ASUPRA NORMEI ESENȚIALE A OPERATORULUI CU NUCLEU CAUCHY ÎN CAZUL CONTURULUI NEMĂRGINIT

Diana AFTENI
Universitatea de Stat din Tiraspol

In this paper the essential norm of the singular integral operator in a space L_p with weight is calculated. These results are used for determination of some noietherian critera for operators of the form $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$.

Fie Γ un contur nemărginit şi $\widetilde{\Gamma}$ imaginea lui Γ în rezultatul aplicației $t \to z$, $z = (t - z_0)^{-1}$, $t \in \Gamma$, $z_0 \notin \Gamma$. În continuare vom presupune că $0 \notin \Gamma$ şi $z_0 = 0$. Conturul Γ îl vom numi admisibil dacă $\widetilde{\Gamma}$ este o curbă închisă de tip Leapunov. În această lucrare este calculată norma esențială a operatorului integral singular S,

$$(S_\Gamma \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, t \in \Gamma, \tag{1}$$

în spațiul L_p cu anumite ponderi în cazul conturului admisibil. Aceste rezultate sunt utilizate la determinarea unor criterii noetheriene pentru operatorii integrali singulari cu coeficienți măsurabili şi mărginiți. Rezultatele obținute în prezenta lucrare reprezintă generalizări ale unor rezultate obținute în [1-2] pentru cazul conturului mărginit.

Notăm cu $L_p(\Gamma, \rho)$ spațiul $L_p (1 < p < +\infty)$ pe conturul Γ cu ponderea

$$\rho(t) = |t|^{\beta_0} \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{t - t_k}{t} \right|^{\beta_k}, \tag{2}$$

unde $t_1, ..., t_n$ sunt nişte puncte distincte pe conturul Γ, iar $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ nişte numere reale arbitrare, care verifică condițiile

$$-1 < \beta_k < p - 1. \tag{3}$$

Norma în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ se defineşte prin egalitatea

$$\|\varphi\|_{p,\rho} = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho(t) |dt| \right)^{1/p}. \tag{4}$$

Se cunoaşte (*a se vedea* [3-4]) că dacă conturul Γ este admisibil şi numerele $\beta_k (k = 1, ..., n)$ verifică condițiile (3), atunci operatorul S_Γ este mărginit în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$. Tot din aceste lucrări se poate deduce că dacă Γ este axa reală R, atunci

$$\|S_R\|_p = \|S_{\Gamma_0}\|_{p,\rho_0},$$

unde $\rho_0(t) = |t - 1|^{p-2}$ şi Γ_0 este cercul unitate. În particular, $\|S_R\|_2 = \|S_{\Gamma_0}\|_2$.

Fie A un operator liniar şi mărginit în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ şi $\mathsf{T} = \mathsf{T}(L_p(\Gamma, \rho))$ idealul bilateral al operatorilor compacți care acționează în $L_p(\Gamma, \rho)$. Notăm prin $|A|_{p,\rho}$ norma esențială a operatorului A în $L_p(\Gamma, \rho)$:

$$|A|_{p,\rho} = \inf_{T \in \mathsf{T}} \|A + T\|_{p,\rho} \tag{5}$$

Teorema 1. *Pentru normele esenţiale ale operatorilor* S_Γ *şi* $S_{\tilde{\Gamma}}$ *are loc egalitatea*

$$|S_\Gamma|_{p,\rho} = |S_{\tilde{\Gamma}}|_{p,\tilde{\rho}}, \tag{6}$$

unde

$$\tilde{\rho}(z) = |z|^{p-\beta_0-2} \prod_{k=1}^{n} |z - z_k|^{\beta_k} \left(z_k = 1/t_k \right). \tag{7}$$

Demonstraţie. Să arătăm că operatorul B, definit de egalitatea

$$(B\varphi)(z) = \prod_{k=1}^{n} |t_k|^{\beta_k/p} \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{1}{z}\right),$$

este liniar şi mărginit din spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ în spaţiul $L_p(\tilde{\Gamma},\tilde{\rho})$. Într-adevăr, fie $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$, atunci

$$\|B\varphi\|_{p,\tilde{\rho}}^p = \prod_{k=1}^{n} |t_k|^{\beta_k} \int_{\tilde{\Gamma}} \left| \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p \tilde{\rho}(z)|dt| = \prod_{k=1}^{n} |t_k|^{\beta_k} \int_{\Gamma} |\varphi(t)|^p |t|^{\beta_0} \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{t_k}\right|^{\beta_k} |dt| =$$

$$= \int_{\Gamma} |\varphi(t)|^p \rho(t)|dt| = \|\varphi\|_{p,\rho}^p .$$

Astfel, operatorul B realizează o izometrie între spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ şi $L_p(\tilde{\Gamma},\tilde{\rho})$. Calculăm $BS_\Gamma B^{-1}$. Avem:

$$(BS_\Gamma)\varphi = B\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \prod_{k=1}^{n} |t_k|^{\beta_k} \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \frac{1}{z}}d\tau = -\prod_{k=1}^{n} |t_k|^{\beta_k} \frac{1}{z\cdot \pi i}\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)d\xi}{\xi^2\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{z}\right)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} |t_k|^{\beta_k} \frac{1}{\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\frac{1}{\xi}\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi - z}d\xi = (S_{\tilde{\Gamma}}B)\varphi .$$

Aşa cum această egalitate are loc pentru orice funcţie $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$, rezultă că $BS_\Gamma = S_{\tilde{\Gamma}}B$, adică $BS_\Gamma B^{-1} = S_{\tilde{\Gamma}}$, sau $S_\Gamma = B^{-1}S_{\tilde{\Gamma}}B$. Prin urmare:

$$\inf_{T\in\mathsf{T}}\|S_\Gamma + T\| = \inf_{T\in\mathsf{T}}\|B^{-1}S_{\tilde{\Gamma}}B + T\| = \inf_{T\in\mathsf{T}}\|S_\Gamma + BTB^{-1}\| = \inf_{\tilde{T}\in\tilde{\mathsf{T}}}\|S_{\tilde{\Gamma}} + \tilde{T}\|,$$

deoarece, atunci când T parcurge mulţimea T, operatorul de forma BTB^{-1} descrie mulţimea $\tilde{\mathsf{T}} = \mathsf{T}\left(L_p\left(\tilde{\Gamma},\tilde{\rho}\right)\right)$. Teorema este demonstrată.

Din teorema demonstrată şi din teorema 2 din lucrarea [2] obţinem

Teorema 2. *Fie* Γ *un contur admisibil şi numărul* β *verifică condiţiile*

$$\min(0, p-2) \le \beta \le \max(0, p-2) \text{ şi } \rho_0(t) = |t|^{p-2}\left|\frac{t-t_1}{t}\right|^{\beta} (t_1 \in \Gamma),$$

atunci

$$\inf_{T\in\mathsf{T}}\|S_\Gamma + T\| = \begin{cases} ctg\, \pi/2p, & daca \quad 2 \le p < +\infty, \\ tg\, \pi/2p, & daca \quad 1 < p \le 2. \end{cases}$$

Teorema 2 poate fi generalizată la spaţii $L_p(\Gamma,\rho)$ cu ponderi mai generale. Pentru aceasta avem nevoie de teorema de interpolare a lui Stein [5], care în cazul nostru este comod de a fi formulată după cum urmează.

Teorema 3 (Stein). *Fie* h_1, h_2 *două funcții nenegative, măsurabile pe* Γ, *și* A *un operator liniar și mărginit în spațiile* $L_p(\Gamma, h_1)$ *și* $L_p(\Gamma, h_2)$, *atunci operatorul* A *este mărginit în toate spațiile* $L_p(\Gamma, h)$, *unde*

$$h(t) = h_1^{1-\lambda}(t) \cdot h_2^{\lambda}(t)(0 \le \lambda \le 1).$$

În plus, pentru norma operatorului A *în spațiul* $L_p(\Gamma, \rho)$ *are loc inegalitatea*

$$\|A\|_{p,h} \le \|A\|_{p,h_1}^{1-\lambda} \cdot \|A\|_{p,h_2}^{\lambda} . \tag{8}$$

Alegem funcțiile h_1 și h_2 în felul următor:

$$h_1(t) = |t|^{p-2}\left|\frac{t-t_1}{t}\right|^{\beta_1}, \quad h_2(t) = |t|^{p-2}\left|\frac{t-t_2}{t}\right|^{\beta_2},$$

$$h(t) = |t|^{p-2}\left|\frac{t-t_1}{t}\right|^{\beta_1\lambda_1}\left|\frac{t-t_2}{t}\right|^{\beta_2(1-\lambda_1)},$$

unde $\min(0, p-2) \le \beta_j \le \max(0, p-2)(j=1,2)$ și $0 \le \lambda_1 \le 1$. Din teorema 2 și din teorema de interpolare a lui Stein rezultă că

$$\inf_{T \in \mathrm{T}} \|S_\Gamma + T\|_{p,h} \le \delta(p),$$

unde $\delta(p) = tg\, \pi/2p$ pentru $1 < p \le 2$ și $\delta(p) = ctg\, \pi/2p$ pentru $2 \le p < +\infty$. Pe de altă parte (*a se vedea* [6]), este cunoscut că în toate spațiile $L_p(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\rho})$ are loc inegalitatea

$$\inf_{\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{T}}} \left\|S_\Gamma + \widetilde{T}\right\|_{p,\widetilde{\rho}} \ge \delta(p). \tag{9}$$

Atunci, din teorema 1 și din inegalitatea (8) obținem:

$$\inf_{T \in \mathrm{T}} \|S_\Gamma + T\| = \begin{cases} ctg\, \pi/2p, & daca \quad 2 \le p < +\infty, \\ tg\, \pi/2p \quad, & daca \quad 1 < p \le 2. \end{cases}$$

Vom reprezenta grafic dependența normei esențiale a operatorului S_Γ de ponderea ρ. Fie, de exemplu, $p > 2$ și $\rho(t) = |t|^{p-2}\left|\frac{t-t_1}{t}\right|^{\beta}$, $t_1 \in \Gamma$, $-1 < \beta < p-1$. Ținând cont de teorema 2 și de faptul că (*a se vedea* [6]) $\left|S_{\widetilde{\Gamma}}\right|_{p,\widetilde{\rho}} \underset{\beta \to -1}{\longrightarrow} +\infty$, $\left|S_{\widetilde{\Gamma}}\right|_{p,\widetilde{\rho}} \underset{\beta \to p-1}{\longrightarrow} +\infty$, graficul funcției $|S_\Gamma|_{p,\rho}$ (în dependență de β) are următoarea formă (Fig.1):

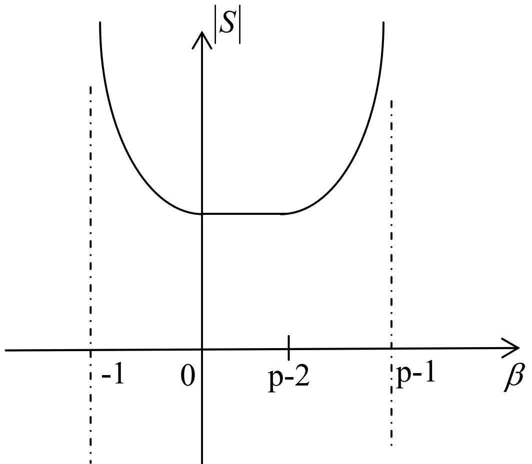

Fig.1. Graficul funcției $|S_\Gamma|_{p,\rho}$

Fie $h(t)=|t|^{p-2}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{t-t_k}{t}\right|^{\beta_k\alpha_k}$, unde $\min(0,p-2)\le\beta_k\le\max(0,p-2)$, $\alpha_k=(1-\lambda_{k-1})\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_j$, $\lambda_0=$ $=0$, $0\le\lambda_j\le 1(j=1,...,n)$.

Folosind raționamentele de mai sus şi inducția matematică (în raport cu n), obținem următorul rezultat.

Teorema 3. *Pentru norma esențială a operatorului* S_Γ *are loc egalitatea*

$$|S_{\Gamma p,h}|=\begin{cases} ctg\ \pi/2p, & dacă\ \ 2\le p<+\infty,\\ tg\ \pi/2p, & dacă\ \ 1<p\le 2.\end{cases}$$

Menționăm că această afirmație nu mai are loc în cazul în care conturul Γ nu este admisibil. Într-adevăr, să presupunem că conturul Γ este de aşa natură încât imaginea lui, $\widetilde{\Gamma}$, în rezultatul transformării $t\to\frac{1}{t}$ are un punct unghiular θ. Atunci, din teorema 1 şi din rezultatele prezentate în [7] deducem că pentru $\theta=\pi/2$ avem $|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma)}=\sqrt{2}$. În plus, se poate arăta că în acest caz norma esențială a operatorului S_Γ în spațiul $L_2(\Gamma)$ reprezintă o funcție monoton descrescătoare în raport cu θ $(0<\theta\le\pi)$ (Fig.2) şi verifică condițiile

$$1\le|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma)}<1+\sqrt{2}$$

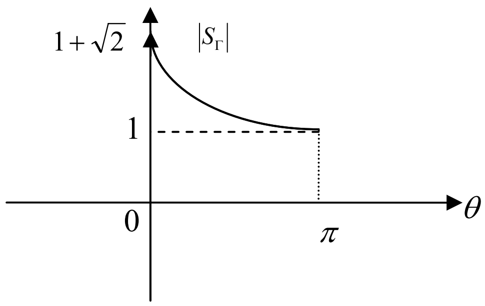

Fig.2. Graficul funcției $|S_\Gamma|_{p,\rho}$ în raport cu θ.

Introducem următoarele notații: notăm prin $L_\infty(\Gamma)$ mulțimea funcțiilor măsurabile şi mărginite pe conturul Γ, prin $L_\infty^+(\Gamma)$ $(L_\infty^-(\Gamma))$ – mulțimea funcțiilor $g_+(g_-)$ din $L_\infty(\Gamma)$ olomorfe în $G^+(G^-)$, $P_\Gamma=\frac{1}{2}(I+S_\Gamma)$ şi $Q_\Gamma=\frac{1}{2}(I-S_\Gamma)$, unde G^+ este domeniul mărginit de Γ, iar $G^-=\mathbb{C}\setminus(G^+\cup\Gamma)$. Amintim că un operator A se numeşte noetherian dacă $\operatorname{Im}A=\overline{\operatorname{Im}A}$, $\dim\ker A<+\infty$ şi $\dim\ker A^\bullet<+\infty$. În acest caz, numărul $\operatorname{Im}A=\dim\ker A-\dim\ker A^*$ se numeşte indicele operatorului A. În spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ considerăm operatorul integral singular

$$A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma, \tag{10}$$

în care coeficienții a şi b sunt funcții din $L_\infty(\Gamma)$.

Teorema 4. *Operatorul* A *este noetherian în spațiul* $L_p(\Gamma,\rho)$ *dacă şi numai dacă în spațiul* $L_p(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\rho})$ *este noetherian operatorul*

$$\widetilde{A}=\widetilde{a}P_{\widetilde{\Gamma}}+\widetilde{b}Q_{\widetilde{\Gamma}}, \tag{11}$$

unde $\widetilde{f}(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$. *Dacă operatorul* $\widetilde{A}$ *este noetherian, atunci*

$$IndA\Big|_{L_p(\Gamma,\rho)} = Ind\widetilde{A}\Big|_{L_p(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\rho})}.$$

Demonstrație. Așa cum am arătat mai sus, $BS_\Gamma B^{-1} = S_{\widetilde{\Gamma}}$, unde B este operatorul definit de egalitatea (7). Prin urmare, $BP_\Gamma B^{-1} = P_{\widetilde{\Gamma}}$, $BQ_\Gamma B^{-1} = Q_{\widetilde{\Gamma}}$ şi $BfB^{-1} = \widetilde{f}\left(f \in L_\infty(\Gamma)\right)$. Atunci:

$$BAB^{-1} = B(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)B^{-1} = BaB^{-1}BP_\Gamma B^{-1} + BbB^{-1}BQ_\Gamma B^{-1} = \widetilde{a}P_{\widetilde{\Gamma}} + \widetilde{b}\,Q_{\widetilde{\Gamma}} = \widetilde{A}.$$

Din această egalitate rezultă afirmațiile teoremei 4. Teorema este demonstrată.

Teorema demonstrată ne permite să transferăm la operatorii de forma $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ diferite criterii noetheriene din teoria ecuațiilor integrale singulare cu coeficienți măsurabili şi mărginiți pe contururi mărginite (*a se vedea* [1,2,3,6]).

Referințe:

1. Крупник В.И., Няга В. О сингулярных интегральных операторах в случае негладкого контура // Математические исследования, X, вып.1(35). - Кишинев, 1975, с.144-164.
2. Крупник В.И., Няга В. О сингулярных операторах в пространствах L_p с весом // Математические исследования, IX, вып.3 (33). - Кишинев, 1974, с.206-209.
3. Хведелидзе Б.В. Линейные разрывные граничные задачи теории функции, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Труды Тбилисского мат. ин-та АН Груз. ССР, XXIII, 1957, с.3-158.
4. Neagu, V. Algebre Banach generate de operatori integrali singulari. - Chişinău: CEP USM, 2005.
5. Stein E. Interpolation linear operators // Trans. Amer. Math. Soc., 1956, no.83, p.222-234.
6. Krupnik N. Banach algebras with symbol and singular integral operators. - Birkhäuser, 1998.
7. Moloşnic, P. Estimări ale normelor şi condiții noetheriene ale operatorilor integrali singulari perturbați: Autoreferatul tezei de doctor în științe fizico-matematice. - Chişinău, 2004.

Prezentat la 14.06.2012