condiţia b) se formulează astfel: există un operator noetherian $\gamma \in T$ încât $\gamma^{[l]} = \varepsilon^l\gamma,\ 0 < l < n+1,\ \varepsilon^{n+1} = 1$.

Fie $n = 2$ şi $A_0 = I$, $A_1 = S$, $A_2 = N$. Axioma 2) în cazul acesta o transcriem sub forma

1. $I^2 = I$, $IS = SI = S$; $IN = NI = N$, $S^2 = I$, $N^2 = b_1c_1I + (c_1 - b_1)N$; $SN = b_1I + N - b_1S$;
$$NS = c_1I - N + c_1S. \tag{13}$$
2. $I\alpha = \alpha I$; $S\alpha = \alpha S$; $N\alpha = \alpha N$.

Elementele algebrei $\Re$ au forma $A = \alpha_0 + \alpha_1N + \alpha_2S$, iar polinomul de anulare a operatorului A are forma

$$A^2 - (2\alpha_0 - b_1\alpha_1 + c_1\alpha_1)A + (\alpha_0 + \alpha_2 + c_1\alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2 - b_1\alpha_1) = 0.$$

Din faptul că operatorul $\Delta_A = (\alpha_0 + \alpha_2 + c_1\alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2 - b_1\alpha_1)$ este noetherian rezultă că şi operatorul A este noetherian. Fie, în plus, cunoaştem indicele operatorilor noetherieni de forma $aI + bS$, punem

$$B_1 = (b_1\alpha_1 + 2\alpha_2 + c_1\alpha_1) + (b_1\alpha_1 - 2\alpha_0 - c_1\alpha_1)S,\ B_2 = I$$

Atunci are loc formula (4) în care $l = 2$, $p = 0$, $\delta = 4\Delta_A^2$. În concluzie este adevărată următoarea afirmaţie

Teorema 9. *Are loc relaţia*

$$IndA = -Ind[(b_1\alpha_1 + 2\alpha_2 + c_1\alpha_1)I + (b_1\alpha_1 - 2\alpha_0 - c_1\alpha_1)S] + Ind\Delta_A^2. \tag{14}$$

Axiomele 1 şi 2 din (13) şi proprietatea suplimentară de a cunoaşte indicele operatorului $aI + bS$ reprezintă generalizări ale proprietăţilor operatorilor de tip potenţial studiaţi în [3]. În [3] inelul $\Im$ reprezintă inelul operatorilor de multiplicare la funcţii continue, iar condiţia suplimentară reprezintă o generalizare firească a faptului că este cunoscut indicele operatorului integral singular $aI + bS$ cu nucleu Cauchy. Formula (14) este o generalizare a formulei de calculare a indicelui obţinută prin metoda omotopiei de către N.Vasilevski [3].

Referinţe:

1. Михлин С.Г. О вычислении индекса систем одномерных сингулярных уравнений // ДАН СССР, 1966, 168, №6, с.1248-1250.
2. Gohberg I., Krupnik N. Banach algebras generated by singular integral operators // Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai 5. Hilbert space operators, Tihany (Hungary), 1970, p.240-263.
3. Василевский Н.Л. Об одном классе сингулярных операторов с ядром полярно-логаритмического типа // Известия АН ССС, (математика), 1976, т.40, №1, с.133-151.
4. Няга В.И. Об одном классе интегральных операторов типа сингулярных // Математические исследования. – Кишинёв: Штиинца, 1976, вып.42, с.138-151.
5. Василевский Н.Л. О свойствах одного класса интегральных операторов в пространстве L_p // Математические заметки, 1974, 16, вып.4, с.529-535.
6. Крупник Н.Я. Условия квазинильпотентности интегральных операторов. Возмущение операторов локального типа //ДАН СССР, 1977, т.234, с.754-757.
7. Няга В.И. Возмущение сингулярных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Исседование по функциональному анализу и дифференциальным уравнениям // Математические науки. – Кишинёв: Штиинца, 1978, с.64-68.

Prezentat la 26.12.2011