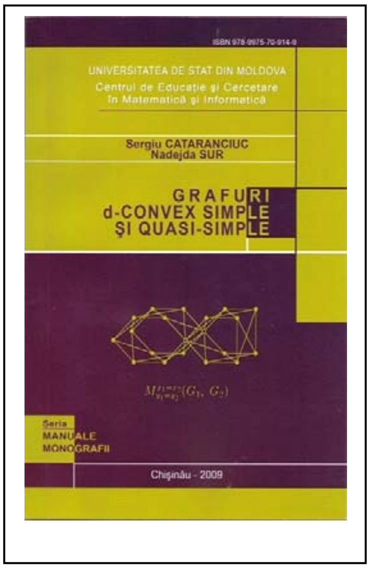
RECENZIE

ASPECTE TEORETICO-APLICATIVE ALE MULŢIMILOR CONVEXE ÎN STRUCTURI DISCRETE

THEORETICAL AND APPLIED ASPECTS OF CONVEX SETS IN DISCRETE STRUCTURES

Anatol GODONOAGĂ
Catedra Cibernetică şi Informatică Economică, ASEM

Recenzie la monografia ***Grafuri d-convex simple şi quasi-simple.*** – Chişinău, CECMI USM, 2009. - 200 p. (autori: *Sergiu Cataranciuc, Nadejda Sur*)



Interesul matematicienilor faţă de noţiunea de convexitate a crescut prin anii '50 ai secolului trecut, în special datorită rolului avansat al acesteia la soluţionarea problemelor de programare liniară, programare neliniară, din teoria jocurilor, teoria dirijării optimale a proceselor etc. Astăzi este incontestabil rolul mulţimilor convexe la soluţionarea problemelor de optimizare pe structuri discrete, în special pe grafuri şi hipergrafuri. Această situaţie îndeamnă cercetătorii la investigaţii teoretice fundamentale în domeniu cu aplicaţii ulterioare la soluţionarea problemelor practice. În contextul menţionat, apariţia unei monografii ce ţine de studierea mulţimilor convexe în grafurile neorientate este binevenită. Lucrarea conţine rezultate impunătoare în domeniu, majoritatea aparţinând autorilor, şi este consacrată studierii unor clase speciale de grafuri cu proprietăţi metrice pronunţate Pe aceste clase se rezolvă în mod eficient mai multe probleme aplicative clasice, în special probleme de amplasare.

Investigaţiile ce ţin de studierea convexităţii au fost determinate de încercările matematicienilor din Moldova de a soluţiona un şir de probleme importante, care au condus la dezvoltarea a două direcţii importante în matematică:

a) introducerea noţiunii de *spaţiu median* şi rezolvarea în acest spaţiu a *problemei Weber;*

b) introducerea noţiunii de *convexitate metrică* de către academicianul Petru Soltan, chiar dacă această noţiune a fost în mod independent definită de matematicieni cu renume, precum K.Menger, De Groat, Alexandrov-Zalgaller. Însă, aceştia s-au oprit doar la definiţii. Avantajul dlui Petru Soltan a fost că dânsul, precum şi majoritatea absolută de matematicieni din fosta URSS, inclusiv matematicianul Alexandroff – geometru cu renume mondial, n-au ştiut de existenţa definiţiilor propuse anterior, desigur în termeni diferiţi, însă cu esenţe echivalente. În „Matematicescaia Entziclopedia" (5 volume, Moscova), tradusă în Spania şi în Olanda, este inclusă definiţia propusă în termenii dlui Petru Soltan.

Ulterior, prin aportul mai multor matematicieni din Moldova (P.Soltan, V.Soltan, D.Zambiţchi, Gh.Prisăcaru, S.Cataranciuc, V.Cepoi, O.Topală, A.Poştaru ş.a.), au fost obţinute rezultate de valoare la soluţionarea unor probleme importante cu caracter teoretico-aplicativ, cum ar fi: fundamentarea teoriei *d*-convexităţii, generalizarea *d*-convexă a teoremei lui Krasnosel'sky despre mulţimile stelate, introducerea noţiunii de funcţie *d*-convexă, generalizarea teoremei lui Krein-Mil'man pentru grafurile metrice, generalizarea teoremelor din programarea convexă, divizarea unui poligon rectangular în părţi *d*-convexe.

Monografia „Grafuri *d*-convex simple şi quasi-simple" conţine rezultate originale legate de studierea *d*-convexităţii în structuri discrete, reprezentate prin grafuri. În primul rând este de menţionat că lucrarea completează în mod esenţial rezultatele teoretice cunoscute ce ţin de fundamentarea cercetărilor legate de studierea diferitelor modele de convexitate. Capitolul I conţine mai multe rezultate clasice ce se referă la dezvoltarea generală a teoriei convexităţii, în acelaşi rând noţiuni şi proprietăţi de bază necesare pentru expunerea rezultatelor obţinute de către autori şi examinate în capitolele ce urmează.

Prin intermediul noțiunii de *d*-convexitate este descrisă şi caracterizată o nouă clasă importantă de grafuri, care în contextul dezvoltării teoriei *d*-convexității prezintă un deosebit interes.

Un graf se numeşte *d-convex simplu* dacă acesta nu conține mulțimi *d*-convexe $A \subset X$ cu proprietatea $2 < |A| < |X|$. Grafuri *d*-convex *quasi-simple* sunt grafurile în care orice mulțime *d*-convexă generează un subgraf complet. Prin aportul dlui Sergiu Cataranciuc la studierea acestor clase de grafuri au fost generalizate rezultatele obținute de către matematicienii S.Hebbare şi M.Batten. Caracterizarea constructivă obținută ține de o operație specială definită asupra grafurilor neorientate: fie că G_1 G_2 reprezintă două cópii ale unui graf $G = (X;V)$. Vârfurile $x_1 \in X(G_1)$ şi $x_2 \in X(G_2)$ se numesc *reciproce,* dacă acestea reprezintă nişte cópii ale aceluiaşi vârf $x \in X(G)$. Prin $L_2(G)$ se notează graful ce se obține din G_1 şi G_2 adăugând toate muchiile ce unesc fiecare vârf $x \in X(G_1)$ cu vârfurile din vecinătatea vârfului reciproc al lui G_2. Dacă $L_2(G)$ se mai completează cu vârfuri noi, incidente unor perechi de vârfuri reciproce, atunci graful obținut se notează prin $CL_2(G)$. În cazul unui arbore T, ce conține cel puțin trei vârfuri, poate fi obținut un arbore T_0 prin eliminarea vârfurilor suspendate din T. Dacă fiecare vârf al lui T_0 se uneşte prin nişte muchii cu vârfurile din vecinătatea vârfului reciproc al arborelui T, atunci se obține un graf nou, notat prin $L(T, T_0)$.

Prin intermediul operațiilor descrise a fost obținută o caracterizare constructivă a clasei de grafuri d-convex simple planare, în baza căreia se rezolvă efectiv un şir de probleme clasice: problema izomorfismului, problema construcției arborelui Steiner, problema centrului şi a medianei etc. Conform acestei caracterizări, un graf $G = (X;U)$, ce conține o mulțime numerabilă de vârfuri, este d-convex simplu şi planar dacă şi numai dacă $G = L(T, T_0) = CL_2(T_0)$. Anume prin acest rezultat s-a demonstrat că structura specială a grafurilor d-convex simple planare permite elaborarea unor algoritmi polinomiali, iar în unele cazuri chiar algoritmi liniari, pentru soluționarea unor probleme clasice.

Grafurile d-convex quasi-simple, la rândul lor, prezintă o generalizare a grafurilor d-convex simple. Studierea lor ține de o familie de grafuri R(T) care pot fi obținute dintr-un arbore T, completându-l pe acesta cu muchii noi conform unor reguli speciale. În legătură cu studierea grafurilor d-convex quasi-simple, ca rezultat de importanță majoră poate fi menționat următorul: pentru orice graf planar d-convex şi quasi-simplu $G = (X;U), |X| \geq 4,$ există un arbore T şi un graf $R \in R(T)$, astfel încât $G = L(R, T_0)$.

La demonstrarea unor rezultate din monografie un rol important are caracteristica grafurilor planare d-convex simple şi quasi-simple: un graf planar este d-convex simplu şi quasi-simplu dacă şi numai dacă el nu conține mulțimi d-convexe, care ar genera unul din grafurile C_4 (ciclu de lungimea patru), $K_4 - e$ (graful complet cu patru vârfuri, lipsit de o muchie) sau P_3 (lanț elementar cu trei vârfuri).

Structura d-convexă a grafurilor a fost studiată în monografie pentru un şir de clase bine cunoscute de grafuri, fiind obținute rezultate importante. Problemele ce țin de structura d-convexă a grafurilor a fost analizată pentru grafurile ereditar-modulare, cordale, ereditare în dependență de distanță. Aceste clase de grafuri au fost studiate anterior sub diverse aspecte în lucrările matematicienilor H.-Y. Bandelt, M.Golumbic, E.Horvorka ş.a.

În mod special ar trebui de menționat importanța rezultatelor din ultimul capitol, în care se studiază problema convexității simple a grafurilor orientate. Se cunoaşte că în cazul grafurilor orientate funcția distanței se comportă ca o „semimetrică” (nu are loc proprietatea comutativă a funcției). Definind noțiunea de convexitate simplă în acest caz, autorii au obținut rezultate interesante legate de studierea convexității simple în grafurile orientate.

Consider că monografia conține un şir de rezultate valoroase susceptibile să contribuie la dezvoltarea teoriei convexității metrice pe structuri discrete cu extinderi în soluționarea problemelor practice. Lucrarea poate fi utilă specialiştilor preocupați de studierea convexității în diverse spații metrice. De asemenea, rezultatele expuse pot servi drept bază a unui curs pentru studenții şi masteranzii din cadrul facultăților de matematică.