# ASUPRA REGULARIZĂRII ŞI SOLUȚIONĂRII UNOR ECUAȚII INTEGRALE SINGULARE CU TRANSLAȚII CARLEMAN GENERALIZATE

**Diana AFTENI**

*Universitatea de Stat din Tiraspol*

În lucrare este elaborată o metodă efectivă de regularizare echivalentă a unei clase de ecuații integrale singulare cu nucleu de tip Carleman.

***Cuvinte-cheie:*** *operator integral singular, regularizare, operator cu conjugată complexă.*

**ON THE REGULARIZATION AND SOLVING OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH GENERALIZED SHIFT OF CARLEMAN**

In the work it is elaborated an effective method of equivalent regularization of class of singular integral equations with shift of Carleman type.

***Keywords***: *singular integral operator, regularization, operator with complex conjugate.*

Este cunoscut faptul că problema rezolvării ecuațiilor integrale singulare s-a dovedit a fi una extrem de complicată (*a se vedea* [1]) şi, în plus, există ecuații singulare care în genere nu pot fi rezolvate exact. Reieşind din aceste realități, orice metodă care uşurează soluționarea ecuațiilor singulare prezintă un interes teoretic şi practic şi merită a fi luată în considerație. În acest sens, metodele aproximative joacă un rol important şi sunt utilizate pe larg în soluționarea ecuațiilor integrale singulare. Dintre metodele care conduc la rezolvarea exactă a unor ecuații singulare trebuie menționată metoda regularizării. Această metodă este efectivă atunci când se reuşeşte efectuarea unei regularizări echivalente a ecuațiilor. În aceste cazuri se obțin ecuații echivalente de tip Fredholm, a căror teorie este cunoscută.

Pentru a realiza această trecere (reducere), de regulă, asupra ecuației integrale singulare sunt aplicate anumite transformări integrale şi/sau funcționale. Aceste transformări, în general, pot să ne conducă la apariția unor soluții străine, care nu verifică ecuația inițială, sau la pierderea unor soluții. În consecință, ecuația obținută în urma transformărilor poate să nu fie echivalentă cu cea inițială. În cazul studiului ecuațiilor integrale singulare care conțin şi operatori de translații sau de conjugare complexă, problema regularizării echivalente devine şi mai complicată (*a se vedea* [2,3]). Reamintim că echivalența a două ecuații înseamnă că ambele sunt rezolvabile şi posedă unele şi aceleaşi soluții.

În această lucrare este elaborată o metodă efectivă de regularizare echivalentă a unei clase vaste de ecuații integrale singulare cu translații care îndeplinesc condițiile generalizate ale lui Carleman. Totodată, este construită încă o ecuație, de asemenea singulară, echivalentă cu cea inițială. Obținerea acestor două ecuații singulare echivalente ne permite să stabilim condiții necesare şi suficiente de rezolvabilitate normală a acestor ecuații, precum şi regularizarea lor echivalentă. Rezultatele obținute sunt ilustrate la rezolvarea unei ecuații singulare cu translații.

**Regularizarea ecuațiilor integrale singulare complete**

Considerăm ecuația integrală singulară completă, care conține necunoscută sub semnul conjugării complexe:

$$A\varphi \equiv a_1(t)\varphi(\alpha_1(t)) + a_2(t)\varphi(\alpha_2(t)) + \ldots + a_n(t)\varphi(\alpha_n(t)) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha_1(t)} + \frac{b_2(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha_2(t)} + \ldots +$$

$$+\frac{b_n(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha_n(t)} + c_1(t)\overline{\varphi(\alpha_1(t))} + c_2(t)\overline{\varphi(\alpha_2(t))} + \ldots + c_n(t)\overline{\varphi(\alpha_n(t))} + \frac{d_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{\tau-\alpha_1(t)} + \frac{d_2(t)}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{\tau-\alpha_2(t)} + \ldots +$$

$$+\frac{d_n(t)}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{\tau-\alpha_n(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_L K_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_L K_2(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}d\tau = h(t), \tag{1.1}$$

unde $K_1(t,\tau), K_2(t,\tau)$ sunt nuclee regulate, iar funcțiile $a_j(t), b_j(t), c_j(t), d_j(t)$ $(j = 1,2,..,n)$ verifică condițiile lui Holder pe conturul *L*. Conturul *L* este format dintr-un număr finit de linii închise de tip Leapunov $L_1, L_2, \ldots, L_m$ $\left(L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j\right)$ fără puncte comune, care împart planul complex în domeniu $G^+$ mărginit de conturul *L* şi în domeniu $G^-$ complementar la $G^+ \bigcup L$ (Fig.1).

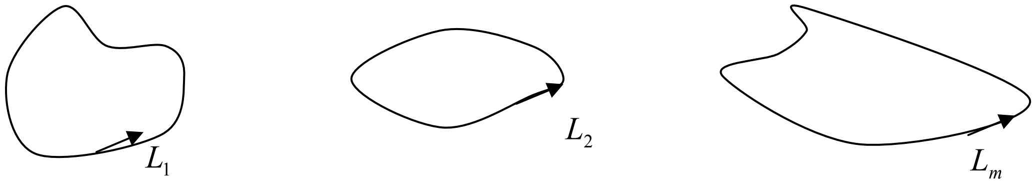


**Fig.1**

Conturul *L* este orientat astfel încât domeniul $G^+$ rămâne la stânga. Translația $\alpha(t)$ transformă conturul *L* în el însuşi (adică, fiecare $L_j$ se transformă în el însuşi) cu păstrarea sau schimbarea orientării, posedă derivata $\alpha'(t)$ care verifică condițiile lui Holder şi nu se anulează pe *L*. În plus, translația $\alpha(t)$ verifică condițiile generalizate ale lui Carleman:

$$\alpha_1(t)\equiv\alpha(t),\ \alpha_2(t)\equiv\alpha[\alpha(t)],\ \ldots,\ \alpha_n(t)\equiv\alpha[\alpha_{n-1}(t)]\equiv t\equiv\alpha_0(t).$$

Soluțiile ecuației (1.1) se caută în spațiul $L_p$ cu o pondere în care operatorii integrali singulari şi cei de translații sunt mărginiți. Sub semnul integrării în termenii ecuației (1.1) înlocuim variabila $\tau$ prin $\alpha_j(\tau)\left(j=\overline{1,n}\right)$; atunci ecuația (1.1) se va transforma sub forma:

$$A\varphi\equiv\sum_{j=1}^{n}\left\{a_j(t)\varphi[\alpha_j(t)]+\frac{\lambda_j b_j(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\alpha_j(\tau))}{\tau-t}d\tau+c_j(t)\overline{\varphi[\alpha_j(t)]}+\frac{\lambda_j d_j(t)}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi[\alpha_j(\tau)]}}{\tau-t}d\tau\right\}+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_L K_3(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_L K_4(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}d\tau=h(t)\ , \qquad (1.2)$$

unde:

$$K_3(t,\tau)=K_1(t,\tau)+\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{n-j}(\tau)l_j\left[t,\alpha_{n-j}(\tau)\right],$$

$$K_4(t,\tau)=K_2(t,\tau)+\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{n-j}(\tau)l_j\left[t,\alpha_{n-j}(\tau)\right],$$

$$l_j\left[t,\alpha_{n-j}(\tau)\right]=\lambda_j\left[\frac{\alpha'_j(\tau)}{\alpha_j(\tau)-\alpha_j(t)}-\frac{1}{\tau-t}\right],$$

sunt nuclee regulate (genereează operatori integrali singulari compacți), $\lambda_j=+1$ dacă $\alpha(t)$ păstrează orientarea sau *j* este par şi $\lambda_j=-1$ dacă $\alpha(t)$ schimbă orientarea conturului sau *j* este impar. Evident, dacă $\alpha(t)$ schimbă orientarea şi $\alpha_n(t)=t$ , atunci *n* este un număr par.

Vom scrie ecuația (1.2) sub forma

$$A\varphi\equiv\sum_{j=1}^{n}\left\{a_j(t)\varphi[\alpha_j(t)]+\frac{\lambda_j}{\pi i}\int_L\frac{b_j(\tau)\varphi(\alpha_j)}{\tau-t}d\tau+c_j(t)\overline{\varphi(\alpha_j)}+\frac{\lambda_j}{\pi i}\int_L\frac{d_j(\tau)\overline{\varphi(\alpha_j)}}{\tau-t}d\tau\right\}+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_L K_5(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_L K_6(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}d\tau=h(t), \qquad (1.3)$$

unde:

$$K_5(t,\tau)=K_3(t,\tau)-\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{n-j}(\tau)\frac{b_j[\alpha_{n-j}(\tau)]-b_j(t)}{\alpha_{n-j}(\tau)-t},$$

$$K_6(t,\tau)=K_4(t,\tau)-\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{n-j}(\tau)\frac{d_j\left[\alpha_{n-j}(\tau)\right]-d_j(t)}{\alpha_{n-j}(\tau)-t}$$

sunt nuclee singulare.

Ecuaţiei (1.3) aplicăm la stânga operatorul

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{1.4}$$

şi obţinem:

$$SA\varphi\equiv\sum_{j=1}^{n}\left\{\lambda_j b_j(t)\varphi(\alpha_j)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{a_j(\tau)\varphi(\alpha_j)}{\tau-t}d\tau+\lambda_j d_j(t)\overline{\varphi(\alpha_j)}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{c_j(\tau)\overline{\varphi(\alpha_j)}}{\tau-t}d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L K_5(t,s)\varphi(s)ds+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L K_6(t,s)\overline{\varphi(s)}ds=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{h(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{1.5}$$

Aşa cum operatorul $S$ este inversabil $(S^2=I)$ în spaţiul $L_p$, rezultă că ecuaţiile (1.3) şi (1.5) şi, prin urmare, şi ecuaţiile (1.2) şi (1.5) sunt echivalente.

Transcriem ecuaţia (1.5) sub următoarea formă:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\lambda_j b_j(t)\varphi(\alpha_j)+\frac{a_j(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\alpha_j)}{\tau-t}d\tau+\lambda_j d_j(t)\overline{\varphi(\alpha_j)}+\frac{c_j(t)}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\alpha_j)}}{\tau-t}d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L K_7(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_L K_8(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}d\tau=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{h(\tau)}{\tau-t}d\tau, \tag{1.6}$$

unde:

$$K_7(t,\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_5(s,\tau)}{s-t}ds+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\alpha'_{n-j}(\tau)\frac{a_j[\alpha_{n-j}(\tau)]-a_j(t)}{\alpha_{n-j}(\tau)-t},$$

$$K_8(t,\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_6(s,\tau)}{s-t}ds+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\alpha'_{n-j}(\tau)\frac{c_j[\alpha_{n-j}(\tau)]-c_j(t)}{\alpha_{n-j}(\tau)-t}$$

sunt nuclee regulate.

Considerăm funcţia analitică pe porţiuni definită de integrala de tip Cauchy

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{1.7}$$

în care $\varphi(\tau)$ este soluţia căutată a ecuaţiei (1.1). Folosind formulele lui Sohotski [1]

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\quad S\varphi=\Phi^+(t)+\Phi^-(t)$$

obţinem următoarele expresii:

$$\varphi(\alpha_j)=\Phi^+(\alpha_j)-\Phi^-(\alpha_j)\left(j=\overline{1,n}\right),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\alpha_j)}{\tau-t}d\tau=\lambda_j\Phi^+(\alpha_j)+\lambda_j\Phi^-(\alpha_j)-\frac{1}{\pi i}\int_L\lambda_j\alpha'_{n-j}(\tau)l_j[t,\alpha_{n-j}(\tau)]\varphi(\tau)d\tau,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\alpha_j)}}{\tau-t}d\tau=\lambda_j\overline{\Phi^+(\alpha_j)}-\lambda_j\overline{\Phi^-(\alpha_j)}+\frac{1}{\pi i}\int_L S_j(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}d\tau,$$

unde:

$$S_j(t,\tau)=K_9[\alpha_j(t),\tau]-\lambda_j\alpha'_{n-j}(\tau)l_j[t,\alpha_{n-j}(\tau)],\ K_9(t,\tau)=\frac{1}{\tau-t}-\frac{(\bar\tau'(\tau))^2}{\bar\tau-\bar t}$$

sunt nuclee regulate.

Înlocuind aceste expresii în ecuaţiile (1.2) şi (1.6), apoi adunându-le şi scăzându-le, obţinem sistemul de probleme la frontieră:

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\{(1+\lambda_j)[a_j(t)+b_j(t)]\Phi^+(\alpha_j)-(1-\lambda_j)[a_j(t)-b_j(t)]\Phi^-(\alpha_j)+(1-\lambda_j)\overline{[c_j(t)-d_j(t)]\Phi^-(\alpha_j)}-$$

$$-(1+\lambda_j)\overline{[c_j(t)+d_j(t)]\Phi^-(\alpha_j)}\Big\}+\frac{1}{\pi i}\int_L K_{10}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_L K_{11}(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}d\tau=2H^+(t),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\{(1-\lambda_j)[a_j(t)+b_j(t)]\Phi^+(\alpha_j)-(1+\lambda_j)[a_j(t)-b_j(t)]\Phi^-(\alpha_j)+(1+\lambda_j)\overline{[c_j(t)-d_j(t)]\Phi^+(\alpha_j)}-$$

$$-(1-\lambda_j)\overline{[c_j(t)+d_j(t)]\Phi^-(\alpha_j)}\Big\}+\frac{1}{\pi i}\int_L K_{12}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_L K_{13}(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}d\tau=2H^-(t), \qquad (1.8)$$

unde:

$$K_{10}(t,\tau)=K_3(t,\tau)+K_7(t,\tau)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left[a_j(t)+b_j(t)\right]\alpha'_{n-j}(\tau)l_j\left[t,\alpha_{n-j}(\tau)\right],$$

$$K_{11}(t,\tau)=K_1(t,\tau)+K_8(t,\tau)+\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_j d_j(t)+c_j(t)\right]S_j(t,\tau),$$

$$K_{12}(t,\tau)=K_3(t,\tau)-K_7(t,\tau)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left[a_j(t)-b_j(t)\right]\alpha'_{n-j}(\tau)l_j\left[t,\alpha_{n-j}(\tau)\right],$$

$$K_{13}(t,\tau)=K_1(t,\tau)-K_8(t,\tau)+\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_j d_j(t)-c_j(t)\right]S_j(t,\tau)$$

sunt nuclee regulate şi

$$H^{\pm}(t)=\frac{1}{2}\left[h(t)\pm\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{h(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]$$

sunt funcții cunoscute. Presupunem acum că $\alpha(t)$ păstrează orientarea conturului. În acest caz $\lambda_j=1,\ j=\overline{1,n}$, şi expresia (1.8) capătă forma:

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\{\left[a_j(t)+b_j(t)\right]\ \Phi^+(\alpha_j)-\left[c_j(t)+d_j(t)\right]\ \overline{\Phi^-(\alpha_j)}\Big\}=H^+(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[K_{10}(t,\tau)\ \ \varphi(\tau)+K_{11}(t,\tau)\ \ \overline{\varphi(\tau)}\right]d\tau,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\{-\left[a_j(t)-b_j(t)\right]\Phi^-(\alpha_j)+\overline{\left[c_j(t)-d_j(t)\right]\Phi^+(\alpha_j)}\Big\}=$$

$$=H^-(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[K_{12}(t,\tau)\varphi(\tau)+K_{13}(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}\right]d\tau \qquad (1.9)$$

În sistemul (1.9) înlocuim *t* prin $\alpha_j(t),\ j=\overline{1,n}$, şi trecem la mărimi conjugate. În rezultat obținem un sistem neomogen de *4n* ecuații cu *4n* funcții necunoscute $\Phi^{\pm}(\alpha_j),\ \overline{\Phi^{\pm}(\alpha_j)},\ j=\overline{1,n}$. Acest sistem este rezolvabil dacă şi numai dacă determinantul ei $\Delta(t)$ este diferit de zero şi în acest caz sistemul are o soluție unică. Scriem acest determinat

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} A(t)+B(t) & -\left[C(t)+D(t)\right] & 0 & 0\\ \overline{C(t)}-\overline{D(t)} & -\left[\overline{A(t)}-\overline{B(t)}\right] & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\left[A(t)-B(t)\right] & C(t)-D(t)\\ 0 & 0 & -\left[\overline{C(t)}+\overline{D(t)}\right] & \overline{A(t)}+\overline{B(t)} \end{vmatrix}\neq 0, \qquad (1.10)$$

unde $A(t)\pm B(t)$ au, respectiv, forma

$$\begin{vmatrix} a_1(t)\pm b_1(t) & a_2(t)\pm b_2(t) & \dots & a_n(t)\pm b_n(t) \\ a_n(\alpha_1)\pm b_n(\alpha_1) & a_1(\alpha_1)\pm b_1(\alpha_1) & \dots & a_{n-1}(\alpha_1)\pm b_{n-1}(\alpha_1) \\ a_{n-1}(\alpha_2)\pm b_{n-1}(\alpha_2) & a_n(\alpha_2)\pm b_n(\alpha_2) & \dots & a_{n-2}(\alpha_2)\pm b_{n-2}(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ a_3(\alpha_{n-2})\pm b_3(\alpha_{n-2}) & a_4(\alpha_{n-2})\pm b_4(\alpha_{n-2}) & \dots & a_2(\alpha_{n-2})\pm b_2(\alpha_{n-2}) \\ a_2(\alpha_{n-1})\pm b_2(\alpha_{n-1}) & a_3(\alpha_{n-1})\pm b_3(\alpha_{n-1}) & \dots & a_1(\alpha_{n-1})\pm b_1(\alpha_{n-1}) \end{vmatrix},$$

iar $C(t)\pm D(t)$ se obțin din expresiile de mai sus prin înlocuirea lui *a* prin *c* şi, respectiv, *b* prin *d*.

Aşa cum $\Delta(t)$ este cvasidiagonal, atunci $\Delta(t)=\Delta_1(t)\cdot\overline{\Delta_1(t)}$,
unde

$$\Delta_1(t)=\begin{vmatrix} A(t)+B(t) & -[C(t)+D(t)] \\ \overline{C(t)}-\overline{D(t)} & -[\overline{A(t)}-\overline{B(t)}] \end{vmatrix}.$$

Prin urmare, dacă ecuația (1.1) este rezolvabilă, atunci este rezolvabil şi sistemul de mai sus, adică $\Delta(t)\neq 0$. Folosind regula lui Cramer, obținem:

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\Delta_{j+1,n}(t)\left\{H^+[\alpha_j(t)]-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{10}[\alpha_j(t),\tau]\varphi(\tau)+K_{11}[\alpha_j(t),\tau]\overline{\varphi(\tau)}d\tau\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\Delta_{j+1,n}(t)\left\{\overline{H^+[\alpha_j(t)]}-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{10}[\alpha_j(t),\tau]\varphi(\tau)+K_{11}[\alpha_j(t),\tau]\overline{\varphi(\tau)}d\tau\right)}\right\}, \qquad (1.11)$$

$$\Phi^-(t)=\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\Delta^*_{j+1,n}(t)\left\{H^-[\alpha_j(t)]-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{12}[\alpha_j(t),\tau]\varphi(\tau)+K_{13}[\alpha_j(t),\tau]\overline{\varphi(\tau)}d\tau\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\Delta^*_{j+1,n}(t)\left\{\overline{H^-[\alpha_j(t)]}-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{12}[\alpha_j(t),\tau]\varphi(\tau)+K_{13}[\alpha_j(t),\tau]\overline{\varphi(\tau)}d\tau\right)}\right\}, \qquad (1.12)$$

unde $\Delta_{j+1,n}(t),\ \Delta^*_{j+1,n}(t)\ (j=0,1,...,2n-1)$ sunt complementele algebrice ale liniei *j* şi coloanei *n*, respectiv ale determinanților $\Delta_1(t),\ \overline{\Delta_1(t)}$.

Înlocuind expresiile (1.11) şi (1.12) în formula lui Sohotski, obținem că orice soluție a ecuației (1.11) reprezintă soluție a ecuației de tip Fredholm:

$$\varphi(t)=H(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L K_{14}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L K_{15}(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}d\tau-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L K_{16}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}-$$
$$-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L K_{17}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}, \qquad (1.13)$$

unde:

$$K_{14}(t,\tau)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\left\{\frac{\Delta_{j+1,n}(t)}{\Delta_1(t)}K_{10}[\alpha_j(t),\tau]+\frac{\Delta^*_{j+1,n}(t)}{\Delta_1(t)}K_{12}[\alpha_j(t),\tau]\right\},$$

$$K_{15}(t,\tau)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\left\{\frac{\Delta_{j+1,n}(t)}{\Delta_1(t)}K_{11}[\alpha_j(t),\tau]+\frac{\Delta^*_{j+1,n}(t)}{\Delta_1(t)}K_{13}[\alpha_j(t),\tau]\right\},$$

$$K_{16}(t,\tau)=\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\left\{\frac{\overline{\Delta_{j+1,n}(t)}}{\overline{\Delta_1(t)}}K_{10}[\alpha_j(t),\tau]+\frac{\overline{\Delta^*_{j+1,n}(t)}}{\overline{\Delta_1(t)}}K_{12}[\alpha_j(t),\tau]\right\},$$

$$K_{17}(t,\tau)=\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\left\{\frac{\overline{\Delta_{j+1,n}(t)}}{\overline{\Delta_1(t)}}K_{11}\left[\alpha_j(t),\tau\right]+\frac{\overline{\Delta^*_{j+1,n}(t)}}{\overline{\Delta_1(t)}}K_{13}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\right\},$$

sunt nuclee regulate, iar

$$H(t)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\left\{\frac{\Delta_{j+1,n}(t)}{\Delta_1(t)}H^+\left[\alpha_j(t)\right]-\frac{\Delta^*_{j+1,n}(t)}{\Delta_1(t)}H^-\left[\alpha_j(t)\right]\right\}+$$

$$+\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\left\{\frac{\overline{\Delta_{j+1,n}(t)}}{\overline{\Delta_1(t)}}\overline{H^+\left[\alpha_j(t)\right]}-\frac{\overline{\Delta^*_{j+1,n}(t)}}{\overline{\Delta_1(t)}}\overline{H^-\left[\alpha_j(t)\right]}\right\}$$

este o funcţie cunoscută.

Teoria ecuaţiilor de tip Fredholm, similar ecuaţiei (1.13), este expusă în [1]. Fie ecuaţia (1.13) rezolvabilă, atunci $\Delta(t)\neq 0$ (în caz contrar ecuaţia (1.13) n-ar avea sens). Rezolvând ecuaţia (1.13), construim funcţiile $\Phi^+(t)$ şi $\Phi^-(t)$. Aceste funcţii fiind limitele unor funcţii analitice în $G^+$ şi $G^-$ trebuie să verifice condiţiile [1]:

$$\Phi^+(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau-t}=0 \text{ şi } \Phi^-(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-t}=0.$$

Din aceste condiţii obţinem că numai acele soluţii ale ecuaţiei regularizate (1.13) sunt şi soluţiile ecuaţiei singulare (1.11) care îndeplinesc condiţiile:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\Delta_{j+1,n}(t)\left\{H^+\left[\alpha_j(t)\right]-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{10}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\varphi(\tau)+K_{11}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\overline{\varphi(\tau)}d\tau\right)\right\}+\\
&+\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\Delta_{j+1,n}(t)\left\{\overline{H^+\left[\alpha_j(t)\right]}-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{10}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\varphi(\tau)+K_{11}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\overline{\varphi(\tau)}d\tau\right)}\right\}-\\
&-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\left(\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\Delta_{j+1,n}(t)\left\{H^+\left[\alpha_j(t)\right]-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{10}\left[\alpha_j(t),s\right]\varphi(s)+K_{11}\left[\alpha_j(t),s\right]\overline{\varphi(s)}ds\right)\right\}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\Delta_{j+1,n}(t)\left\{\overline{H^+\left[\alpha_j(t)\right]}-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{10}\left[\alpha_j(t),s\right]\varphi(s)+K_{11}\left[\alpha_j(t),s\right]\overline{\varphi(s)}ds\right)}\right\}\right)=0,
\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\Delta_{j+1,n}(t)\left\{H^-\left[\alpha_j(t)\right]-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{12}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\varphi(\tau)+K_{13}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\overline{\varphi(\tau)}d\tau\right)\right\}+\\
&+\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\Delta^*{}_{j+1,n}(t)\left\{\overline{H^-\left[\alpha_j(t)\right]}-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{12}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\varphi(\tau)+K_{13}\left[\alpha_j(t),\tau\right]\overline{\varphi(\tau)}d\tau\right)}\right\}-\\
&-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\left(\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\Delta^*{}_{j+1,n}(t)\left\{H^-\left[\alpha_j(t)\right]-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{12}\left[\alpha_j(t),s\right]\varphi(s)+K_{13}\left[\alpha_j(t),s\right]\overline{\varphi(s)}ds\right)\right\}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{\Delta_1(t)}\sum_{j=n}^{2n-1}(-1)^j\Delta^*{}_{j+1,n}(t)\left\{\overline{H^-\left[\alpha_j(t)\right]}-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(K_{12}\left[\alpha_j(t),s\right]\varphi(s)+K_{13}\left[\alpha_j(t),s\right]\overline{\varphi(s)}ds\right)}\right\}\right)=0.
\end{aligned}$$

Astfel am obţinut următorul rezultat:

***Teorema 1.1.*** *Fie translaţia $\alpha(t)$ păstrează orientarea conturului $L$. Ecuaţia (1.1) este rezolvabilă dacă şi numai dacă $\Delta(t)\neq 0, t\in L$. Dacă această condiţie este verificată, atunci ecuaţia (1.1) se reduce la ecuaţia de tip Fredholm (1.13). Soluţiile ecuaţiei (1.13) sunt şi soluţii ale ecuaţiei (1.1) dacă şi numai dacă ele verifică condiţiile (1.14) şi (1.15).*

Rezultate similare se obţin şi în cazul în care funcţia $\alpha(t)$ schimbă orientarea conturului.

**Exemplu**

Vom considera un exemplu care ilustrează raţionamentele făcute mai sus. Considerăm următoarea ecuaţie integrală singulară

$$A\varphi \equiv t^{-1}\varphi(-t)+\frac{it}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau+it}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(1+\tau^{-2}t^{-2}\right)\varphi(\tau)d\tau = 1+t^2, \tag{2.1}$$

unde $L$ este cercul $\{z:|z|=r\},\ r>0,\ r\neq 1$. Astfel, $z=0\in G^+$ şi punctele $\pm 1, \pm i$ nu aparţin conturului $L$.

Scriem ecuaţia (2.1) sub forma:

$$t^{-1}\varphi(-t)+\frac{it}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(-i\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(1+\tau^{-2}t^{-2}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = 1+t^2 \tag{2.2}$$

Aplicăm la stânga operatorul $S$ şi obţinem o ecuaţie echivalentă cu (2.2), apoi aplicăm formulele lui Sohotski. În rezultatul acestor transformări obţinem sistemul

$$\begin{gathered} t^{-1}\Phi^+(-t)+it\Phi^+(-it)=1+t^2-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(2-\tau^{-1}t^{-1}\right)\varphi(\tau)d\tau, \\ -t^{-1}\Phi^-(-t)+it\Phi^-(-it)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\tau^{-1}t^{-1}+\tau^{-2}t^{-2}-1\right)\varphi(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Determinantul $\Delta(t)$ are forma

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & t^{-1} & it \\ -t & 0 & 0 & -it^{-1} \\ -t^{-1} & -it & 0 & 0 \\ 0 & it^{-1} & t & 0 \end{vmatrix} = \left(t^4-t^{-4}\right)^2$$

şi este diferit de zero pe $L$, deoarece punctele $\pm 1, \pm i$ nu aparţin conturului $L$.

Rezolvând sistemul (2.3) prin metoda lui Cramer, obţinem:

$$\Phi^+(t)=t^5-2t^3-2t+2t^{-1}+t^{-3}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[-2t^3-2t+2t^{-1}+2t^{-3}-\left(it^2+it^{-2}-1-t^{-4}\right)\tau^{-1}\right]\varphi(\tau)d\tau, \tag{2.4}$$

$$\Phi^-(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[-t^3+t+t^{-1}-t^{-3}-\left(it^2+1+it^{-2}+t^{-1}\right)\tau^{-1}+\left(-t-t^{-1}+t^{-3}+t^{-5}\right)\tau^{-2}\right]\varphi(\tau)d\tau. \tag{2.5}$$

Aplicăm formulele lui Sohotski şi obţinem ecuaţia lui Fredholm:

$$\begin{gathered} \left(t^4-t^{-4}\right)\varphi(\tau)=t^5-2t^3-2t-2t^{-1}+t^{-3}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(3t^3+t-3t^{-1}-t^{-3}\right)\varphi(\tau)d\tau+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int_L 2i\left(t^2+t^{-2}\right)\tau^{-1}\varphi(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(t+t^{-1}-t^{-3}-t^{-5}\right)\tau^{-2}\varphi(\tau)d\tau \end{gathered}$$

cu nucleu degenerat. Soluţiile acestei ecuaţii se obţin prin metodă obişnuită. Avem $\varphi(t)=t+t^{-1}$. Înlocuim această funcţie în (1.16) şi în (1.17), obţinem $\Phi^+(t)=t$, $\Phi^-(t)=-t^{-1}$, adică soluţia generală a ecuaţiei integrale (2.1) are forma $\varphi(t)=t=t^{-1}$.

**Referinţe:**

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - Москва: Физматгиз, 1968.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом. - Москва: Наука, 1977.
3. Neagu V., Paladi O., Pancenco I., Vornicescu G. Asupra rezolvabilităţii unor ecuaţii integrale singulare complete // Studia Universitatis. Seria „Ştiinţe exacte şi economice", 2010, nr.2, p.38-47.

*Prezentat la 02.05.2012*