ИССЛЕДОВАНИЕ ПЯТИМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ С ИНВАРИАНТНОЙ ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ И НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ НА НЕЙ

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

Actualmente, la Catedra Algebră şi Geometrie a Universității de Stat din Moldova se studiază intensiv subgrupuri subperiodice ale grupurilor cincidimensionale ale lui Fiodorov. La studierea acestor subgrupuri este necesar să cunoşti nu doar cantitatea grupurilor simetriei, care compun categoria dată, dar şi structura fiecărui grup aparte al categoriei, care se cercetează. Este prezentată analiza catalogului tuturor înfăţişărilor, care întră în componența 1208 grupurilor bidimensionale G_{20}^{P} cu $P \simeq G_{30}$ în scopul stabilirii stucturilor grupurilor punctuale cincidimensionale cu un plan bidimensional invariant şi un punct invariant din acest plan (grupuri de simetrie ale categoriei G_{520}), care se interpretează cu 1208 grupuri punctuale bidimensionale G_{20}^{P} P-simetriei cristalografice cu $P \simeq G_{30}$.

At present in the Departmentof the Algebra and Geometry of the Moldavian State University an extensive research investigations of studying of the subperiodical subgroups of the five-dimensional Fedorov groups are conducted. In the studying process of a such subgroups it is important to know not only the number of symmetry groups, composing the considering category of the planar subgroups of the five-dimensional Fedorov groups, but also the structure of every certain group of the investigating category. In order to identify the structures of the five-dimensional point symmetry groups with an invariant two-dimensional plane and a fixed point on it, i. e. the symmetry groups of the category G_{520} in a brief notation as $P \simeq G_{30}$, which up to structure are interpreted by 1208 two-dimensional point groups G_{20}^{P} of the crystallographic P-symmetries for $P \simeq G_{30}$, the detailed review of the catalog of all types of two-dimensional P-symmetry point groups, entering in the set of the 1208 two-dimensional point groups C_{20}^{P} for $P \simeq G_{30}$, is given.

1. Вывод многомерных дискрентных групп симметрии и их всевозможных подгрупп диктуется не только математическими задачами n-мерной дискрентной геометрии, но и потребностями современной физики. Так, например, в работах Яннера и Янссена за 1969-1979 годы приведены примеры конкретных соединений, симметрия которых описывается многомерными группами. В частности, в работе [1] этих авторов отмечено, что симметрия периодически искаженного кристалла (с иррациональными периодами искажения) описывается 6-мерными фёдоровскими группами.

Что касается n-мерных групп симметрии и их всевозможных подгрупп, то их вывод при $n \geq 4$, как показали исследования 4-мерных федоровских групп в [2], осуществлять таким путём, как это проводилось в трёхмерном пространстве [3] (после предварительного полного вывода n-мерных точечных «кристаллографических» групп G_{no} и всех типов n-мерных решёток Браве) становится уже невозможным.

Основным методом вывода n-мерных групп симметрии при $n \geq 5$ является подробно описанный в [4] так называемый арифметический метод применения конечных групп целочисленных (n×n)-матриц, позволивший расширить теорию трёхмерных решёток на n-мерные и создать методы их полных исследований при любом конкретном значении n. Однако сам процесс вывода всевозможных различных пятимерных точечных групп G_{50} и пятимерных решёток Браве, как следует из [4], является довольно сложной и трудоёмкой задачей, требующей слишком мощных вычислительных средств.

Наряду с важными универсальными методами геометрической теории чисел, развитыми в [4] московской школой Б.Н. Делоне для исследования многомерных групп симметрии, особую роль в совершенствовании принципиального метода решения задачи n-мерной геометрической кристаллографии имеют разработанные в [5,6] принципы применения одно-, двух- и трёхмерных групп P-симметрии для подсчёта и моделирования субпериодических n-мерных групп симметрии.

В этих работах показано, что, например, r-мерными группами -кратной антисимметрии G_{r}^{l} при их полной классификации, согласно общей теории l-кратной антисимметрии, подробно описанной в [7], полностью интерпретируются с точностью до строения все различные многомерные плоскостные группы симметрии категории $G_{(r+l)(r+l-1)\dots(r+1)r}$, сохраняющие в $(r+l)$-мерном эвклидовом пространстве последовательно включающие друг в друга плоскости размерностей $r+l-1$, $r+l-2$, …, $(r+1)$, r, а группами G_r^P десяти розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$, исчерпывающихся p- и (p/)- симметриями при p = 1, 2, 3,4,6 – группы симметрии категории $G_{(r+2)r}$ [8,9]. Далее, группами G_r^P таблеточных P-симметрий при $P \simeq G_{320}$, исчерпывающихся (p,2)- и (p/,2)-симметриями, интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категории $G_{(r+3)(r+2)r}$ [8,9], а группами G_r^P гипертаблеточных P-симметрий 1-го порядка при $P \simeq G_{4320}$, исчерпывающихся (p,2,2)- и (p/,2,2)-симметриями, – группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+3)(r+2)r}$ [9].

Аналогичным образом группами G_r^P 32 кристаллографических P-симметрий при $P = G_{30}$ моделируются с точностью до строения все различные (r +3)-мерные группы симметрии категории $G_{(r+3)r}$ [10]. В свою очередь, группами G_r^P 122 гиперкристаллографических P-симметрий первого порядка при $P \simeq G_{430}$ интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+3)r}$[11], а группами G_r^P 624 гиперкристалло-графических P-симметрий 2-го порядка при $P \simeq G_{5430}$ – все различные с точностью до строения группы симметрии категории $G_{(r+5)(r+4)(r+3)r}$ [12]. Наконец, группами G_r^P бирозеточных P-симметрий, соответствующих группам подстановок $P \simeq G_{420}$, моделируются все различные с точностью до строения группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+2)r}$ [13].

С помощью отмеченных способов использования r-мерных групп G_r^P данной P-симметрии (где $0 \leq r \leq 3$), для исследования интерпретируемых ими многомерных групп симметрии, удаётся выявить не только количество самих многомерных групп симметрии данной категории, но и установить структуру каждой из них, ибо между группами G_r^P и моделируемыми ими многомерными группами симметрии устанавливается не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, что означает, согласно [14], что каждая конкретная группа из множества групп категории G_r^P и интерпретируемая ею многомерная группа симметрии имеют одинаковое строение.

Что касается пятимерных групп симметрии (так как они на очереди дня после полностью исследованных в [15] четырёхмерных), то структура каждой из них не просто усматривается. Выходом из этого положения является имеющийся способ использования обобщенных классических групп P-симметрии, которыми моделируется рассматриваемая категория пятимерных групп симметрии, для нахождения их структуры. Выявлению количества пятимерных групп симметрии с инвариантной двумерной плоскостью и неподвижной точкой на ней, то есть пятимерных групп симметрии категории G_{520} в краткой записи, а также структуры каждой отдельной группы симметрии этой категории и посвящается настоящая статья. Следовательно, для решения поставленной задачи нам понадобится каталог двумерных точечных групп G_{20}^P кристаллографических P-симметрий при $P \simeq G_{30}$ и доказательство факта, что отмеченными группами G_{20}^P интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категории G_{520}.

2. Напомним некоторые необходимые для решения нашей задачи понятия и факты заморзаевской P-симметрии, подробно изложенной в [5,6]. Приписывая каждой точке фигуры F хотя бы один индекс $i = 1, 2, \dots, p$ и фиксируя некоторую группу P подстановок этих индексов, называем преобразованием P-симметрии индексированной фигуры F её изометрическое преобразование, переводящее каждую точку с индексом i в точку с индексом k_i так, чтобы подстановка $\varepsilon = \begin{matrix} 1\ 2 & \dots & p \\ k_1\ k_2 & \dots & k_p \end{matrix} \in P$. Такие преобразования g разлагаются на преобразования симметрии s рассматриваемой фигуры F и подстановки ε из группы P подстановок p качеств, наделенных точкам преобразуемой фигуры F. Преобразования P-симметрии $g = s \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot s$ составляют мультипликативную группу G, входящие в них преобразования симметрии s – её порождающую группу S, а подстановки индексов ε – группу P_1. При $P_1 = P$ называем G группой полной P-симметрии, при $e \subset P_1 \subset P$ – неполной P-симметрии, а при $P = e$ группа G = S.

Если G – группа полной P-симметрии, то $H = G \cap S$ – её подгруппа симметрии, а $Q = G \cap P$ – подгруппа подстановок индексов. Группу G называем старшей при Q = P (тогда H = S, а $G = S \times P$), младшей при $Q = e$ (тогда G изоморфна S, что соответствует символической записи $G \simeq S$) и Q-средней при $e \subset Q \subset P$.

Всякую группу G полной P-симметрии, как указано в основной теореме А.М. Заморзаева [5,6], можно вывести из её порождающей S путём разыскания в S и P таких нормальных делителей H и Q, для которых существует изоморфизм фактор-группы S/H на P/Q, попарным перемножением соответствующих по изоморфизму смежных классов и объединением полученных произведений. Совокупность всех групп P-симметрии с общей порождающей назовём порождённым ею семейством (ср. с [5,6]).

Вывод старших групп P-симметрии тривиален, так как они соответствуют случаю Q = P, поэтому фактор-группа S/H на P/Q возникает только в том случае, когда нормальный делитель H группы S совпадает с ней. А это означает, что старшая группа G P-симметрии является прямым произведением порождающей группы S и группы подстановок P, характеризующей рассматриваемую P-симметрию ($G = S \times P$).

Младшие группы данной P-симметрии выводятся из определенной порождающей группы S, согласно основной теореме, только в том случае, если S обладает таким нормальным делителем H, что $S/H \cong P$, ввиду того, что для этого типа групп P-симметрии $Q = e$. Практически младшие группы P-симметрии, где $P/Q \simeq P$, удобно выводить методом Шубникова-Заморзаева: поочередной заменой в системе образующих исходной группы S её преобразований симметрии соответствующими преобразованиями P-симметрии таким образом, чтобы полученная при этом новая группа G была изоморфна взятой группе S, а подстановки индексов, входящие в преобразования полученной группы G, составляли бы отмеченную группу P.

Изучение Q-средних групп P-симметрии, согласно той же основной теореме, связано с перебором нетривиальных нормальных делителей Q групп подстановок P, характеризующих рассматриваемые P-симметрии, а сам подсчет этих групп становится сразу возможным, если предварительно выявлены младшие группы P-симметрии, ибо, как показано в [14], число Q-средних групп P-симметрии в данном семействе равно числу младших групп P_o–симметрии с той же порождающей, если фактор-группа P/Q сильно изоморфна P_0($P/Q \cong P_o$).

Широта понятия P-симметрии и её многообразная применимость [5] вызвали к жизни различные принципы классификации P-симметрий [6], из которых нам понадобится так называемый геометрический способ, позволивший выявить 32 кристаллографические P-симметрии в случае, когда группа P подстановок качеств, приписываемых точкам преобразуемой фигуры F, последовательно изоморфна трёхмерным точечным группам G_{30}. Полученные при этом в [16,6] 32 P-симметрии были названы кристаллографическими и записаны в интернациональной символике осевых точечных групп симметрии и антисимметрии, интерпретирующих кристаллические классы G_{30}, если входящее в них антитождественное преобразование истолковать как инверсию.

3. Приведём каталог нужных нам для решения поставленной задачи двумерных точечных групп G_{20}^P кристаллографических P-симметрий при $P \simeq G_{30}$. Для этого обобщим 10 двумерных точечных групп G_{20} с отмеченными 32 кристаллографических P-симметриями, распределёнными в [14] по 22 классам изоморфности следующим образом: 1; 2, $\underline{1}$, $\underline{2}$; 3; 4, $\underline{4}$; 6, 3$\underline{1}$,$\underline{6}$; 2$\underline{1}$; 22; 2$\underline{2}$; 32, 3$\underline{2}$; 42, 4$\underline{2}$; $\underline{4}$2; 62, 6$\underline{2}$; 32$\underline{1}$, $\underline{6}$2; 4$\underline{1}$; 6$\underline{1}$; 22$\underline{1}$; 42$\underline{1}$; 62$\underline{1}$; 23; 43, $\underline{4}$3; 23$\underline{1}$; 43$\underline{1}$. Заметим при этом, что для облегчения подсчёта Q-средних групп P-симметрии любой категории и сведéния его, в основном, к предварительному выводу младших групп, в [14] введены понятия сильного изоморфизма групп и изоморфизма P-симметрий и обоснована связь между числами различных младших групп одних P-симметрий и различных Q-средних групп других P-симметрий. Именно число различных Q- средних групп P-симметрии в данном семействе равно числу младших групп P_o-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа P/Q сильно изоморфна P_o ($P/Q \cong P_o$). При этом в семействе групп изоморфных P-симметрий (т.е. P-симметрий, для которых группы подстановок индексов, задающих эти P-симметрии, сильно изоморфны) с общей порождающей совпадают не только числа различных младших групп, но и числа различных Q- средних групп [14]. Это позволяет существенно сократить числовой обзор исследуемых групп, так как для подсчёта групп G_r^P определённых P-симметрий нужно проводить подробное исследование не для всех P-симметрий, а только для одной из каждого класса изоморфности. Отсюда следует, что для подсчёта различных младших и Q-средних групп категории G_{20}^P всех 32 кристаллографических P-симметрий достаточно исследовать группы 2-, 3-, 4-, 6-, (2$\underline{1}$)-, (22)-, (2$\underline{2}$)-, (32)-,(42)-, ($\underline{4}$2)-, (62)-, ($\underline{6}$2)-, (4$\underline{1}$)-, (6$\underline{1}$)-, (22$\underline{1}$)-, (42$\underline{1}$)-, (62$\underline{1}$)-, (23)-, (43)-, (23$\underline{1}$)- и (43$\underline{1}$)-симметрии. При этом необходимо ещё изучить, как отмечено в [14], различные младшие группы гиперкристаллографической (22$\underline{1}$)-симметрии [17] для подсчёта 2-средних групп ($42\underline{1}$)-симметрии и 3-средних групп ($62\underline{1}$)-симметрии категории G_{20}^{P} кристаллографических P-симметрий.

Используя свойства сильного изоморфизма и изоморфизма P-симметрий из [14], а также распределение 32 кристаллографических P-симметрий по 22 классам изоморфности, в [18] получена универсальная формула для подсчёта новых групп, порождаемых любой категорией классических групп симметрии при их обобщении с отмеченными 32 P-симметриями.

Формула эта выглядит следующим образом: обобщая категорию r-мерных групп G_r, содержащую К групп симметрии с 32 P-симметриями при $P \simeq G_{30}$, различаем К порождающих + 31 К старших + ($3M_2 + M_3 + 2M_4 + 3M_6 + M_{22} + M_{2\underline{2}} + 2M_{32} + 2M_{42} + M_{\underline{4}2} + 2M_{62} + 2M_{\underline{6}2} + M_{2\underline{1}} + M_{4\underline{1}} + M_{6\underline{1}} + M_{22\underline{1}} + M_{42\underline{1}} + M_{62\underline{1}} + M_{23} + M_{231} + 2M_{43} + M_{43\underline{1}}$) младших групп (где индекс в символе M_p, обозначающий количество младших групп, указывает конкрентное наименование P-симметрии, с которой связано число M_p, а коэффициент перед символом M_p – количество P-симметрий в его классе изоморфности), а также $55M_2 + 6M_3 + 2M_4 + 4M_6 + M_{22} + 9M_{2\underline{2}} + 13M_{2\underline{1}} + 8M_{32} + 2M_{42} + 2M_{62} + 2M_{\underline{6}2} + M_{23} + M_{43} + 2M_{2\underline{2}1}$, Q-средних групп G_r^P (где символ M_p сохраняет прежний смысл, а числовые множители задают количество всевозможных фактор-групп P/Q, сильно изоморфных группам подстановок P, характеризующих отмеченные P-симметрии в символе M_p [11, 17, 18]). Полученным числом r-мерных групп G_r^P 32 гиперкристаллографических P-симметрий в геометрической классификации моделируются все различные группы симметрии категории $G_{(r+3)\ r}$, если среди порождающих, старших, младших и Q-средних групп категории G_r^P имеются только различные группы без учёта энантиоморфизма [6, 10, 11, 18].

4. Опираясь на всё сказанное выше в п.3, приступим к описанию полного подсчёта двумерных точечных групп G_{20}^{P} кристаллографических P-симметрий при $P \simeq G_{30}$. При обобщении кристаллографических групп G_{20} с 1-симметрией, задаваемой тождественным преобразованием e, получим эти же 10 классических групп G_{20}, которые, согласно теории P-симметрии [5-7], названы порождающими, так как в этом случае точкам преобразуемой плоскости приписывается один и тот же индекс и, следовательно, симметрия рассматриваемой фигуры сохраняется. Список этих групп, извлечённых из табл. 3 монографии [7], выглядит так: 1,2,3,4,6 – группы симметрии запятой, параллелограмма и ориентированных правильных p-угольников, а также m, $2 \cdot m$, $3 \cdot m$, $4 \cdot m$, $6 \cdot m$ – группы симметрии равнобедренного треугольника, прямоугольника и правильных p-угольников.

Далее, так как из каждой порождающей группы при обобщении её с любой нетривиальной P-симметрией выводится только одна старшая, разлагающаяся в прямое произведение рассматриваемой классической группы и группы подстановок P, задающей использованную P-симметрию, то таких групп при обобщении 10 двумерных точечных кристаллографических групп с 31 нетривиальной кристаллографической P-симметрией будет 310 (= 31 · 10). Список этих групп исчерпывается следующим рядом: $1 \times 1^{(2)}$, … , $(6 \cdot m) \times 1^{(2)}$; … ; $1 \times 1^{(43\underline{1})}$, … ,$(6 \cdot m) \times 1^{(43\underline{1})}$ – всего 310 групп.

При 2-, $\underline{1}$- и $\underline{2}$- симметриях группы G_{20} порождают по 11 младших $\underline{2}$; $\underline{m}$; $\underline{2} \cdot m$, $2 \cdot \underline{m}$; $\underline{4}$; $\underline{4} \cdot m$, $4 \cdot \underline{m}$; $3 \cdot \underline{m}$; $\underline{6}$; $\underline{6} \cdot m$, $6 \cdot \underline{m}$ [7, табл.3] и ни одной Q-средней. Всего при трёх P-симметриях рассматриваемого класса изоморфности группы G_{20} порождают 11×3 = 33 новых младших группы.

При 3-симметрии группы G_{20} порождают 2 младших $3^{(3)}$ и $6^{(3)}$ (ибо для двумерных точечных групп младшие $3^{(3)}$ и $3^{(-3)}$, а также $6^{(3)}$ и $6^{(-3)}$ мы не различаем) и ни одной средней.

При 4-симметрии группы G_{20} порождают одну младшую группу $4^{(4)}$, а также 11 две-средних, ввиду того, что фактор-группа $4/2 \simeq 2$. Следовательно, таких групп при обобщении G_{20} с 4-симметрией будет столько, согласно утверждению настоящего раздела, сколько младших групп порождает категория G_{20} при её обобщении с 2-симметрией, то есть 11. Список этих групп таков: $2^{(4)}$; $m^{(4)}$; $2^{(4)} \cdot m$; $2 \cdot m^{(4)}$; $4^{(4)} \times 1^{(2)}$; $4^{(4)} \cdot m$, $4 \cdot m^{(4)}$; $3 \cdot m^{(4)}$; $6^{(4)}$; $6^{(4)} \cdot m$, $6 \cdot m^{(4)}$. Всего группы G_{20} при их обобщении с 4-симметрией порождают 12 новых групп, из которых одна младшая и 11 две-средних.

При двух P-симметриях 4- и $\underline{4}$- группы G_{20} будут порождать таких новых групп в 2 раза больше, то есть 12×2 = 24, из которых 2 младших и 22 две-средних.

При 6-симметрии группы G_{20} порождают младшие, а также 2- и 3-средних, ввиду того, что группа 6, задающая 6-симметрию, имеет два нетривиальных нормальных делителя 2 и 3, в прямое произведение которых она и разлагается (именно 6 = 2×3). Список младших G_{20}^{6} содержит одну группу $6^{(6)}$, ибо группа $6^{(-6)}$ не учитывается.

Что касается 2-средних групп категории G_{20}^{6}, то их будет столько, согласно утверждению настоящего раздела, сколько точечные группы G_{20} порождают младших при их обобщении с 3-симметрией, именно 2, ввиду того, что фактор-группа $6/2 \simeq 3$. Чтобы выписать эти группы, нужно каждую младшую группу G_{20}^{3} при 3-симметрии умножить на группу 2-тождественного преобразования $1^{(2)}$. Поэтому список 2-средних точечных групп G_{20}^{6} выглядит следующим образом: $3^{(3)}\times 1^{(2)}=3^{(6)}$, $6^{(3)}\times 1^{(2)}$. В свою очередь, чтобы выписать 3-средних группы категории G_{20}^{6} по аналогичной причине, нужно, согласно утверждению настоящего раздела, каждую из 11 младших групп, которые порождают точечные группы G_{20} при их обобщении с 2-симметрией, умножить на группу $1^{(3)}$ 3-тождественного преобразования, ввиду того, что фактор-группа $6/3 \simeq 2$. Следовательно, список 3-средних групп категории G_{30}^{6} выглядит так: $2^{(2)}\times 1^{(3)}$; $m^{(2)}\times 1^{(3)}$; $(2^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$, $(2\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $4^{(2)}\times 1^{(3)}$; $(4^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$, $(4\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $(3\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$; $6^{(2)}\times 1^{(3)}$; $(6^{(2)}\cdot m)\times 1^{(3)}$, $(6\cdot m^{(2)})\times 1^{(3)}$ - и того 11 групп.

Из всего сказанного выше следует, что при 6-симметрии группы G_{20} порождают 14 новых групп , из которых 1 младшая и 13 Q-средних, а при трёх P-симметриях 6-, $(3\underline{1})$- и $\underline{6}$-рассматриваемого класса изоморфности, новых групп будет в 3 раза больше, т.е. 14×3 = 42, из которых 3 младших и 39 Q-средних.

При $(2\underline{1})$-симметрии категория G_{20} порождает 9 младших групп, список которых следующий: $2^{(2}\cdot \underline{m}$, $\underline{2}\cdot m^{(2}$, $\underline{2}^{(2}\cdot\underline{m}$; $4^{(2}\cdot\underline{m}$, $\underline{4}\cdot m^{(2}$, $\underline{4}^{(2}\cdot\underline{m}$; $6^{(2}\cdot\underline{m}$, $\underline{6}\cdot m^{(2}$, $\underline{6}^{(2}\cdot\underline{m}$. Ввиду того, что группа, задающая $(2\underline{1})$-симметрию имеет 3 нетривиальных нормальных делителя $\underline{1}$,2 и $\underline{2}$, то кроме выписанных младших группы G_{20} будут порождать $\underline{1}$-, 2- и $\underline{2}$-средних. Причём, категория G_{20} будет порождать по 11 $\underline{1}$- и $\underline{2}$- средних групп, ввиду того, что фактор-группа $(2\underline{1})/\underline{1} = (2\underline{1})/\underline{2} \simeq 2$.Следовательно, список $\underline{1}$-средних двумерных точечных групп будет выглядеть так: $2^{(2}\times\underline{1}$; $m^{(2}\times\underline{1}$; $(2^{(2}\cdot m)\times\underline{1}$, $(2\cdot m^{(2})\times\underline{1}$; $(3\cdot m^{(2})\times\underline{1}$; $4^{(2}\times\underline{1}$; $(4^{(2}\cdot m)\times\underline{1}$, $(4\cdot m^{(2})\times\underline{1}$; $6^{(2}\times\underline{1}$; $(6^{(2}\cdot m)\times\underline{1}$, $(6\cdot m^{(2})\times\underline{1}$, а перечень $\underline{2}$-средних аналогичных групп представляется следующим образом: $2^{(2}\times\underline{1}^{(2}$, $m^{(2}\times\underline{1}^{(2}$; $(2^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(2}$, $(2\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(2}$; $(3\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(2}$; $4^{(2}\times\underline{1}^{(2}$; $(4\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(2}$,$(4^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(2}$; $6^{(2}\times\underline{1}^{(2}$; $(6^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(2}$, $(6\cdot m^{2})\times\underline{1}^{(2}$. Наконец, 2-средних двумерных точечных групп будет также 11, поскольку фактор-группа $2\,\underline{1}/2 \simeq \underline{1}$. Список этих групп следующий: $\underline{2}\times 1^{(2}$; $\underline{m}\times 1^{(2}$, $(\underline{2}\cdot m)\times 1^{(2}$; $(2\cdot\underline{m})\times 1^{(2}$; $(3\cdot\underline{m})\times 1^{(2}$; $\underline{4}\times 1^{(2}$; $(\underline{4}\cdot m)\times 1^{(2}$, $(4\cdot\underline{m})\times 1^{(2}$; $\underline{6}\times 1^{(2}$; $(\underline{6}\cdot m)\times 1^{(2}$, $(6\cdot\underline{m})\times 1^{(2}$. В итоге имеем, что группы G_{20} при $(2\underline{1})$-симметрии порождают 42 новых групп, из которых 9 младших и 33 Q-средних.

При (22)-симметрии группы G_{20} порождают 3 младших группы $2^{(2}\cdot m^{2)}$; $4^{(2}\cdot m^{2)}$ и $6^{(2}\cdot m^{2)}$, а также 11 две-средних $2^{(2}\cdot 1^{2)}$; $m^{(2}\cdot 1^{2)}$; $(2^{(2}\cdot m)\cdot 1^{2)}$, $(2\cdot m^{(2})\cdot 1^{2)}$; $4^{(2}\cdot 1^{2)}$; $(4^{(2}\cdot m)\cdot 1^{2)}$, $(4\cdot m^{(2})\cdot 1^{2)}$; $(3\cdot m^{(2)})\cdot 1^{2)}$; $6^{(2}\cdot 1^{2)}$; $(6^{(2}\cdot m)\cdot 1^{2)}$, $(6\cdot m^{(2)})\cdot 1^{2)}$.

Таким образом двумерные точечные группы G_{20} при их обобщении с (22)-симметрией порождают 14 новых групп, из которых 3 младших и 11 две-средних.

При $(2\underline{2})$-симметрии используемые нами классические группы G_{20} порождают 6 младших групп $2^{(2}\cdot\underline{m}^{2)}$, $\underline{2}^{2)}\cdot m^{(2}$; $4^{(2}\cdot\underline{m}^{2)}$, $\underline{4}^{2)}\cdot m^{(2}$, $6^{(2}\cdot\underline{m}^{2)}$, $\underline{6}^{(2}\cdot m^{2)}$. Но так как группа, задающая $(2\underline{2})$-симметрию, имеет два нетривиальных нормальных делителя 2 и $\underline{2}$, то группы G_{20} при $(2\underline{2})$-симметрии, кроме выписанных 6 младших, будет порождать 2- и $\underline{2}$-средних. Ввиду того, что фактор-группа $(2\underline{2})/2 \simeq \underline{2}$, то 2-средних точечных групп при $(2\underline{2})$-симметрии будет столько, согласно утверждению настоящего пункта, сколько младших групп порождают двумерные точечные группы при $\underline{2}$-симметрии, т.е. 11. Чтобы выписать 2-средние двумерные точечные группы при $(2\underline{2})$-симметрии нужно каждую младшую группу этой категории при $\underline{2}$-симметрии умножить на группу 2-тождественных преобразований $1^{(2}$. Следовательно, список 2-средних двумерных точечных групп при $(2\underline{2})$-симметрии, выглядит следующим образом: $\underline{2}^{2)}\cdot 1^{(2}$; $\underline{m}^{2)}\cdot 1^{(2}$; $(\underline{2}^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(2}$, $(2\cdot\underline{m}^{2)})\cdot 1^{(2}$, $\underline{4}^{2)}\cdot 1^{(2}$; $(\underline{4}^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(2}$, $(4\cdot\underline{m}^{2)})\cdot 1^{(2}$; $(3\cdot\underline{m}^{2)})\cdot 1^{(2}$; $\underline{6}^{2)}\cdot 1^{(2}$; $(\underline{6}^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(2}$, $(6\cdot\underline{m}^{2)})\cdot 1^{(2}$.

Аналогичным образом, так как фактор-группа $(2\underline{2})/\underline{2} \simeq 2$, то $\underline{2}$-средних двумерных точечных групп при $(2\underline{2})$-симметрии будет также 11, ибо младших групп при обобщении групп G_{20} с 2-симметрией столько же. Если каждую младшую группу категории G_{20}^{2} умножить на группу $\underline{1}^{2)}$, то получим список нужных нам $\underline{2}$-средних групп при $(2\underline{2})$-симметрии в следующем виде: $2^{(2}\cdot\underline{1}^{2)}$; $m^{(2}\cdot\ \underline{1}^{2)}$; $(2^{(2}\cdot\ m)\cdot\underline{1}^{2)}$, $(2\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$; $4^{2)}\cdot\underline{1}^{2)}$;$(4^{2)}\cdot m)\cdot\underline{1}^{2)}$, $(4\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$; $(3\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$; $6^{(2}\cdot\underline{1}^{2)}$; $(6^{(2}\cdot m)\cdot\underline{1}^{2)}$, $(6\cdot m^{(2)})\ \underline{1}^{2)}$.

Следовательно, группы G_{20} при $(2\underline{2})$- симметрии порождают 28 новых групп, из которых 6 младших и 22 Q-средних.

При (32)-симметрии группы G_{20} порождают 2 младших группы $3^{(3}\cdot m^{2)}$ и $6^{(3}\cdot m^{2)}$, а также 11 3-средних групп, ввиду того, что фактор-группа $(32)/3\simeq 2$ [14]. Чтобы выписать упомянутые 3-средних точечных группы при (32)-симметрии, нужно каждую младшую двумерную точечную группу при 2-симметрии умножить на группу 3-тождественного преобразования $1^{(3}$ и список 3-средних двумерных точечных групп представится в следующем виде: $2^{2)}\cdot 1^{(3}$; $m^{2)}\cdot 1^{(3}$; $(2^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(3}$, $(2\cdot m^{2)})\cdot 1^{(3}$; $(3\cdot m^{2)})\cdot 1^{(3}$; $4^{2)}\cdot 1^{(3}$; $(4^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(3}$, $(4\cdot m^{2)})\cdot 1^{(3}$; $6^{2)}\cdot 1^{(3}$; $(6^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(3}$, $(6\cdot m^{2)})\cdot 1^{(3}$. Всего группы G_{20} при их обобщении с (32)- симметрией порождают 13 новых групп, из которых 2 младших и 11 две-средних. При двух Р-симметриях (32)- и $(3\underline{2})$- рассматриваемого класса изоморфности группы G_{20} таких новых групп будут порождать в два раза больше, т.е. $13\times 2 = 26$, из которых 4 младших и 22 Q-средних.

При (42)-симметрии классические группы G_{20} порождают одну младшую группу $4^{(4}\cdot m^{2)}$, а также 2- , 4- и (22)-средних, ввиду того, что группа, задающая (42)-симметрию, имеет три нетривиальных нормальных делителя 2, 4 и 22.

Перечень 2-средних двумерных точечных групп (42)-симметрии содержит 3 группы, ввиду того, что фактор-группа $(42)/2\simeq 22$, и выглядит следующим образом: $2^{(4}\cdot m^{2)}$; $(4^{(4}\cdot m^{2)})\cdot 1^{2)}$, $6^{(4}\cdot m^{2)}$. В свою очередь 4-средних двумерных точечных групп при (42)- симметрии будет 11, вследствие того, что фактор-группа $(42)/4\simeq 2)$. Следовательно, чтобы выписать эти 11 4-средних группы при (42)-симметрии, нужно каждую младшую двумерную точечную группу при 2-симметрии умножить на группу 4-тождественных преобразований $1^{(4}$, откуда следует, что список нужных нам 11 групп представится в следующем виде: $2^{2)}\cdot 1^{(4}$; $m^{2)}\cdot 1^{(4}$; $(2^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(4}$, $(2\cdot m^{2)})\cdot 1^{(4}$; $4^{2)}\cdot 1^{(4}$; $(4^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(4}$, $(4\cdot m^{2)})\cdot 1^{(4}$; $(3\cdot m^{2)})\cdot 1^{(4}$; $6^{2)}\cdot 1^{(4}$; $(6^{2)}\cdot m)\cdot 1^{(4}$, $(6\cdot m^{2)})\cdot 1^{(4}$.

Список оставшихся (22)-средних двумерных точечных групп при (42)-симметрии содержит 11 групп, ибо фактор-группа $(42)/22)\simeq (2$ и выглядит так: $2^{(4}\cdot 1^{2)}$; $m^{(4}\cdot 1^{2)}$; $(2^{(4}\cdot m)\cdot 1^{2)}$,$(2\cdot m^{(4)})\cdot 1^{2)}$; $3\cdot m^{(4}\cdot 1^{2)}$, $4^{(4}\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(4^{(4}\cdot m)\cdot 1^{2)}$, $(4\cdot m^{(4)})\cdot 1^{2)}$; $(6^{(4}\cdot 1^{2)}$, $6^{(4}\cdot m)\cdot 1^{2)}$, $(6\cdot m^{(4)})\cdot 1^{2)}$.

В итоге имеем, что группы G_{20} при (42)-симметрии порождают 29 новых групп, из которых 1 младшая и 28 Q-средних, а при двух Р-симметриях (42)- и $(4\underline{2})$- рассматриваемого класса изоморфности таких новых групп будет в 2 раза больше, т.е. $29\cdot 2 = 58$, из которых 2 младших и 56 Q-средних.

При $(\underline{4}2)$-симметрии группы G_{20} порождают 1 младшую группу $\underline{4}^{(2}\cdot m^{2)}$, а также $\underline{4}$-, (22)-, $(2\underline{2})$- и 2-средних, ввиду того, что группа $\underline{4}2$, задающая $(\underline{4}2)$-симметрию, имеет 4 нетривиальных нормальных делителя Q, указывающих наименование отмеченных типов Q-средних двумерных точечных групп при $(\underline{4}2)$-симметрии.

Ввиду того, что фактор-группа $(\underline{4}2)/\underline{4}\simeq 2)$, то $\underline{4}$-средних двумерных точечных групп $(\underline{4}2)$-симметрии будет столько, согласно утверждению настоящего пункта, сколько младших групп порождают рассматриваемые нами классические группы G_{20}, при их обобщении с 2-симметрией, то есть 11. Чтобы выписать эти группы, нужно каждую младшую двумерную точечную группу при 2-симметрии умножить на группу $\underline{4}$- тождественных преобразований $\underline{1}^{(4}$. Следовательно перечень $\underline{4}$-средних двумерных точечных групп при $(\underline{4}2)$-симметрии выглядит следующим образом: $2^{2)}\cdot\underline{1}^{(4}$; $m^{2)}\cdot\underline{1}^{(4}$; $(2^{2)}\cdot m)\cdot\underline{1}^{(4}$, $(2\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(4}$; $(3\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(4}$; $4^{2)}\cdot\underline{1}^{(4}$; $(4^{2)}\cdot m)\cdot\underline{1}^{(4}$, $(4\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(4}$; $6^{2)}\cdot\underline{1}^{(4}$; $(6^{2)}\cdot m)\cdot\underline{1}^{(4}$, $(6\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(4}$.

Далее, так как фактор-группа $(\underline{4}2)/(22)\simeq\underline{2}$, то (22)-средних двумерных точечных групп при $(\underline{4}2)$-симметрии будет столько, сколько младших групп порождают группы G_{20} при их обобщении с $\underline{2}$-симметрией. Отсюда следует, что список (22)-средних двумерных точечных групп при $(\underline{4}2)$-симметрии исчерпывается группами $\underline{2}^{(4}\cdot 1^{2)}$; $\underline{m}^{(4}\cdot 1^{2)}$; $(\underline{2}^{(4}\cdot m)\cdot 1^{2)}$, $(2\cdot\underline{m}^{(4)})\cdot 1^{2)}$; $(3\cdot\underline{m}^{(4)})\cdot 1^{2)}$; $\underline{4}^{(4}\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(\underline{4}^{(4}\cdot m)\cdot 1^{2)}$, $(4\cdot\underline{m}^{(4}\ )\cdot 1^{2)}$; $\underline{6}^{(4}\cdot 1^{2)}$; $(\underline{6}^{(4}\cdot m)\cdot 1^{2)}$, $(6\cdot\underline{m}^{(4)})\cdot 1^{2)}$. В свою очередь, так как фактор-группа $(\underline{4}2)/(22)\simeq\underline{2}$, то $(2\underline{2})$- средних двумерных точечных групп при $(\underline{4}2)$-симметрии, согласно [14], будет 11, и их перечень выглядит следующим образом: $\underline{2}^{(4}\cdot\underline{1}^{2)}$; $\underline{m}^{(4}\cdot\underline{1}^{2)}$; $(\underline{2}^{(4}\cdot m)\cdot\underline{1}^{2)}$, $(2\cdot\underline{m}^{(4)})\cdot\underline{1}^{2)}$; $(3\cdot\underline{m}^{(4)})\cdot\underline{1}^{2)}$; $\underline{4}^{(4}$.

$(1^{(2} \cdot \underline{1}^{2)})$; $(\underline{4}^{(4} \cdot m) \cdot \underline{1}^{2)}$, $(4 \cdot \underline{m}^{(4}) \cdot \underline{1}^{2)}$; $\underline{6}^{(4} \cdot \underline{1}^{2)}$; $(\underline{6}^{(4} \cdot m) \cdot \underline{1}^{2)}$, $(6 \cdot \underline{m}^{(4}) \cdot \underline{1}^{2)}$. Наконец, в связи с тем, что фактор-группа $(\underline{4}2)/2 \simeq 2\underline{1}$, то 2-средних двумерных точечных групп при ($\underline{4}$2)-симметрии будет столько, согласно [14], столько младших групп порождают взятые нами двумерные точечные группы G_{20} при их обобщении с (2$\underline{1}$)-симметрией, копирующей антисимметрию двух различных родов по А.М. Заморзаеву, то есть 9 [7, табл. III_8]. Следовательно, список 2–средних двумерных точечных групп при ($\underline{4}$2)-симметрии исчерпывается рядом: $\underline{2}^{(4} \cdot m^{2)}$, $2^{2)} \cdot \underline{m}^{(4}$, $\underline{2}^{2)} \cdot \underline{m}^{(4}$; $(\underline{4}^{(4} \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(2}$, $4^{2)} \cdot \underline{m}^{(4}$, $\underline{4}^{2)} \cdot \underline{m}^{(4}$; $\underline{6}^{(4} \cdot m^{2)}$, $6^{2)} \cdot \underline{m}^{(4}$, $\underline{6}^{2)} \cdot \underline{m}^{(4}$ – всего 9 групп.

Всего классические группы G_{20} при (42)-симметрии порождают 43 новых группы, из которых 1 младшая и 42 Q-средних.

При (62)-симметрии используемые нами группы G_{20} порождают 1 младшую $6^{(6} \cdot m^{2)}$, а также 2- , 3-, 6- и (32)-средних группы, ввиду того, что группа 62, задающая (62)-симметрию, обладает 4 нетривиальными нормальными делителями, исчерпывающимися наименованиями её различных Q-средних групп.

Вследствие того, что фактор-группа $(62)/2 \simeq 32$, то 2-средних двумерных точечных групп при (62)-симметрии, согласно [14], будет столько, сколько порождают группы G_{20} при их обобщении с (32)-симметрией, т.е. 2 : $(3^{(3} \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(2}$ и $(6^{(3} \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(2}$. Аналогичным образом, ввиду того, что фактор-группа $(62)/3 \simeq 22$, то 3-средних двумерных точечных групп при (62)-симметрии будет 3, ибо классические группы G_{20} при (22)-симметрии порождают столько же младших групп. Следовательно, если каждую младшую группу (22)-симметрии категории G_{20}^{P} умножить на группу 3-тождественного преобразования $1^{(3}$, то получим перечень 3-средних двумерных точечных групп при (62)-симметрии в следующем виде: $(2^{(2} \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(3}$; $(4^{(2} \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(3}$ и $(6^{(2} \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(3}$.

В свою очередь, так как фактор-группа ($(62)/6 \simeq 2$), то 6-средних двумерных точечных групп при (62)-симметрии будет 11, вследствие того, что столько младших групп порождает категория G_{20} при 2-симметрии. Умножив каждую младшую двумерную точечную группу при 2-симметрии на группу 6–тождественного преобразования $1^{(6}$, получим перечень нужных нам 6-средних групп в следующем виде: $2^{2)} \cdot 1^{(6}$; $m^{2)} \cdot 1^{(6}$; $(2^{2)} \cdot m) \cdot 1^{(6}$; $(2 \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(6}$; $(3 \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(6}$; $4^{2)} \cdot 1^{(6}$; $(4^{2)} \cdot m) \cdot 1^{(6}$, $(4 \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(6}$; $6^{2)} \cdot 1^{(6}$; $(6^{2)} \cdot m) \cdot 1^{(6}$; $(6 \cdot m^{2)}) \cdot 1^{(6}$ – всего 11 групп.

Наконец, вследствие того, что фактор-группа $(62)/32 \simeq 2$, то (32)-средних двумерных точечных групп при (62)-симметрии будет, согласно [14], столько же. Если каждую младшую двумерную точечную группу при 2-симметрии умножить на группу $1^{(32)} = 1^{(3} \cdot 1^{2)}$, то получим список нужных нам (32)-средних двумерных точечных групп при (62)- симметрии в следующем виде: $2^{(2} \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$; $m^{(2} \cdot (1^{3} \cdot 1^{2)})$; $(2^{2} \cdot m) \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$, $(2 \cdot m^{2}) \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$; $(3 \cdot m^{2}) \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$; $4^{(2} \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$; $(4^{(2} \cdot m) \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$, $(4 \cdot m^{(2)}) \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$; $6^{(2} \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$; $(6^{(2} \cdot m) \cdot 1^{(3} \cdot 1^{2)})$, $(6 \cdot m^{(2)}) \cdot (1^{(3} \cdot 1^{2)})$ – всего 11 групп.

Таким образом, при обобщении групп G_{20} с (62)-симметрией получаем 31 новую группу, из которых 1 младшая и 30 Q-средних, а при двух P-симметриях (62) и (6$\underline{2}$) рассматриваемого класса изоморфности таких новых групп будет в 2 раза больше, именно $31 \cdot 2 = 62$, из которых 2 младших и 60 Q-средних.

При ($\underline{6}$2)-симметрии постоянно используемая нами категория G_{20} порождает 1 младшую группу $\underline{6}^{(6} \cdot m^{2)}$, а также $\underline{2}$-, 3-, $\underline{6}$-, 32- и (3$\underline{2}$)-средних, ибо группа, задающая ($\underline{6}$2)-симметрию, имеет 5 различных нетривиальных нормальных делителей, соответствующих наименованиям Q-средних групп взятой P-симметрии.

Ввиду того, что фактор-группа $(\underline{6}2)/\underline{2} \simeq 32$, то $\underline{2}$-средних двумерных точечных групп при ($\underline{6}$2)-симметрии, согласно [14], будет 2, ибо группы G_{20} порождают 2 младших группы при (32)-симметрии. Умножив затем каждую отмеченную младшую группу (32)-симметрии на группу $\underline{1}^{(2}$, получим перечень $\underline{2}$-средние двумерных точечных групп при ($\underline{6}$2)-симметрии в виде: $(3^{(3} \cdot m^{2)}) \cdot \underline{1}^{(2}$, $(6^{(3} \cdot m^{2)}) \cdot \underline{1}^{(2}$.

Далее, ввиду того, что фактор-группа $(\underline{6}2)/3 \simeq 2\underline{1}$, то 3-средних двумерных точечных групп при исследуемой ($\underline{6}$2)-симметрии будет 9, ввиду того, что при обобщении групп G_{20} с (2$\underline{1}$)-симметрией различается 9 младших групп. Необходимые нам 3-средние двумерные точечные группы при ($\underline{6}$2)-симметрии выглядят следующим образом: $(2^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(3}$, $(\underline{2}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(3}$, $(\underline{2}^{(2}\cdot m^{2)})\cdot 1^{(3}$; $(4^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(3}$, $(\underline{4}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(3}$, $(\underline{4}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(3}$; $(6^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(3}$, $(\underline{6}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(3}$, $(\underline{6}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(3}$. Что касается $\underline{6}$-средних групп при $(\underline{6}2)$-симметрии, то их будет 11, ибо фактор-группа $(\underline{6}2)/\underline{6}\simeq 2)$, а сам список таких групп выглядит так: $2^{2)}\cdot\underline{1}^{(6}$; $m^{2)}\cdot\underline{1}^{(6}$; $(2^{2}\cdot m)\cdot\underline{1}^{(6}$, $(2\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(6}$; $(3\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(6}$; $4^{2)}\cdot\underline{1}^{(6}$; $(4^{2)}\cdot m)\cdot\underline{1}^{(6}$; $(4\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(6}$; $6^{2)}\cdot\underline{1}^{(6}$; $(6^{2)}\cdot m)\cdot\underline{1}^{(6}$, $(6\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(6}$. В свою очередь, поскольку фактор-группа $(\underline{6}2)/(32)\simeq(\underline{2}$, то (32)-средних двумерных точечных групп будет 11, ибо столько младших групп порождают классические G_{20} при $(\underline{2}$-симметрии. Умножив теперь каждую младшую группу $G_{20}^{\underline{2}}$ на группу $1^{(32)}=1^{(3}\cdot 1^{2)}$,получим перечень (32)-средних групп при $(\underline{6}2)$-симметрии в следующем виде: $\underline{2}^{(2}\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $\underline{m}^{(2}\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $(\underline{2}^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$, $(2\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $(3\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $\underline{4}^{(2}\cdot(1^{3}\cdot 1^{2)})$; $(\underline{4}^{(2}\cdot m)\cdot(1^{3}\cdot 1^{2)})$, $(4\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $\underline{6}^{(2}\cdot(1^{3}\cdot 1^{2)})$; $(\underline{6}^{(2}\cdot m)\cdot 1^{(3}\cdot 1^{2)})$, $(6\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$. Наконец, в связи с тем, что фактор-группа $(\underline{6}2)/(3\underline{2})\simeq(\underline{2}$, то список $(3\underline{2})$-средних групп G_{20} , очевидно, представится в виде: $\underline{2}^{(2}\cdot(1^{3}\cdot\underline{1}^{2)})$; $\underline{m}^{(2}\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(\underline{2}^{(2}\cdot m)(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(2\cdot\underline{m}^{(2)})(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(3\cdot\underline{m}^{(2)})(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$; $\underline{4}^{(2}\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(\underline{4}^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(4\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$; $\underline{6}^{(2}\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(\underline{6}^{(2}\cdot m)(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(6\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$ – всего 11 групп.

Таким образом, при обобщении двумерных кристаллографических групп G_{20} с $(\underline{6}2)$- симметрией выводится 45 новых групп, из которых 1 младшая и 44 Q-средних, а при двух P-симметриях $(\underline{6}2)$- и $(32\underline{1})$- использованного класса изоморфности таких групп будет в 2 раза больше, именно $45\cdot 2=90$, из которых 2 младших и 88 Q-средних.

При $(4\underline{1})$-симметрии группы G_{20} не порождают младших, ибо среди них нет такой группы S, которая обладала бы таким нормальным делителем H, чтобы фактор-группа $S/H\simeq 4\underline{1}$. Но так как группа, задающая $(4\underline{1})$-симметрию, обладает 6 нетривиальными нормальными делителями, характеризуемые группами $\underline{1}$, $\underline{2}$, 2, 4, $\underline{4}$ и $(2\underline{1})$, то используемые нами классические группы G_{20} при их обобщении с (41)-симметрией будут порождать Q-средние группы, характеризуемые перечисленными нормальными делителями рассматриваемой P-симметрии.

В связи с тем, что фактор-группа $(4\underline{1})/\underline{1}=(4\underline{1})/\underline{2}\simeq 4$, то $\underline{1}$- и $\underline{2}$-средних групп категория G_{20} будет прождать по одной $4^{(4}\times\underline{1}$ и $4^{(4}\times\underline{1}^{(2}$, поскольку эти точечные группы порождают по одной младшей группе при $\underline{1}$ и $\underline{2}$-симметрии. По аналогичной причине, вследствие того, что $(4\underline{1})/2\simeq 2\underline{1}$, то группы G_{20} при их обобщении с $(4\underline{1})$-симметрией будут порождать 9 две-средних групп, ибо столько младших групп порождают взятые нами классические группы при их обобщении с $(2\underline{1})$-симметрией. Следовательно, список 2-средних точечных групп при $(4\underline{1})$-симметрии будет таким: $2^{(4}\cdot\underline{m}$, $\underline{2}\cdot m^{(4}$, $\underline{2}^{(4}\cdot\underline{m}$; $4^{(4}\cdot\underline{m}$, $\underline{4}\cdot m^{(4}$, $\underline{4}^{(4}\cdot\underline{m}$; $6^{(4}\cdot\underline{m}$, $\underline{6}\cdot m^{(4}$, $\underline{6}^{(4}\cdot\underline{m}$. Далее, поскольку фактор-группа $(4\underline{1})/4\simeq\underline{1}$, то группы G_{20} при их обобщении с $(4\underline{1})$-симметрией будут порождать 11 четыре-средних группы, ввиду того, что эти группы порождают столько младших групп при их обобщении с $\underline{1}$-симметрией. Следовательно, список 4-средних двумерных точечных групп при $(4\underline{1})$-симметрии будет выглядеть следующим образом: $\underline{2}\times 1^{(4}$; $\underline{m}\times 1^{(4}$; $(\underline{2}\cdot m)\times 1^{(4}$; $(2\cdot\underline{m})\times 1^{(4}$; $(3\cdot\underline{m})\times 1^{(4}$; $\underline{4}\times 1^{(4}$, $(\underline{4}\cdot m)\times 1^{(4}$; $(4\cdot\underline{m})\times 1^{(4}$; $\underline{6}\times 1^{(4}$; $(\underline{6}\cdot m)\times 1^{(4}$, $(6\cdot\underline{m})\times 1^{(4}$ – всего 11 групп.

Наконец, в связи с тем, что фактор–группа $(4\underline{1})/\underline{4}=(4\underline{1})/(2\underline{1})\simeq 2$, то по аналогичной причине $\underline{4}$- и $(2\underline{1})$-средних двумерных точечных групп при $(4\underline{1})$-симметрии будет по 11. Отсюда следует, что список $\underline{4}$–средних групп будет таким: $2^{(2}\times\underline{1}^{(4}$; $m^{(2}\times\underline{1}^{(4}$; $(2^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(4}$, $(2\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(4}$; $(3\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(4}$; $4^{(2}\times\underline{1}^{(4}$; $(4^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(4}$, $(4\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(4}$; $6^{(2}\times\underline{1}^{(4}$; $(6^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(4}$, $(6\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(4}$, а список аналогичных $(2\underline{1})$-средних групп представится следующим образом: $2^{(4}\times\underline{1}$; $m^{(4}\times\underline{1}$; $(2^{(4}\cdot m)\times\underline{1}$, $(2\cdot m^{(4)})\times\underline{1}$; $(3\cdot m^{(4)})\times\underline{1}$; $4^{(4}\times(1^{2}\cdot\underline{1})$; $(4^{(4}\cdot m)\times\underline{1}$, $(4\cdot m^{(4)})\times\underline{1}$; $6^{(4}\times\underline{1}$; $(6^{(4}\cdot m)\times\underline{1}$, $(6\cdot m^{(4)})\times\underline{1}$ – всего 11 групп.

В итоге имеем, что используемая нами категория G_{20} порождает при $(4\underline{1})$-симметрии всего 44 новых Q-средних группы, из которых 2 младших и 42 Q-средних при отмеченных значениях Q.

При $(6\underline{1})$-симметрии двумерные группы G_{20} порождают только Q-средние группы, где Q = 1, 2, $\underline{2}$, 3, $2\underline{1}$, 6, $\underline{6}$ и $3\underline{1}$. Поскольку фактор-группы $(6\underline{1})/\underline{1}=(6\underline{1})/\underline{2}\simeq 6$, то $\underline{1}$- и $\underline{2}$-средних двумерных точечных групп при $(6\underline{1})$-симметрии, согласно [14], будет по одной, запись которых такова: $6^{(6}\times\underline{1}$, $6^{(6}\times\underline{1}^{(2}$. Аналогичным образом, так как фактор-группа $(6\underline{1})/2\simeq 3\underline{1}$, то категория G_{20}, согласно [14], также будет порождать 1 две-среднюю группу при $(6\underline{1})$- симметрии, запись которой выглядит следующим образом: $\underline{6}^{(3}\times 1^{(2}$. Далее, ввиду того, что $(6\underline{1})/3 \simeq 2\underline{1}$, то используемые нами группы, согласно [14], будут порождать 9 три-средних группы, запись которых такова: $(2^{(2}\cdot\underline{m})\times 1^{(3}$, $(\underline{2}\cdot m^{(2)})\times 1^{(3}$, $(\underline{2}^{(2}\cdot\underline{m})\times 1^{(3}$; $(4^{(2}\cdot\underline{m})\times 1^{(3}$, $(\underline{4}\cdot m^{(2)})\times 1^{(3}$, $(\underline{4}^{(2}\cdot\underline{m})\times 1^{(3}$; $(6^{(2}\cdot\underline{m})\times 1^{(3}$, $(\underline{6}\cdot m^{(2)})\times 1^{(3}$, $(\underline{6}^{(2}\cdot\underline{m})\times 1^{(3}$. В свою очередь, вследствие того, что фактор-группа $(6\underline{1})/(2\underline{1}) \simeq 3$, то группы G_{20} будут порождать, согласно [14], при $(6\underline{1})$-симметрии 2 три-средних группы в следующей записи : $3^{(3}\times(2\times\underline{1})$, $6^{(3}\times(2\times\underline{1})$. Наконец, так как фактор-группа $(6\underline{1})/6 \simeq \underline{1}$, а $(6\underline{1})/\underline{6}=(6\underline{1})/(3\underline{1})\simeq 2$, то категория G_{20} при $(6\underline{1})$-симметрии будет порождать по одиннадцать 6-, $\underline{6}$- и $(3\underline{1})$-средних групп, запись которых последовательно такая: $\underline{2}\times 1^{(6}$; $\underline{m}\times 1^{(6}$, $(\underline{2}\cdot m)\times 1^{(6}$, $(2\cdot\underline{m})\times 1^{(6}$; $(3\cdot\underline{m})\times 1^{(6}$; $\underline{4}\times 1^{(6}$; $(\underline{4}\cdot m)\times 1^{(6}$, $(4\cdot\underline{m})\times 1^{(6}$; $\underline{6}\times 1^{(6}$; $(\underline{6}\cdot m)\times 1^{(6}$, $(6\cdot\underline{m})\times 1^{(6}$; $2^{(2}\times\underline{1}^{(6}$; $m^{(2}\times\underline{1}^{(6}$; $(2^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(6}$, $(2\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(6}$; $(3\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(6}$; $4^{(2}\times\underline{1}^{(6}$; $(4^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(6}$, $(4\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(6}$; $6^{(2}\times\underline{1}^{(6}$; $(6^{(2}\cdot m)\times\underline{1}^{(6}$, $(6\cdot m^{(2)})\times\underline{1}^{(6}$; $2^{(2}\times(1^{(3}\times\underline{1})$; $m^{(2}\times(1^{(3}\times\underline{1})$; … ;$(6^{(2}\cdot m)\times(1^{(3}\times\underline{1})$, $(6\cdot m^{(2)})\times(1^{(3}\times\underline{1})$ – всего 33 новых группы. Таким образом, категория G_{20} при её обобщении с $(6\underline{1})$-симметрией порождает 47 Q-средних групп при отмеченных значениях Q.

При $(22\underline{1})$-симметрии категория G_{20} порождает только Q-средние группы, где Q = $\underline{1}$-, 2, $\underline{2}$, 22, $2\underline{2}$ и $2\underline{1}$. Ввиду того, что фактор-группа $(22\underline{1})/\underline{1} \simeq 22$, то категория G_{20} при её обобщении с $(22\underline{1})$-симметрией порождает, согласно [14], три $\underline{1}$-средних группы, список которых таков: $(2^{(2}\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}$; $(4^{(2}\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}$; $(6^{(2}\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}$. Далее, поскольку фактор-группа $(22\underline{1})/2 \simeq 2\underline{1}$, то эта же категория при её обобщении с $(22\underline{1})$-симметрией будет порождать, согласно [14], девять 2-средних групп, составляющих следующий список: $(2^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{2)}$, $(\underline{2}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot 1^{2)}$, $(\underline{2}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{2)}$, $(4^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{2)}$, $(\underline{4}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{2)}$; $(\underline{4}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{2)}$; $(6^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{2)}$, $(\underline{6}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{2)}$, $(\underline{6}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{2)}$. Аналогичным образом, вследствие того, что фактор-группа $(22\underline{1})/2 \simeq 2\ \underline{2}$, то при обобщении групп G_{20} с $(22\underline{1})$-симметрией должны получить, согласно [14], шесть 2-средних групп, перечень которых следующий: $(2^{(2}\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$, $(\underline{2}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$; $(4^{(2}\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$, $(\underline{4}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$; $(6^{(2}\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$, $(\underline{6}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{2)}$. По той же причине, ввиду того, что фактор-группа $(22\underline{1})/(\ 22) = (22\underline{1})/(2\underline{2}) \simeq \underline{1}$, то взятые нами классические группы G_{20} при их обобщении с $(22\underline{1})$-симметрией будут порождать, согласно [14], по 11 (22)- и $(2\underline{2})$-средних групп, список которых представится следующим образом: $\underline{2}\cdot(1^{2)}\cdot 1^{2)})$; $\underline{m}\cdot(1^{2}\cdot 1^{2)})$; $(\underline{2}\cdot m)\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(2\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(3\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $\underline{4}\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$, $(\underline{4}\cdot m)\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(4\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $\underline{6}\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(\underline{6}\cdot m)\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(6\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$, а также $\underline{2}\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1}^{2)})$; … ; $(\underline{6}\cdot m)\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1}^{2)})$ – всего 22 новых группы. Наконец, поскольку фактор–группа $(22\underline{1})/(2\underline{1}) \simeq 2)$, то при обобщении используемых нами групп G_{20} с $(22\underline{1})$-симметрией получим 11 $(2\underline{1})$-средних групп, образующих следующий список: $2^{2)}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$; $m^{2)}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$; $(2^{2)}\cdot m)\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, $(2\cdot m^{2)}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$; $(3\cdot m^{2)})\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$; $4^{2)}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$; $(4^{2)}\cdot m)\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$; $(4\cdot m^{2)}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$; $6^{2)}\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$; $(6^{2)}\cdot m)\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$, $(6\cdot m^{2)})\cdot(1^{(2}\times\underline{1})$.

Из всего сказанного выше следует, что группы G_{20} при их обобщении с $(22\underline{1})$-симметрией порождают 51 Q-среднюю группу при указанных значениях Q.

При $(42\underline{1})$-симметрии группы G_{20} порождают только Q-средние группы при Q = $\underline{1}$-, $\underline{2}$-, 4-, 22-, $(2\underline{2})$-, $(4\underline{1})$-, $(22\underline{1})$-, (42)-, $(4\underline{2})$-, $(\underline{4}2)$-, $(2\underline{1})$- и $\underline{4}$-. Но так как фактор-группы $(42\underline{1})/\underline{1} = (42\underline{1})/\underline{2} \simeq 42$, то группы G_{20} при этих P-симметриях порождают, согласно [14], по одной $\underline{1}$- и $\underline{2}$-средней группе, запись которых такова: $(4^{(4}\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}$ и $(4^{(4}\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{2)}$.

Далее, ввиду того, что фактор-группы $(42\underline{1})/4=(42\underline{1})/(22)=(421)/(2\underline{2})\simeq 2\underline{1}$, то используемые нами группы G_{20} при их обобщении с $(42\underline{1})$ будут порождать, согласно [14] по 9 четыре-, (22)- и $(2\underline{2})$-средних групп, список которых таков: $(2^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(4}$, $(\underline{2}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(4}$, $(\underline{2}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(4}$; $(4^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(4}$, $(\underline{4}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(4}$, $(\underline{4}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(4}$; $(6^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(4}$; $(\underline{6}\cdot m^{(2)})\cdot 1^{(4}$, $(\underline{6}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(4}$; $(2^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; … ; $(\underline{2}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(4^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; … ; $(\underline{4}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(6^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; … ; $(\underline{6}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})$; $(2^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(\underline{2}\cdot m)\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(\underline{2}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1}^{2)})$; …; $(6^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1}^{2)})$; … ; $(6^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1}^{2)})$; … ; $(\underline{6}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1}^{2)})$ – всего 27 групп.

В свою очередь, благодаря тому, что фактор-группа $(42\underline{1})/(4\underline{1}) \simeq 2)$, то группы G_{20} при $(42\underline{1})$-симметрии будут порождать, согласно [14], 11 $(4\underline{1})$-средних групп, каждая из которых разлагается в произведение младшей двумерной точечной группы при 2)-симметрии и группы $1^{(4\underline{1})} = 1^{(4}\times\underline{1}$. Следовательно, список этих 11 $(4\underline{1})$-средних групп таков: $2^{2)}\cdot(1^{(4}\times\underline{1})$; $m^{2)}\cdot(1^{(4}\times\underline{1})$; $(2^{2)}\cdot m)\cdot(1^{(4}\times\underline{1})$, … , $(6\cdot m^{2)})\cdot(1^{(4}\times\underline{1}^{1)})$. Аналогичным образом, поскольку фактор-группы $(42\underline{1})/(22\underline{1})=(42\underline{1})/(\underline{4}2) \simeq 2$, то группы G_{20} при $(42\underline{1})$-симметрии порождают, согласно [14], по 11 $(22\underline{1})$- и $(\underline{4}2)$- средних, ибо группы G_{20} при 2-симметрии порождают столько же младших групп. Список (22$\underline{1}$)-средних двумерных точечных групп при (42$\underline{1}$)-симметрии представляется следующим образом: $2^{(4}\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$; $m^{(4}\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$; $(2^{(4}\cdot m)\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$, $(2\cdot m^{(4)})\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$; $4^{(4}\cdot(2^{(2}\cdot 2^{(2)})\times\underline{1})$; $(4^{(4}\cdot m)\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$, $(4\cdot m^{(4)})\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$; $(3\cdot m^{(4)})\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$; $6^{(4}\cdot(1^{2)}\times 1)$, $(6^{(4}\cdot m)\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$, $(6\cdot m^{(4)})\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$ – всего 11 новых групп, а список аналогичных ($\underline{4}$2)-средних групп при (42$\underline{1}$)-симметрии выглядит так : $2^{(2}\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$, $m^{(2}\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$; $(2^{(2}\cdot m)\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$, $(2\cdot m^{(2)})\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$; $(3\cdot m^{(2)})\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$; $4^{(2}\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$; $(4^{(2}\cdot m)\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$, $(4\cdot m^{(2)})\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$; $6^{(2}\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$; $(6^{(2}\cdot m)\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$, $(6\cdot m^{(2)})\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{2)})$.

Ещё 11 (4$\underline{2}$)-средних групп появятся при обобщении групп G_{20} с (42$\underline{1}$)-симметрией, ввиду того, что фактор-группа (42$\underline{1}$)/(4$\underline{2}$) ≃ $\underline{2}$. Список этих групп следующий: $\underline{2}^{(2}\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$; $\underline{m}^{(2}\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(\underline{2}^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(2\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(3\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$; $\underline{4}^{(2}\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(\underline{4}^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(4\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$; $\underline{6}^{(2}\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(\underline{6}^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(6\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{(4}\cdot\underline{1}^{2)})$, а также 11 (42)-средних групп при (42$\underline{1}$)-симметрии, поскольку фактор-группа (42$\underline{1}$)/(42)≃ $\underline{1}$. Если каждую младшую двумерную точечную группу $\underline{1}$-симметрии последовательно умножить на группу $1^{(42)} = 1^{(4}\cdot 1^{2)}$, то получим список нужных нам групп в следующем виде: $\underline{2}\cdot(1^{(4}\cdot 1^{2)})$; $\underline{m}\cdot(1^{(4}\cdot 1^{2)})$, … , $(\underline{6}\cdot m)\cdot(1^{(4}\cdot 1^{2)})$, $(6\cdot\underline{m})\cdot(1^{(4}\cdot 1^{2)})$ – всего 11 групп. Наконец, благодаря тому, что фактор-группы (42$\underline{1}$)/(2$\underline{1}$)=(42$\underline{1}$)/$\underline{4}$ ≃ 2$\underline{2}$, то при обобщении групп G_{20} с (42$\underline{1}$)-симметрией появятся, согласно [14], по 6 (2$\underline{1}$) и $\underline{4}$-средних групп. Список искомых (2$\underline{1}$)-средних групп таков: $(2^{(4}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot\underline{1}$, $(\underline{2}^{2)}\cdot m^{(4)})\cdot\underline{1}$; $(4^{(4}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot(1^{2)}\times\underline{1})$, $(\underline{4}^{2)}\cdot m^{(4)})\cdot\underline{1}$, $(6^{(4}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot\underline{1}$, $(\underline{6}^{2)}\cdot m^{(4)})\cdot\underline{1}$; а список аналогичных двумерных $\underline{4}$-средних точечных групп при (42$\underline{1}$)-симметрии выглядит следующим образом: $(2^{(2}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot\underline{1}^{(4}$; $(\underline{2}^{2)}\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{(4}$; $(4^{(2}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot\underline{1}^{(4}$, $(\underline{4}^{2)}\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{(4}$; $(6^{(2}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot\underline{1}^{(4}$, $(\underline{6}^{2)}\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(4}$ – всего 6 групп.

В итоге имеем, что при обобщении групп G_{20} с (42$\underline{1}$)-симметрией выводится 96 новых отмеченных выше Q-средних групп.

При (62$\underline{1}$)-симметрии группы G_{20} также порождают только Q-средние группы при Q = 2-, $\underline{1}$-, $\underline{2}$-, (2$\underline{1}$)-, 6-, (32)-, (3$\underline{2}$)-, $\underline{6}$-, (3$\underline{1}$)-, (6$\underline{1}$)-, (32$\underline{1}$)-, (62)-,(6$\underline{2}$)-, ($\underline{6}$2)-. В связи с тем, что фактор-группа (62$\underline{1}$)/2 ≃ 32$\underline{1}$ ≃ $\underline{6}$2, то группы G_{20} при (62$\underline{1}$)-симметрии, согласно [14], будут порождать одну 2-среднюю группу с записью $(\underline{6}^{(6}\cdot m^{2)})\cdot 1^{(2}$. В свою очередь, поскольку фактор-группы (62$\underline{1}$)/$\underline{1}$ ≃ (62$\underline{1}$)/$\underline{2}$ ≃ 62, то группы G_{20} при (62$\underline{1}$)-симметрии будут порождать по известной причине по одной $\underline{1}$- и $\underline{2}$-средней группе записями $(6^{(6}\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}$ и $(6^{(6}\cdot m^{2)})\cdot\underline{1}^{(2}$.

Далее, благодаря тому, что фактор-группы (62$\underline{1}$)/6 ≃ (62$\underline{1}$)/(32) = 621/(3$\underline{2}$) ≃ 2$\underline{1}$, то группы G_{20} при (621)-симметрии, согласно [14], будут прождать по 9 шесть-, (32)- и (3$\underline{2}$)-средних групп соответственно, так как группы G_{20} при (2$\underline{1}$)-симметрии порождают также 9 младших групп. Если каждую младшую двумерную точечную группу (2$\underline{1}$)-симметрии умножить на группу 6 тождественных преобразований $1^{(6}$, то получим список 9 шесть-средних групп в следующем виде: $(2^{2)}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(6}$; $(\underline{2}\cdot m^{2)})\cdot 1^{(6}$, $(\underline{2}^{2)}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(6}$; $(4^{2)}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(6}$, $(\underline{4}\cdot m^{2)})\cdot 1^{(6}$, $(\underline{4}^{2)}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(6}$; $(6^{2)}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(6}$, $(\underline{6}\cdot m^{2)})\cdot 1^{(6}$, $(\underline{6}^{2)}\cdot\underline{m})\cdot 1^{(6}$. Аналогичным образом, умножив, отмеченные младшие двумерные точечные группы (21)- симметрии на группы $1^{(32)}=1^{(3}\cdot 1^{2)}$ и $1^{(3\underline{2})}=1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)}$, получим по 9 (32)- и (3$\underline{2}$)-средних групп в следующем виде: $(2^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $(\underline{2}\cdot m^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$, $(\underline{2}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$, $(4^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$, $(\underline{4}\cdot m^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $(\underline{4}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $(6^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$, $(\underline{6}\cdot m^{2)})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$, $(\underline{6}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})$; $(2^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(\underline{2}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$, … ; $(\underline{6}^{(2}\cdot\underline{m})\cdot(1^{(3}\cdot\underline{1}^{2)})$ – всего 18 групп.

Ввиду того, что фактор-группа (62$\underline{1}$)/(6$\underline{1}$) ≃ 2), группы G_{20} при (62$\underline{1}$)-симметрии будут порождать, согласно [14], по 11 (6$\underline{1}$)-средних групп, каждая из которых разлагается в произведение младшей двумерной точечной группы 2)-симметрии и группы $1^{(61)} = 1^{(6}\times\underline{1}$, поэтому список этих 11 (6$\underline{1}$)-средних групп таков: $2^{2)}\cdot(1^{(6}\times\underline{1})$; $m^{2)}\cdot(1^{(6}\times\underline{1})$; $(2^{2)}\cdot m)\cdot(1^{(6}\times\underline{1})$, … , $(6\cdot m^{2)})\cdot(1^{(6}\times\underline{1})$.

Аналогичным образом, ввиду того, что фактор-группы (62$\underline{1}$)/(32$\underline{1}$) = 62$\underline{1}$/($\underline{6}$2) ≃ 2, группы G_{20} при (621)-симметрии порождают, согласно [14], по 11 (32$\underline{1}$)- и ($\underline{6}$2)- средних групп, ибо используемые нами двумерные точечные группы при 2-симметрии порождают столько же младших групп. Умножив каждую младшую группу 2-симметрии использованной категории последовательно на группы $1^{(32\underline{1})} = (1^{(3}\cdot 1^{2)})\times\underline{1}$ и $1^{(\underline{6}2)} = \underline{1}^{(6}\cdot 1^{2}$, получим по 11 (32$\underline{1}$)- и ($\underline{6}$2)-средних групп, список которых таков: $2^{(2}\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})\times\underline{1}$; $m^{(2}\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})\times\underline{1}$; $(2^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})\times\underline{1}$, … , $(6\cdot m^{2)})\cdot(1^{(3}\cdot 1^{2)})\times\underline{1}$; а также $2^{(2}\cdot(\underline{1}^{(6}\cdot 1^{2)})$, $m^{(2}\cdot(\underline{1}^{(6}\cdot 1^{2)})$; $(2^{(2}\cdot m)\cdot(\underline{1}^{(6}\cdot 1^{2)})$, … , $(6\cdot m^{2)})\cdot(\underline{1}^{(6}\cdot 1^{2)})$ – всего 22 группы. Далее, ещё 11 (6$\underline{2}$)-средних групп получим при обобщении групп G_{20} с ($62\underline{1}$)-симметрией, поскольку фактор-группа $62\underline{1}/(62) \simeq \underline{2}$. Если каждую младшую двумерную точечную группу при $\underline{2}$-симметрии умножить на группу $1^{(62)} = 1^{(6} \cdot \underline{1}^{2}$, то получим список из 11($6\underline{2}$)-средних групп в следующем виде: $\underline{2}^{(2}\cdot(1^{(6}\cdot\underline{1}^{2)})$; $\underline{m}^{(2}\cdot(1^{(6}\cdot\underline{1}^{2)})$; $(\underline{2}^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(6}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(2\cdot\underline{m}^{2)})\cdot(1^{(6}\cdot\underline{1}^{2)})$,$(3\cdot\underline{m}^{2)})\cdot(1^{(6}\cdot\underline{1}^{2)})$; … , $(\underline{6}^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(6}\cdot\underline{1}^{2)})$, $(6\cdot\underline{m}^{2)})\cdot(1^{(6}\cdot\underline{1}^{2)})$. С другой стороны, группы G_{20} при их обобщении с ($62\underline{1}$)-симметрией будут порождать ещё 11 (62)-средних групп вследствие того, что фактор-группа $62\underline{1}/\ 62 \simeq \underline{1}$. Что касается самого списка (62)-средних групп, то он, очевидно, таков: $\underline{2}\cdot(1^{(6}\cdot1^{2)})$; $\underline{m}\cdot(1^{(6}\cdot1^{2)})$; $(\underline{2}\cdot m)\cdot(1^{(6}\cdot1^{2)})$; … ; $(6\cdot\underline{m})\cdot(1^{(6}\cdot1^{2)})$ – всего 11 групп. Далее, ввиду того, что фактор-группа $62\underline{1}/(2\underline{1})\simeq 32$, группы G_{20} при ($62\underline{1}$)-симметрии будут порождать также 2 ($2\underline{1}$)-средние группы, поскольку при (32)-симметрии группы G_{20} порождают 2 младших группы. Следовательно, запись двух ($2\underline{1}$)-средних двумерных точечных групп при ($62\underline{1}$)-симметрии будет такова: $(3^{(3}\cdot m^{2)})\cdot(1^{2}\cdot\underline{1})$ и $(6^{(3}\cdot m^{2)})\cdot(1^{(2}\cdot\underline{1})$.

Наконец, поскольку фактор-группы $(62\underline{1})/(3\underline{1}) = (62\underline{1})/\underline{6} \simeq 22$, группы G_{20} при (621)-симметрии будут порождать по неоднократно упоминавшийся причине по 6 ($3\underline{1}$)- и $\underline{6}$-средних групп, составляющих следующий список: $(2^{(2}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot(1^{3)}\cdot\underline{1})$; $(\underline{2}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot(1^{3)}\cdot\underline{1})$; $(4^{(2}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot(1^{3)}\cdot\underline{1})$, $(\underline{4}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot(1^{3)}\cdot\underline{1})$; $(6^{(2}\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot(1^{3)}\cdot\underline{1})$, $(\underline{6}^{(2}\cdot m^{(2)})\cdot(1^{3)}\cdot\underline{1})$; а так же $(2^{2)}\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot\underline{1}^{(6}$, $(\underline{2}^{2)}\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{(6}$; $(4^{2)}\cdot\underline{m}^{2)})\cdot\underline{1}^{(6}$, $(\underline{4}^{2)}\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{(6}$; $(6^{2)}\cdot\underline{m}^{(2)})\cdot\underline{1}^{(6}$, $(\underline{6}^{2)}\cdot m^{(2)})\cdot\underline{1}^{(6}$ – всего 12 групп.

В итоге имеем, что при обобщении групп G_{20} с ($62\underline{1}$)-симметрией порождается 99 новых Q-средних групп при указанных значениях Q.

При (23)-симметрии группы G_{20} порождают только 2 (22)-средних группы, ввиду того, что фактор-группа $(23)/(22) \simeq 3$, список которых таков $3^{3)}\cdot(1^{(2}\cdot1^{2)})$; $6^{3)}\cdot(1^{(2}\cdot1^{2)})$.

При (43)-симметрии группы G_{20} порождают только (22)- и (23)-средних группы. Поскольку фактор-группа $(43)/(22) \simeq 32$, группы G_{20} при (43)-симметрии порождают 2 (22)-средних группы, вследствие того, что такие группы порождают 2 младших при (32)-симметрии, поэтому список (22)-средних двумерных точечных групп таков: $(3^{(3}\cdot m^{2)})\cdot(1^{(2}\cdot1^{2)})$, $(6^{(3}\cdot m^{2)})\cdot(1^{(2}\cdot1^{2)})$. Наконец, ввиду того, что фактор-группа $(43)/(22) \simeq 2$, то группы G_{20} при (43)-симметрии будут порождать 11 (23)-средних групп, так как эти группы при 2-симметрии порождают столько же младших. Если каждую младшую двумерную точечную группу при 2-симметрии умножим на группу $1^{(23)} = 1^{(2}\cdot1^{3)}$, то получим список всех 11 (23)-средних двумерных групп при (43)-симметрии в следующем виде: $2^{(2}\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; $m^{(2}\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; $(2^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$, $(2\cdot m^{(2)})\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; $(3\cdot m^{(2)})\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; $4^{(2}\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; $(4^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$, $(4\cdot m^{(2)})\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; $6^{(2}\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; $(6^{(2}\cdot m)\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$, $(6\cdot m^{(2)})\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$. Следовательно, группы G_{20} при (43)-симметрии порождают 13 новых Q-средних групп при отмеченных значениях Q. А при двух (43)- и ($\underline{4}3$)-симметриях таких Q-средних групп G_{20} будет порождать в 2 раза больше, т.е. $13 \times 2 = 26$.

При ($23\underline{1}$)-симметрии используемые нами двумерные точечные группы G_{20} будут порождать только Q-средние при Q=22, $22\underline{1}$ и 23. В связи с тем, что фактор-группа $(23\underline{1})/(22) \simeq 3\underline{1}$, то (22)-средней точечной группой при ($23\underline{1}$)-симметрии будет одна группа, представленная символом $\underline{6}^{(3}\cdot(1^{(2}\cdot1^{2)})$. Далее, поскольку фактор-группа $(23\underline{1})/(221) \simeq 3$, то ($22\underline{1}$)-средних двумерных точечных групп при ($23\underline{1}$)-симметрии будет 2, запись которых такова: $3^{(3}\cdot(1^{(2}\cdot1^{2)})\times\underline{1}$ и $6^{(3}\cdot(1^{(2}\cdot1^{2)})\times\underline{1}$. Наконец, ввиду того, что фактор-группа $(23\underline{1})/(23) \simeq 2$, категория G_{20} при ($23\underline{1}$)-симметрии будет порождать, согласно [14], 11 (23)-средних групп, список которых таков: $2^{(2}\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; $m^{(2}\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$; …., $(6\cdot m^{(2}\,)\cdot(1^{(2}\cdot1^{3)})$ – всего 11 групп. Таким образом, группы G_{20} при ($23\underline{1}$)-симметрии порождают 14 Q-средних групп при указанных значениях Q.

Наконец, **при ($43\underline{1}$)-симметрии** постоянно используемые нами группы G_{20} будут порождать только Q-средние группы при Q = (22)-, (23)-, ($22\underline{1}$)-, ($23\underline{1}$)-, (43)- и ($\underline{4}3$)-. Ввиду того, что фактор-группа $(43\underline{1})/(22) \simeq 23\underline{1} \simeq \underline{6}2$, группы G_{20} при (431)-симметрии порождают, согласно [14], только 1 (22)-среднюю группу с записью $(\underline{6}^{(6}\cdot m^{2)})\cdot(1^{(2}\cdot1^{2)})$. Далее, благодаря тому, что фактор-группа $(43\underline{1})/(23) \simeq 2\underline{1}$, группы G_{20} при ($43\underline{1}$)-симметрии, согласно [14], будут порождать 9 (23)-средних групп, список которых таков: $(2^{(4}\cdot\underline{m})\cdot1^{3)}$, $(\underline{2}\cdot m^{(4}\,)\cdot1^{3)}$, $(\underline{2}^{(4}\cdot\underline{m})\cdot1^{3)}$; $(4^{(4}\cdot\underline{m})\cdot1^{3)}$, $(\underline{4}\cdot m^{(4}\,)\cdot1^{3)}$; $(\underline{4}^{(4}\cdot\underline{m})\cdot1^{3)}$; $(6^{(4}\cdot\underline{m})\cdot1^{3)}$, $(\underline{6}\cdot m^{(4)})\cdot1^{3)}$,

$(\underline{6}^{(4}\cdot\underline{m})\cdot 1^{3)}$. Далее, вследствие того, что фактор-группа $(43\underline{1})/(22\underline{1}) \simeq 32$, то группы G_{20} при $(43\underline{1})$-симметрии, согласно [14], будут порождать 2 (221)-средние группы со следующей записью: $(3^{(3}\cdot m^{2)})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})\times\underline{1}$; $(6^{(3}\cdot m^{2)})\cdot(1^{(2}\cdot 1^{2)})\times\underline{1}$. Наконец, поскольку фактор-группы $(43\underline{1})/(23\underline{1}) \simeq (431)/(43) \simeq (43\underline{1})/(\underline{4}3) \simeq 2$, группы G_{20} при $(43\underline{1})$-симметрии будут порождать по аналогичной причине последовательно по 11 $(23\underline{1})$-, (43)- и $(\underline{4}3)$-средних групп. Перечень $(23\underline{1})$-средних двумерных точечных групп составит список: $2^{(4}\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$; $m^{(4}\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$; $(2^{(4}\cdot m)\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$, $(2\cdot m^{(4})\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$; $(3\cdot m^{(4)})\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$; $4^{(4}\cdot(1^{(2}\cdot 1^{3)})\times 1$; $(4^{(4}\cdot m)\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$, $(4\cdot m^{(4)})\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$; $6^{(4}\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$, $(6^{(4}\cdot m)\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$; $(6\cdot m^{(4)})\cdot(1^{(3}\times\underline{1})$. Если умножим 11 младших двумерных точечных групп при $\underline{1}$-симметрии последовательно на группы $1^{(43)} = 1^{(4}\cdot 1^{3)}$ и $1^{(\underline{4}3)} = \underline{1}^{(4}\cdot 1^{3)}$, то получим список 22 нужных нам (43)- и $(\underline{4}3)$-средних групп в следующем виде: $\underline{2}\cdot(1^{(4}\cdot 1^{3)})$; $\underline{m}\cdot(1^{(4}\cdot 1^{3)})$; $(\underline{2}\cdot m)\,(1^{(4}\cdot 1^{3)})$, $(2\cdot\underline{m})\,(1^{(4}\cdot 1^{3)})$; $(3\cdot\underline{m})\cdot(1^{(4}\cdot 1^{3)})$; $\underline{4}\cdot(1^{(4}\cdot 1^{3)})$; $(\underline{4}\cdot m)\,(1^{(4}\cdot 1^{3)})$, $(4\cdot\underline{m})\,(1^{(4}\cdot 1^{3)})$; $\underline{6}\cdot(1^{(4}\cdot 1^{3)})$, $(\underline{6}\cdot m)\,(1^{(4}\cdot 1^{3)})$, $(6\cdot\underline{m})\,(1^{(4}\cdot 1^{3)})$; $\underline{2}\cdot(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{3)})$; … ; $(6\cdot\underline{m})\,(\underline{1}^{(4}\cdot 1^{3)})$ – всего 22 группы.

Учитывая всё сказанное выше при $(43\underline{1})$-симметрии приходим к выводу, что при этой P-симметрии группы G_{20} порождают 45 Q-средних групп при отмеченных значениях Q.

В итоге имеем, что при обобщении двумерных кристаллографических точечных групп G_{20} с 32 кристаллографическими P-симметриями при $P\simeq G_{30}$ получено 1208 групп G_{20}^P, из которых 10 порождающих, 310 старших, 79 младших и 809 Q-средних, что в точности совпадает с предпринятым в [6, с.46-49] подсчётом количества всех различных розеточных групп G_{20}^P полных 32 кристаллографических P-симметрий в геометрической классификации при $P\simeq G_{30}$.

5. Покажем, что представленными в предыдущем разделе двумерными точечными группами G_{20}^P кристаллографических P-симметрий при $P\simeq G_{30}$ интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категории G_{520} , то есть пятимерные группы симметрии с инвариантной двумерной плоскостью и неподвижной точкой на ней. Для этого рассмотрим единственную группу 1 нульмерного пространства E_0, порождённую тождественным преобразованием e. При её обобщении с 32 кристаллографическими P-симметриями, согласно общей теории P-симметрии [5,6], получим одну порождающую группу 1 и 31 старшую $1\times 1^{(2)}$, $1\times\underline{1}$, $1\times\underline{1}^{(2)}$, … , $1\times 1^{(43\underline{1})} = 1\times(1^{(4}\cdot 1^{3)}\times\underline{1}$, то есть 32 группы G_0^P , являющиеся точным представлением трёхмерных кристаллографических точечных групп симметрии G_{30} , преобразующих трёхмерное пространство E_3. Следовательно, каждой группе из совокупности нульмерных групп G_0^P кристаллографических P-симметрий при $P\simeq G_{30}$ соответствует единственная группа из множества групп G_{30} , имеющая с ней одинаковое строение. Иначе говоря, между нульмерными группами G_0^P кристаллографических P-симметрий и трёхмерными кристаллографическими группами симметрии G_{30} , согласно [14], устанавливается не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, из которого следует, что первая цифра индекса групп симметрии категории G_{30}, интерпретируемых нульмерными группами G_0^P 32 кристаллографических P-симметрий, равна сумме размерности пространства, в котором содержатся группы G_{30}, связанные с нульмерными группами G_0^P использованных нами 32 кристаллографических P-симметрий, и размерности нульмерного пространства, содержащего единственную порождающую группу 1, равную второму индексу упомянутых групп симметрии категории G_{30}, а также, что группы подстановок индексов, приписываемых точкам двумерной плоскости при исследовании двумерных точечных групп G_{20}^P кристалографических P-симметрий при $P\simeq G_{30}$, задают с точностью до строения в пространстве E_3 трёхмерные точечные группы симметрии G_{30}.

Аналогическое соответствие, как между нульмерными группами G_0^P кристаллографических P-симметрий и трёхмерными точечными группами G_{30}, устанавливается между двумерными точечными группами G_{20}^P кристаллографических P-симметрий и пятимерными группами симметрии категории G_{520}, ибо отмеченные двумерные точечные группы G_{20}^P кристаллографических P-симметрий базируются на двумерных точечных группах G_{20}, преобразующих двумерное пространство E_2, и на 32 кристалографических P-симметриях, интерпретирующих в дополнительном трёхмерном пространстве E_3 32 трёхмерные точечные кристаллографические группы симметрии G_{30}.

Точно такое же соответствие, как между нульмерными группами G_0^P кристаллографических P-симметрий и трёхмерными точечными группами G_{30}, устанавливается между двумерными точечными группами G_{20}^P кристаллографических P-симметрий и пятимерными группами симметрии категории G_{520}, ибо отмеченные двумерные точечные группы G_{20}^P кристаллографических P-симметрий базируются на двумерных точечных группах G_{20}, преобразующих двумерные пространство E_2, и на 32 кристаллографических Р-симметриях, интерпретирующих в дополнительном трёхмерном пространстве E_3 32 трёхмерные точечные кристаллографические группы симметрии G_{30}.

Опираясь на всё сказанное выше, приходим к выводу, что порождающие группы категории G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий задают такие пятимерные группы симметрии, которые преобразуют двумерное подпространство пятимерного пространства, а дополняющее его трёхмерное пространство до пятимерного оставляют нейтральным. Старшие группы G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий задают такие пятимерные группы симметрии, которые одновременно и независимо друг от друга преобразуют двумерное и трёхмерное подпространства пятимерного пространства, ввиду того, что каждая старшая группа из множества G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий разлагается в прямое произведение порождающей группы, преобразующей двумерное пространство E_2 пятимерного пространства E_5, и группы кристаллографической Р-симметрии, преобразующей дополнительное трёхмерное подпространство того же пятимерного пространства. Далее, младшие группы из множества G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий, изоморфные порождающим, задают такие пятимерные группы симметрии, которые целиком преобразуют пятимерное пространство E_5 как единое целое. Наконец, строение 5-мерных групп симметрии категории G_{520}, задаваемых Q-средними группами категории G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий, зависит от самой кристаллографической Р-симметрии, при которой исходные группы G_{20}^P порождают Q-средние группы. Так, Q-средние группы при 4-симметрии категории G_{20}^P интерпретируют такие 5-мерные группы симметрии, у которых к ранее полученным 5-мерным группам симметрии, задаваемых младшими двумерными точечными группами при 2-симметрии, добавляется в трёхмерном подпространстве 5-мерного пространства поворот второго порядка вокруг прямой, проходящей через инвариантную точку группы симметрии категории G_{520}. Далее, 3-средние группы при 6-симметрии категории G_{20}^P задают такие 5-мерные группы симметрии, у которых к ранее полученным 5-мерным группам симметрии, задаваемых младшими двумерными точечными группами при 2-симметрии, добавляется в трёхмерном подпространстве 5-мерного пространства поворот третьего порядка вокруг оси, проходящей через инвариантную точку рассматриваемых нами пятимерных групп симметрии, и т. д.

Аналогичным образом можно выявить структуру пятимерных групп симметрии, задаваемых всевозможными видами Q-средних двумерных точечных групп при всех использованных кристаллографических Р-симметриях.

Отметим, что такое разнообразие структур пятимерных групп симметрии категории G_{520}, интерпретируемых разными типами двумерных точечных групп G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий, объясняется тем, что порождающие, младшие и Q-средние группы из множества G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий являются подгруппами старших групп этой категории.

В целом, как мы показали, между выявленными 1208 двумерными точечными группами G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий и пятимерными группами симметрии категории G_{520} установилось не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, означающее, что группа категории G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий и моделируемая ею группа симметрии категории G_{520} имеют одинаковое строение. Следовательно, различных пятимерных групп симметрии категории G_{520} имеется ровно 1208,

6. Таким образом, поставленная в настоящей работе задача решена полностью. С помощью приведенного каталога двумерных точечных групп G_{20}^P 32 кристаллографических Р-симметрий в геометрической классификации установлено, что имеется ровно 1208 различных пятимерных групп симметрии с инвариантной двумерной плоскостью и неподвижной точкой на ней, то есть групп симметрии категории G_{520} , которые интерпретируются с точностью до строения группами G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий при $P \simeq G_{30}$. Отсюда непосредственно вытекает, что взятая нами из [19] шубниковская символика для записи двумерных точечных групп G_{20}^P кристаллографических Р-симметрий задаёт одновременно и сами выявленные нами пятимерные группы симметрии с инвариантной двумерной плоскостью и неподвижной точкой на ней.

При решении поставленной задачи использованы полученные нами важные побочные результаты:

1) для всех нетривиальных групп подстановок Р, задающих 32 кристаллографические Р-симметрии, указаны их нетривиальные нормальные делители;

2) составлены фактор-группы отмеченных групп подстановок P по всем их нормальным делителям и приведены группы P, задающие кристаллографические P-симметрии, которым эти фактор-группы сильно изоморфны.

Отметим в заключение, что приведенное число различных пятимерных групп симметрии категории G_{520} является абсолютно точным. Нами уверенность в этом основывается на том факте, что групп симметрии категории G_{520} должно быть столько, как отмечено на стр. 97 в [6], сколько групп симметрии содержит категория G_{530}. Но пятимерные группы симметрии категории G_{530} интерпретируются трёхмерными точечными группами G_{30}^{P} 10 розеточных P-симметрий, а таких групп, как указано на стр. 97 в [6], также 1208. Таким образом, количество пятимерных групп симметрии G_{520} подсчитано двумя независимыми способами – с помощью двумерных точечных групп G_{20}^{P} кристаллографических P-симметрий и с помощью трёхмерных точечных групп G_{30}^{P} розеточных P-симметрий. Совпадение результатов подсчёта пятимерных групп симметрии совпадающих категорий G_{520} и G_{530} отмеченными двумя независимыми методами подтверждает факт, что полученное число – *1208 пятимерных групп симметрии категории G_{520}* , не вызывает сомнений.

Литература:

1. Janner A., Janssen T. Symmetry of periodicalle distorted crystals // Phys. Rev B: Solid State, 1977, v. 15, №2, p. 643-658.
2. Brown H., Bulow R., Neubuser J., Wendratchek H., Zassenhaus H. Cristallografic groups of four-dimensional space. – New York: John Wiley and Sons, 1978. - 438 p.
3. Делоне Б., Падуров Н., Александров А. Математические основы структурного анализа кристаллов. - Л.-М.: ОНТИ. ГТТИ. 1934, гл.I, III.
4. Делоне Б.Н., Галиулин Р.В., Штогрин М.И. Теория Браве и её обобщение на n-мерные решётки // О Браве. Избранные научные труды. - М.: Наука, 1974, с.309- 419.
5. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, её обобщения и приложения. - Кишинёв: Штиинца, 1978. - 275 с.
6. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. P-симметрия и её дальнейшее развитие. - Кишинёв: Штиинца, 1986. - 156с.
7. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинёв: Штиинца, 1976. - 283с.
8. Палистрант А.Ф. О группах (p,2)- и (p/,2)- симметрии и их геометрических приложениях // Алгебраические структуры и геометрия. - Кишинёв: Штиинца, 1991, с. 92-105.
9. Палистрант А.Ф. О группах розеточных, таблеточных и гипертаблеточных P-симметрий и их связях с группами многомерных симметрий // Кристаллография, 2000, №6, с.967-973.
10. Палистрант А.Ф. Применение трёхмерных точечных групп P-симметрии к выводу шестимерных групп симметрии // ДАН СССР-1981, т. 260, №4, с.884- 888.
11. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Трёхмерные точечные группы гиперкристаллографических P-симметрий и некоторые их применения // Кристаллография, 1999, т.44, №6, с.976 -979.
12. Палистрант А.Ф., Заморзаев А.М. Трёхмерные точечные группы гиперкристаллографических P-симметрий 2-го порядка и их многомерные приложения // Кристаллография, 2000, т.45, №1, с.7-11.
13. Палистрант А.Ф. Бирозеточные P-симметрии, их свойства и геометрические приложения // Studia Universitatis. Revista Ştiintifica. Seria: Stiinţe exacte şi economice (Matimatica, Informatica, Economie), nr.7(27). - Chisinau: Universitatea de Stat din Moldova, 2009. p.12-24.
14. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме P-симметрий // Изв. АН РМ. Математика, 1994, №1, с.75-84.
15. Палистрант А.Ф. Полная схема четырёхмерных кристаллографических групп симметрии // Кристаллография, 2012, т.57, №4, с.539-545.
16. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрическая классификация P-симметрий // ДАН СССР, 1981, т.256, №4, с.856- 859.
17. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Трёхмерные точечные группы гиперкристаллографических P-симметрий и некоторые их приложения // Кристаллография, 1999, т.44, №6, с.976-979.
18. Палистрант А.Ф. Применение пространственных групп кристаллографических P-симметрий к исследованию шестимерных групп симметрии // Кристаллография, 2009, т.54, №4, с.581-589.
19. Шубников А.В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. - Москва: Изд-во АН СССР, 1951. - 172с.

Исследование выполнено при поддержке проекта 12.839.08.07F Высшего Совета по науке и технологическому развитию АН Молдовы (CSŞDT AŞM).

Prezentat la 12.04.2012