STUDIA UNIVERSITATIS
Revistă ştiinţifică a Universităţii de Stat din Moldova, 2011, nr.7(47)

REGULARIZAREA UNOR OPERATORI INTEGRALI SINGULARI CU CONJUGARE COMPLEXĂ ŞI CU TRANSLAŢII DE TIP CARLEMAN

Vasile NEAGU, Petru MOLOŞNIC*

Catedra Analiză Matematică şi Ecuaţii Diferenţiale
**Universitatea Agrară de Stat din Moldova*

In the work it is shown a method to regularize singular integral equations which contain operator of complex conjugation or translation operator of Carleman type.

Este cunoscut faptul că una dintre cele mai efective metode de rezolvare a ecuaţiilor singulare complete cu nucleu Cauchy constă în regularizarea lor echivalentă, adică în modul de obţinere a unei ecuaţii de tip Fredholm, echivalentă cu ecuaţia singulară iniţială. Însă, în cadrul studiului ecuaţiilor singulare cu conjugare complexă sau cu translaţii problema regularizării devine mult mai complicată. Astfel, de exemplu, în [1] se arată că regularizarea operatorilor singulari cu translaţii de tip Carleman este echivalentă, în general, cu regularizarea unui sistem de ecuaţii singulare cu nucleu Cauchy.

În această lucrare este expusă o metodă de regularizare a ecuaţiilor integrale singulare care conţine un operator de involuţie, în particular operatorul de conjugare complexă, sau de translaţie de tip Carleman. Metoda propusă permite a determina condiţiile de rezolvabilitate şi cele noetheriene pentru astfel de ecuaţii, precum şi formula pentru calcularea indicilor acestor ecuaţii. Cunoaşterea indicelui ecuaţiei studiate ne permite, la rândul său, să cunoaştem condiţiile în care regularizarea ecuaţiei este echivalentă. Este de menţionat că această metodă nu necesită o trecere la un sistem de ecuaţii singulare, care în unele cazuri poate fi mai complicat decât ecuaţia iniţială şi, în plus, regularizatorii respectivi se scriu într-o formă explicită.

1. Existenţa şi determinarea regularizatorilor pentru operatorii singulari cu translaţii

Vom pune în evidenţă problema existenţei şi determinării regularizatorilor echivalenţi pentru operatorii integrali singulari cu translaţii de forma

$$A = aI + bS + (cI + dS)V,$$

unde a, b, c şi d sunt funcţii continue pe Γ, S este operatorul integral singular

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, t \in \Gamma,$$

V este operatorul de translaţie, $(V\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$ $(\alpha(\alpha(t)) = t)$. Conturul Γ se consideră simplu, închis şi de tip Leapunov.

Pentru fiecare operator A, B sunt stabilite condiţii necesare şi suficiente în care ei admit o reprezentare echivalentă şi în mod efectiv sunt construiţi regularizatorii respectivi. Observăm că pătratul operatorilor V şi W este egal cu operatorul identic. Astfel de operatori se numesc *operatori involutivi.*

Fie $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ o aplicaţie a conturului Γ pe el însuşi care verifică condiţiile: $\alpha(\alpha(t)) = t,$ există derivata $\alpha'(t)$ şi $0 \neq \alpha'(t) \in H_{\mu}(\Gamma)$. Considerăm operatorul integral singular cu translaţia α :

$$A = a_1 I + b_1 S + (c_1 I + d_1 S)V,$$

unde a_1, b_1, c_1, d_1 sunt funcţii continue şi $(V\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$. În continuare este comod ca operatorul A să fie transcris sub forma

$$A = aP + bQ + (cP + dQ)V, \tag{1.1}$$

unde $P = \frac{1}{2}(I + S)$, $Q = \frac{1}{2}(I - S)$, $a = a_1 + b_1$, $b = a_1 - b_1$, $c = c_1 + d_1$ şi $d = c_1 - d_1$.

1.1. Formule de compoziție. Fie aplicația α păstrează orientarea conturului Γ și $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$, atunci din definiția funcției ρ rezultă că $\rho^{-\frac{1}{p}} \in L_q(\Gamma)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$. Așa cum, în plus, $\varphi\rho^{\frac{1}{p}} \in L_p(\Gamma)$, atunci $\varphi \in L_1(\Gamma)$ și în integrala singulară

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

avem dreptul să facem schimbul de variabilă $t = \alpha(\xi), \xi \in \Gamma$ (a se vedea [1]). Atunci

$$(VS\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\xi))}{\alpha(\xi)-\alpha(z)}\alpha'(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{\alpha'(\xi)}{\alpha(\xi)-\alpha(z)} - \frac{1}{\xi - z}\right)\varphi(\alpha(\xi))d\xi + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\xi))}{\xi - z}d\xi,\ z \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Așa cum funcția $\alpha'(\xi)$ verifică pe conturul Γ condițiile lui Hölder, operatorul integral cu nucleul

$$k(\xi, z) = \frac{\alpha'(\xi)}{\alpha(\xi)-\alpha(z)} - \frac{1}{\xi - z}$$

este compact în $L_p(\Gamma, \rho)$. Prin urmare, din relația (1.2) obținem

$$VSV = S + T_1\ , \tag{1.3}$$

unde T_1 este un operator compact. În mod similar se obține că

$$VSV = -S + T_2\ , \tag{1.4}$$

unde $T_2 \in \mathfrak{T}(L_p(\Gamma, \rho))$, în cazul în care funcția α schimbă orientarea conturului Γ. Așa cum pentru orice funcție $a \in C(\Gamma)$ avem

$$aS - SaI,\ aP - PaI,\ aQ - QaI \in \mathfrak{T}(L_p(\Gamma, \rho)), \tag{1.5}$$

atunci, în cazul translației directe, obținem:

$$VPV = P + T_3,\quad VQV = Q + T_4,\quad VaV = \tilde{a}I\ , \tag{1.6}$$

unde $T_3,\ T_4 \in \mathfrak{T}(L_p(\Gamma, \rho))$ și $\tilde{a}(t) = a(\alpha(t))$.

În cazul translației inverse, obținem:

$$VPV = Q + T_5,\quad VQV = P + T_6,\quad VaV = \tilde{a}I\ , \tag{1.7}$$

unde $T_5,\ T_6 \in \mathfrak{T}(L_p(\Gamma, \rho))$ și $\tilde{a}(t) = a(\alpha(t))$.

În continuare vom utiliza formulele (1.5), (1.6) și (1.7) fără a le însoți cu explicații detaliate. Prin T cu indici vor fi notați operatorii compacți.

Fie

$$A_1 = a_1P + b_1Q + (c_1P + d_1Q)V\ ,\ A_2 = a_2P + b_2Q + (c_2P + d_2Q)V\ ,$$

unde $a_j, b_j, c_j, d_j \in C(\Gamma)$, $(j = 1,2)$. Pentru operatorul $B = A_1A_2$ obținem următoarea expresie:

$$B = (a_1P + b_1Q + (c_1P + d_1Q)V)(a_2P + b_2Q + (c_2P + d_2Q)V) =$$

$$= a_1Pa_2P + a_1Pb_2Q + a_1Pc_2PV + a_1Pd_2QV + b_1Qa_2P + b_1Qb_2Q + b_1Qc_2PV + b_1Qd_2QV +$$

$$+ c_1PVa_2P + c_1PVb_2Q + c_1PVc_2PV + c_1PVd_2QV + d_1QVa_2P + d_1QVb_2Q + d_1QVc_2PV + d_1QVd_2QV.$$

Vom evidenția partea caracteristică a operatorului B. Presupunem că aplicația α păstrează orientarea conturului Γ. Folosind (1.5), (1.6) și relațiile $V^2 = I,\ P^2 = P,\ Q^2 = Q,\ PQ = QP = 0$, $\tilde{\tilde{a}}(t) = a(t)$, obținem:

$$a_1Pa_2P = a_1a_2P + T_6\ ,\ a_1Pb_2Q = T_7,\ a_1Pc_2PV = a_1c_2PV + T_8,\ a_1Pd_2QV = T_9,$$

$$b_1Qa_2P = T_{10},\ \ b_1Qb_2Q = b_1b_2Q + T_{11},\ b_1Qc_2PV = T_{12},\ b_1Qd_2QV = b_1d_2QV + T_{13},$$
$$c_1PVa_2P = c_1\tilde{a}_2PV + T_{14},\ c_1PVb_2Q = T_{15},\ c_1PV\tilde{c}_2PV = c_1\tilde{c}_2P + T_{16},\ \ c_1PVd_2QV = T_{17},$$
$$d_1QVa_2P = T_{18}, d_1QVb_2Q = d_1\tilde{b}_2QV + T_{19}, d_1QVc_2PV = T_{20}, d_1QVd_2QV = d_1\tilde{d}_2Q + T_{21}.$$

Aşadar,

$$B = A_1A_2 = a_1a_2P + a_1c_2PV + b_1b_2Q + b_1d_2QV + c_1\tilde{a}_2PV + c_1\tilde{c}_2P + d_1\tilde{b}_2QV + d_1\tilde{d}_2Q + T_{22} =$$
$$= (a_1a_2 + c_1\tilde{c}_2)P + (b_1\,b_2 + d_1\tilde{d}_2)Q + \left[(a_1c_2 + c_1\tilde{a}_2)\,P + (b_1d_2 + d_1\tilde{b}_2)\,Q\right]V + T_{22} \qquad (1.8)$$

Dacă însă aplicația α schimbă orientarea conturului Γ, atunci, folosind relațiile (1.5), (1.7), $V^2 = I,\ P^2 = P,\ Q^2 = Q,\ PQ = QP = 0$ şi $\tilde{a}(t) = a(t)$ se obține:

$$B = A_1A_2 = a_1a_2P + a_1c_2PV + b_1b_2Q + b_1d_2QV + c_1\tilde{b}_2PV + c_1\tilde{d}_2P + d_1\tilde{a}_2QV + d_1\tilde{c}_2Q + T_{23} =$$
$$= (a_1a_2 + c_1\tilde{d}_2)P + (b_1\,b_2 + d_1\tilde{c}_2)Q + \left[(a_1c_2 + c_1\tilde{b}_2)\,P + (b_1d_2 + d_1\tilde{a}_2)\,Q\right]V + T_{22} \qquad (1.9)$$

Aşadar, produsul a doi operatori integrali singulari cu translații Carleman $(\alpha(\alpha(t)) = t),$ de asemenea, este un operator de acelaşi tip.

Combinația liniară $\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2\ \ (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$, evident, de asemenea, reprezintă un operator de această formă. În concluzie obținem următoarea teoremă.

Teorema 1.1. *Mulțimea operatorilor de forma*

$$A = aP + bQ + (cP + dQ)V \qquad (1.10)$$

formează o algebră (necomutativă) $\mathfrak{A}(V)$ *şi orice operator din* $\mathfrak{A}(V)$ *are forma*

$$aP + bQ + (cP + dQ)V + T,$$
$$\mathfrak{A}(V) = \{aP + bQ + (cP + dQ)V + T, a, b, c, d \in C(\Gamma),\ T \in \mathfrak{T}(L_p(\Gamma, \rho))\}$$

Observația 1.1. *Algebra cât în raport cu idealul operatorilor compacți,* $\hat{\mathfrak{A}}(V) = \mathfrak{A}(V)/\mathfrak{T}(L_p(\Gamma, \rho))$, *nu este comutativă.*

Aceasta rezultă imediat din faptul că $Va - aV \notin \mathfrak{T}$ (de exemplu, pentru $a(t) = t^2$).

Din această observație rezultă că problema regularizării operatorilor din algebra $\mathfrak{A}(V)$ nu poate fi efectuată prin metodele cunoscute pentru operatorii din algebre comutative.

1.2. Construirea regularizatorilor. Condiții suficiente. Considerăm operatorul

$$A = aP + bQ + (cP + dQ)V\ \ a, b, c, d \in C(\Gamma).$$

Teorema 1.2. *Fie aplicația* α *păstrează orientarea conturului* Γ *şi*

$$\Delta_1(t) = a(t)\,\tilde{a}(t) - c(t)\,\tilde{c}(t) \neq 0 \qquad (1.11)$$
$$\Delta_2(t) = b(t)\,\tilde{b}(t) - d(t)\,\tilde{d}(t) \neq 0, \qquad (1.12)$$

atunci operatorul A *admite o regularizare în spațiul* $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demonstrație. Fie condițiile (1.11) şi (1.12) satisfăcute şi

$$H = \tilde{a}P + \tilde{b}\,Q - (cP + dQ)V.$$

Folosind (1.8), care exprimă formula pentru compoziția a doi operatori A_1 şi A_2 din algebra $\mathfrak{A}(V)$, obținem:

$$HA = \Delta_1(t)P + \Delta_2(t)Q + T_{23}$$

şi

$$AH = \Delta_1(t)P + \Delta_2(t)Q + T_{24}.$$

Aşadar, operatorii HA şi AH sunt operatori integrali singulari fără translații, coeficienții cărora, $\Delta_1(t)$ şi $\Delta_2(t)$, sunt funcții continue şi diferite de zero pe conturul Γ. În aceste condiții, operatorii respectivi admit o regularizare, iar de aici rezultă că şi operatorul A admite o regularizare. Astfel teorema este demonstrată.

Vom construi regularizatorul pentru operatorul A. Din rezultatele prezentare în [2] reiese că operatorul $M=\frac{1}{\Delta_1}P+\frac{1}{\Delta_2}Q$ este un regularizator pentru HA (şi pentru AH). Deci operatorul $R=MH$ este un regularizator pentru A.

Vom efectua produsul MH pentru a determina o expresie explicită pentru operatorul R. Pentru aceasta operatorul $M=\frac{1}{\Delta_1}P+\frac{1}{\Delta_2}Q$ îl scriem sub forma

$$\frac{1}{\Delta_1}P+\frac{1}{\Delta_2}Q=\frac{1}{\Delta_1}P+\frac{1}{\Delta_2}Q+(0P+0Q)V$$

şi aplicăm regula (1.8) de înmulţire a doi operatori din $\mathfrak{A}(V)$. Obţinem:

$$R=MH=\left[\frac{1}{\Delta_1}P+\frac{1}{\Delta_2}Q+(0P+0Q)V\right]\left[\tilde{a}P+\tilde{b}Q-(cP+dQ)V\right]=$$

$$=\frac{\tilde{a}}{\Delta_1}P+\frac{\tilde{b}}{\Delta_2}Q-\left[\frac{c}{\Delta_1}P+\frac{d}{\Delta_2}Q\right]V+T_{25}.$$

Corolarul 1.1. *Fie aplicaţia α păstrează orientarea conturului Γ şi sunt verificate condiţiile (1.11) şi (1.12). Atunci operatorul $A=aP+bQ+(cP+dQ)V$ este noetherian în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ şi operatorul*

$$R=\frac{\tilde{a}}{\Delta_1}P+\frac{\tilde{b}}{\Delta_2}Q-\left[\frac{c}{\Delta_1}P+\frac{d}{\Delta_2}Q\right]V \tag{1.13}$$

este un regularizator pentru A.

Fie $\alpha:\Gamma\to\Gamma$ schimbă orientarea conturului Γ. Pentru a construi regularizatorul operatorului

$$A=aP+bQ+(cP+dQ)V,\ a,b,c,d\in C(\Gamma) \tag{1.14}$$

ne folosim de regula (1.9), de înmulţirea operatorilor de forma (1.14). Din această regulă rezultă că şi în acest caz mulţimea operatorilor cu translaţie formează o algebră necomutativă.

Teorema 1 3. *Operatorul (1.14) este noetherian în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$, dacă*

$$\Delta\ (t)=a(t)\tilde{b}(t)-c(t)\,\tilde{d}(t)\neq 0. \tag{1.15}$$

Demonstraţie. Fie $H=\tilde{b}P+\tilde{a}Q-(cP+dQ)V$. Aplicând relaţia (1.9) pentru compoziţia operatorilor A şi H, obţinem:

$$AH=(a\,\tilde{b}\ -c\,\tilde{d}\ )P+(\tilde{a}\,b\ -\tilde{c}\,d\ )Q+T_{26},$$

sau $AH=\Delta P+\tilde{\Delta}Q+T_{26}$. În mod similar, $HA=\Delta P+\tilde{\Delta}Q+T_{27}$ şi din ultimele două egalităţii rezultă afirmaţia teoremei 1.3. În plus, operatorul

$$R=\left(\frac{1}{\Delta}P+\frac{1}{\tilde{\Delta}}Q\right)H$$

reprezintă un regularizator pentru operatorul A. Aplicând formula (1.9), operatorul R îl putem reprezenta sub forma

$$R=\frac{\tilde{b}}{\Delta}P+\frac{\tilde{a}}{\tilde{\Delta}}Q-\left(\frac{c}{\Delta}P+\frac{d}{\tilde{\Delta}}Q\right)V.$$

Corolarul 1.2. *Fie aplicaţia α schimbă orientarea conturului Γ şi sunt verificate condiţiile (1.15), atunci operatorul $A=aP+bQ+(cP+dQ)V$ este noetherian în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ şi operatorul*

$$R=\frac{\tilde{b}}{\Delta}P+\frac{\tilde{a}}{\tilde{\Delta}}Q-\left(\frac{c}{\Delta}P+\frac{d}{\tilde{\Delta}}Q\right)V \tag{1.16}$$

este un regularizator pentru A.

1.3. Condiții necesare. În mod firesc se spune întrebarea, dacă condițiile (1.11), (1.12) şi respectiv (1.15) sunt necesare în care operatorul $A = aP + bQ + (cP + dQ)V$, $(V\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$, este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ şi, în consecință, dacă operatorul A admite o regularizare. Totodată, avem nevoie de a determina indicele operatorului A pentru a stabili condițiile în care el admite o regularizare echivalentă. Pentru a rezolva aceste probleme, vom folosi un procedeu descris în [3], care se referă la studiul unor operatori cu involuții.

Considerăm operatorul

$$A = a_1 I + b_1 S + (c_1 I + d_1 S)V, \tag{1.17}$$

unde $a_1, b_1, c_1, d_1 \in C(\Gamma)$, $(V\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$, $V^2 = I$. Acestui operator îi asociem operatorul A_V, definit în spațiul $L_p^2(\Gamma, \rho) = L_p(\Gamma, \rho) \times L_p(\Gamma, \rho)$ cu ajutorul matricei

$$A_V = \begin{Vmatrix} a_1 I + b_1 S & c_1 I + d_1 S \\ V(c_1 I + d_1 S)V & V(a_1 I + b_1 S)V \end{Vmatrix}.$$

Folosind relațiile (1.6), (1.7) şi notația $\widetilde{a}(t) = a(\alpha(t))$, deducem că A_V diferă doar cu un termen compact de operatorul $\widetilde{A}_V$, definit de relația

$$\widetilde{A}_V = \begin{Vmatrix} a_1 & c_1 \\ \widetilde{c}_1 & \widetilde{a}_1 \end{Vmatrix} I + \begin{Vmatrix} b_1 & d_1 \\ \varepsilon \widetilde{d}_1 & \varepsilon \widetilde{b}_1 \end{Vmatrix} S, \tag{1.18}$$

unde $\varepsilon = 1$, dacă funcția α păstrează orientarea conturului Γ şi $\varepsilon = -1$ în caz contrar.

Operatorul $\widetilde{A}_V$ este un operator integral singular, însă cu coeficienți matriceali. Pentru aceşti operatori sunt cunoscute (a se vedea, de exemplu, [1]) condițiile necesare şi suficiente în care ei sunt noetherieni, precum şi formula pentru calcularea indicilor lor.

În [3] este demonstrată următoarea teoremă.

Teorema 1.4. *Fie a, b, c şi d funcții continue pe Γ. Operatorul A, definit de relația (1.17), este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$, atunci şi numai atunci când operatorul $\widetilde{A}_V$ este noetherian în spațiul $L_p^2(\Gamma, \rho)$. Dacă operatorul $\widetilde{A}_V$ este noetherian, atunci*

$$IndA = \frac{1}{2} Ind\widetilde{A}_V.$$

Operatorul $\widetilde{A}_V$, prin urmare, şi operatorul A, este noetherian dacă şi numai dacă

$$\Delta_\pm(t) = [a_1(t) \pm b_1(t)][\widetilde{a}_1(t) \pm \varepsilon \widetilde{b}_1(t)] - [c_1(t) \pm d_1(t)][\widetilde{c}_1(t) \pm \varepsilon \widetilde{d}_1(t)] \neq 0, \tag{1.19}$$

şi

$$Ind\widetilde{A}_V = -ind \frac{\Delta_+(t)}{\Delta_-(t)}. \tag{1.20}$$

Se verifică uşor că în cazul în care α păstrează orientarea conturului Γ condițiile (1.19) coincid cu condițiile (1.11) şi (1.12) $(\Delta_+(t) = \Delta_1(t), \Delta_-(t) = \Delta_2(t))$, iar în cazul în care α schimbă orientarea conturului Γ, ele coincid cu condițiile (1.15) $(\Delta_+(t) = \widetilde{\Delta}_-(t) = \Delta(t))$. Astfel, condițiile (1.11) şi (1.12) din teorema 1.2 şi condițiile (1.15) din teorema 1.3 sunt şi necesare în care operatorul A este noetherian şi admite o regularizare. În plus, aplicând concluzia teoremei 1.4 referitoare la indice, obținem:

$IndA = -\frac{1}{2} ind \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)}$, *în cazul în care α păstrează orientarea conturului Γ* şi

$IndA = -ind\Delta(t)$, *în cazul în care α schimbă orientarea conturului Γ.*

Corolarul 1.3. *Pentru $ind \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)} \leq 0$, respectiv $ind\Delta(t) \leq 0$, operatorul A admite o regularizare echivalentă. Regularizatorul echivalent este definit în corolarul 1.1 sau 1.2, în dependență de caz.*

2. Existenţa şi determinarea regularizatorilor pentru operatorii singulari cu conjugare complexă

Considerăm operatorul integral singular cu conjugare complexă
$$B = a_1 I + b_1 S + (c_1 I + d_1 S)W \,, \tag{2.1}$$
unde $a_1, b_1, c_1, d_1 \in C(\Gamma)$ şi W este operatorul de conjugare complexă, $(W\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}$. Păstrând notaţiile de la punctul 1, operatorul B poate fi scris sub forma
$$B = aP + bQ + (cP + dQ)W \,. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *Fie* Γ *un contur închis, simplu şi de tip Leapunov. Atunci operatorul* $WSW + S$ *este compact în spaţiul* $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demonstraţie. Notăm prin Γ_0 cercul unitate, $(\Gamma_0 = \{t \,|\, |t| = 1\})$ şi prin S_0 operatorul integral singular cu nucleu Cauchy pe Γ_0,
$$(S_0\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi \,, z \in \Gamma_0.$$
Atunci
$$((WS_0W + S_0)\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\xi)}{\overline{\xi} - \overline{z}} \overline{d\xi} + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi \,.$$
Aşadar, dacă Γ_0 este cercul unitate, atunci operatorul $WS_0W + S_0$ este compact în $L_p(\Gamma, \rho)$. Fie acum Γ conturul din enunţul teoremei. Atunci, există o aplicaţie $\nu : \Gamma_0 \mapsto \Gamma$, care posedă derivată $\nu'(z)$, diferită de zero, şi verifică condiţiile lui Holder pe Γ_0. Formăm operatorul $M : L_p(\Gamma, \rho) \mapsto L_p(\Gamma_0, \rho)$, care acţionează conform următoarei reguli $(M\varphi)(\xi) = \varphi(\nu(\xi))$. Atunci:
$$(MSM^{-1} - S_0)\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \left(\frac{\nu'(\xi)}{\nu(\xi) - \nu(z)} - \frac{1}{\xi - z} \right) \varphi(\xi) d\xi \,. \tag{2.3}$$
Aşa cum funcţia $\nu'(z)$ este diferită de zero şi verifică condiţiile lui Holder pe Γ_0, atunci operatorul integral $T = MSM^{-1} - S_0$, definit de egalitatea (2.3), cu nucleul
$$k(\xi, z) = \frac{\nu'(\xi)}{\nu(\xi) - \nu(z)} - \frac{1}{\xi - z}$$
este compact în spaţiul $L_p(\Gamma_0, \rho)$. Aşadar, operatorul $MSM^{-1} - S_0$, definit de relaţia (2.3), este compact în $L_p(\Gamma_0, \rho)$. Deoarece operatorii W şi M comută, atunci
$$\begin{aligned} M(WSW + S)M^{-1} - WS_0W - S_0 &= WMSM^{-1}W + MSM^{-1} - WS_0W - S_0 = \\ &= W(MSM^{-1} - S_0)W + MSM^{-1} - S_0 = WTW + T \,. \end{aligned} \tag{2.4}$$
Din ultima egalitate, ţinând cont şi de faptul că operatorul $WS_0W + S_0$ este compact, rezultă că şi $WSW + S$ este compact în spaţiul $L_p(\Gamma, \rho)$. Teorema este demonstrată.

Corolarul 2.1. *Fie* Γ *un contur închis, simplu şi de tip Liapunov, atunci au loc următoarele relaţii:*
$$WPW = Q + T_{28}, \quad VQV = Q + T_{29}, \quad VaV = \overline{a}I, \tag{2.5}$$
unde $T_{28}, T_{29} \in \mathfrak{T}(L_p(\Gamma, \rho))$ *şi* $\overline{a}(t) = \overline{a(\alpha(t))}$.

Observăm că relaţiile (2.5) sunt similare cu relaţiile (1.7), de aceea, repetând raţionamentele de la teorema 1.4, obţinem

Teorema 2.2. *Operatorul* $B = aP + bQ + (cP + dQ)W$ *este noetherian în spaţiul* $L_p(\Gamma, \rho)$ *, dacă şi numai dacă sunt verificate condiţiile*

$$\Delta(t) = a(t)\overline{b(t)} - c(t)\overline{d(t)} \neq 0 \,. \tag{2.6}$$

Dacă condițiile (2.6) sunt verificate, atunci indicele operatorului B *se determină din egalitatea*

$$IndB = -ind\Delta(t).$$

În plus, operatorul B *admite o regularizare şi operatorul*

$$R = \frac{\overline{b}}{\Delta}P + \frac{\overline{a}}{\overline{\Delta}}Q - (\frac{c}{\Delta}P + \frac{d}{\overline{\Delta}}Q)W \tag{2.7}$$

este un regularizator. Pentru $ind\Delta(t) \leq 0$ *regularizarea este echivalentă.*

Referințe:

1. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. - Москва: Наука, 1971, 448 с.
2. Gohberg,I., Krupnik N. Introduction to the theory of one-dimensional singular integral operators, vols.I and II. - Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1992.
3. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом // Известия АН Армянской ССР, Математика **8**, 1, (1973), с.3-12.

Prezentat la 26.12.2011