GENERALIZAREA GRUPURILOR CRISTALOGRAFICE DE CATEGORIA G_{320} CU $\overline{3}$ – SIMETRIE

Alexandru LUNGU, Marina ROŞCA

Universitatea de Stat din Moldova

În acest articol sunt deduse grupuri de diferite tipuri posibile ale $\overline{3}$ – simetriei din grupurile cristalografice de categoria G_{320} în calitate de grupuri generatoare şi este descrisă structura generală a unora din grupurile deduse.

Cuvinte-cheie: *simetrii generalizate, grupuri, cvasiomomorfisme de dreapta.*

THE GENERALIZATION OF THE CRYSTALLOGRAPHIC GROUPS OF CATEGORY G_{320} WITH THE $\overline{3}$ – SYMMETRY

In the present paper there are obtained and described the general structure of groups of different possible types of $\overline{3}$ – symmetry with the Crystallographic groups of the category G_{320} in quality of generating groups.

Keywords: *generalized symmetries, groups, right quasi-homomorphism*.

1. Una dintre generalizările recente ale simetriei clasice în sens „fizic" (simetria clasică se completează cu o lege de transformare parţială sau totală a „indicilor"-calităţi localizaţi în punctele figurii geometrice considerate F), apărută în anii 70 ai secolului XX, este $\overline{P}$ – simetria [3,8-10]. Scopul studiului efectuat este de a analiza, în general, $\overline{3}$ – simetria (cazul când grupul de definire P este ciclic de ordinul al treilea), apoi de a deduce grupurile de diferite tipuri posibile de $\overline{3}$ – simetrie din grupurile de tablete (grupurile cristalografice de categoria G_{320}) în calitate de grupuri generatoare şi, în sfârşit, de a descrie structura concretă a unora din grupurile deduse.

2. Vom comenta pe scurt bazele teoriei generale a $\overline{P}$ – simetriei, elaborate într-un şir de lucrări (a se vedea Bibliografia din [5]) cu scopul de a elucida mai bine posibilităţile de aplicare a aparatului matematic în cercetări concrete. Fiecărui punct al figurii geometrice date F i se atribuie cel puţin unul din „indicii" mulţimii $N = 1,2,3,...,m$, care reprezintă m mărimi orientate de aceeaşi natură generală (faze ale aceluiaşi fenomen, de exemplu, vectori polari de acelaşi modul, vectori axiali, tensori etc.). Se fixează grupul tranzitiv de substituţii P al acestor „indici". În rezultat se obţine figura „indexată" $F^{(N)}$.

Aplicaţia $f : F^{(N)} \to F^{(N)}$, unde $f = g^{(p)} = pg$, se numeşte transformare de $\overline{P}$ – simetrie a figurii „indexate" $F^{(N)}$, dacă componenta geometrică g acţionează atât asupra punctelor M din F, cât şi asupra „indicilor" i localizaţi în punctele M, conform unei legi date ce este independentă de poziţia punctelor M, iar componenta p, fiind o substituţie din grupul P, este o transformare suplimentară a „indicilor". Componentele p şi g ale transformării $g^{(p)}$, în general, nu sunt comutative: $gp \neq pg$. Mulţimea $G^{(P)}$ transformărilor de $\overline{P}$ –simetrie a unei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează un grup cu legea de compoziţie a elementelor $p_i g_i \cdot p_j g_j = p_k g_k$, unde $g_k = g_i g_j$, $p_k = p_i p_j^{g_i}$, $p_j^{g_i} = g_i p_j g_i^{-1} = \vec{\varphi}_{g_i}(p_j)$, iar $\varphi(g_i) = \vec{\varphi}_{g_i} \in AutP$.

Fie $G^{(P)}$ un grup oarecare de $\overline{P}$ –simetrie. Atunci totalitatea componentelor geometrice g formează grupul generator $G = \{g \mid g^{(p)} \in G^{(P)}\}$, iar totalitatea componentelor-substituţii p formează mulţimea $P' = \{p \mid g^{(p)} \in G^{(P)}\}$, care, în general, nu este grup, dar verifică condiţia $e \subseteq P' \subseteq P$. Grupul G se numeşte grup generator pentru $G^{(P)}$, P se numeşte grup de definire, iar totalitatea grupurilor de $\overline{P}$ – simetrie cu acelaşi grup generator – familie. Intersecţia H' a grupului $G^{(P)}$ cu grupul său generator G reprezintă subgrupul lui de simetrie ($H' = G^{(P)} \cap G$), iar intersecţia Q a grupului $G^{(P)}$ cu totalitatea P' a componentelor-substituţii reprezintă subgrupul de transformări $P-$identice ale grupului $G^{(P)}$ ($Q = G^{(P)} \cap P' = G^{(P)} \cap P$).

Subgrupul de transformări $P-$identice Q este un divizor normal în $G^{(P)}$, deoarece Q joacă rolul de nucleu al omomorfismului λ al grupului $G^{(P)}$ pe grupul G conform regulii $\lambda[g^{(p)}] = g$. În dependenţă de coraportul concret între unitatea e a grupului de definire P, subgrupul de transformări $P-$identice Q, submulţimea P' a componentelor-substituţii şi însuşi grupul P, ce verifică condiţiile $e \le Q \subseteq P' \subseteq P$, grupurile $G^{(P)}$ de $\bar{P}$–simetrie se clasifică pe tipuri. Anume: grupul $G^{(P)}$ de $\bar{P}$–simetrie este generator ($G^{(P)}$=G, dacă $e = Q = P' = P$), major (dacă $e < Q = P' = P$), minor (dacă $e = Q < P' = P$), mijlociu (dacă $e < Q < P' = P$), semimajor (dacă $e < Q = P' < P$), semiminor (dacă $e = Q < P' < P$), semimijlociu (dacă $e < Q < P' < P$), pseudominor (dacă $e = Q \subset P' \subset P$ şi P' nu este grup) sau pseudomijlociu (dacă $e < Q \subset P' \subset P$ şi P' nu este grup). Este evident că grupurile minore, semiminore şi pseudominore sunt izomorfe cu grupurile lor generatoare.

Grupurile de $P-$simetrie Zamorzaev [5-7] sunt subgrupuri ale produsului direct al grupului de definire P cu grupul generator G. Grupurile de $P-$simetrie se deduc din P şi G conform teoremei principale a $P-$simetriei, folosind aplicaţiile omomorfe ale lui G pe P' (P' verifică condiţia $e \le P' \le P$).

În cazul $\bar{P}-$simetriei orice grup $G^{(P)}$ este subgrup în produsul semidirect de dreapta al grupului de definire P cu grupul generator G, însoţit de omomorfismul fixat $\varphi : G \to AutP$, unde $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g$ pentru orice $g \in G$ şi $\bar{\varphi}_g(p) = gpg^{-1}$, adică $G^{(P)} \le P \rtimes_{\varphi H(\Phi)} G.$ În acest caz H este nucleul omomorfismului φ ($H = Ker\varphi$), iar Φ este imaginea completă a grupului G ($\Phi = \mathrm{Im}\varphi \le AutP$).

Fiind date grupurile *G* şi *P* şi omomorfismul φ cu nucleul *H* al grupului *G* pe subgrupul Φ din grupul tuturor automorfismelor lui *P*, aplicaţia ψ a grupului *G* în grupul *P* (conform legii $\psi(g) = p$) se numeşte cvasiomomorfism de dreapta, dacă pentru orice g_i şi g_j din *G* $\psi(g_i g_j) = \psi(g_i) \cdot \bar{\varphi}_{g_i}[\psi(g_j)] = p_i \bar{\varphi}_{g_i}(p_j) = p_k$, unde $\bar{\varphi}_{g_i} = \varphi(g_i)$. În acest caz, φ se numeşte omomorfismul însoţitor al aplicaţiei ψ [8] (compară cu [5]).

Dacă $Ker\varphi = G$, atunci ψ degenerează în omomorfism obişnuit. Nucleul aplicaţiei cvasiomomorfe de dreapta ψ ($Ker\psi = H'$) este un subgrup în G, care, în general, nu este un divizor normal. Imaginea completă P' a grupului G la cvasiomomorfismul de dreapta ψ ($\mathrm{Im}\psi = P'$), în general, nu este grup, dar verifică condiţia $e \subset P' \subseteq P$. La cvasiomomorfismul de dreapta nedegenerat ψ cu nucleul H' (unde $H' \ne G$) orice g_i din $G \setminus H'$ se aplică pe un element $p_i \ne e$ (unde e este unitatea grupului dat P); $\psi(g_i H') = p_i$ şi dacă $g_i H' \ne g_j H'$, atunci şi $p_i \ne p_j$.

Aplicaţia $\tilde{\psi}$ a grupului G în mulţimea claselor de resturi de dreapta ale grupului P în raport cu subgrupul său adevărat Q (adică, $Q < P$), conform legii $\tilde{\psi}(g_i) = Qp_i$, se numeşte cvasiomomorfism de dreapta generalizat, dacă $\tilde{\psi}(g_i) = Qp_i$ şi $\tilde{\psi}(g_j) = Qp_j$ implică egalităţile $\tilde{\psi}(g_i g_j) = Qp_i \cdot \bar{\varphi}_{g_i}(Qp_j) = Qp_k$. Pentru ca aplicaţia $\tilde{\psi}$ a grupului G în mulţimea claselor de resturi de dreapta ale grupului finit P în raport cu subgrupul său adevărat Q (conform legii $\tilde{\psi}(g) = Qp$) să fie cvasiomomorfism de dreapta generalizat, este necesar şi suficient ca $\bar{\varphi}_g(Q) = p^{-1}Qp$ pentru orice element g al grupului G şi $Qp = \tilde{\psi}(g)$.

În orice grup $G^{(P)}$ de $\bar{P}$-simetrie cu grupul generator G, nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi : G \to AutP$, subgrupul Q de transformări *P*-identice şi subgrupul H' de simetrie se conţine în calitate de subgrup un grup $H^{(P)}$ (cu operaţia de grup pe componente), care formal nu se deosebeşte de grupurile de *P*-simetrie. Din această cauză grupul $H^{(P)}$ este considerat drept grup de *P*-simetrie. $H^{(P)}$ are grupul generator H, acelaşi subgrup Q de transformări *P*-identice şi subgrupul de simetrie H'', unde $H'' = H' \cap H$.

Pentru grupurile finite P orice grup de $\overline{P}$-simetrie poate fi dedus din grupul său generator G, cunoscând nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi : G \to AutP$ (unde $H \lhd G$), conform paşilor următori: 1) se găsesc în P toate subgrupurile Q şi submulţimile P' ce se descompun în clase de resturi de dreapta în raport cu Q, iar în G toate subgrupurile H' de indice egal cu puterea mulţimii tuturor claselor de resturi de dreapta a lui P' în raport cu Q, pentru care există izomorfismul grupurilor-factor P''/Q şi H/H'', unde $e \le Q \le P'' \subseteq P'$ şi $Q \lhd P'' < P$, iar $H'' = H' \cap H$ şi $H'' \lhd H$; 2) se construieşte cvasiomomorfismul de dreapta generalizat $\tilde{\psi}$ cu nucleul H' al grupului G pe mulţimea tuturor claselor de resturi de dreapta a lui P' în raport cu Q, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul H, şi care păstrează corespondenţa dintre elementele lui P'' şi H obţinută în rezultatul izomorfismului grupurilor-factor H/H'' şi P''/Q; 3) se combină în perechi fiecare *g* din *G* cu fiecare p' din $Qp = \tilde{\psi}(g)$ şi în mulţimea acestor perechi se introduce operaţia $p_i g_i \cdot p_j g_j = p_k g_k$, unde $p_k = p_i \bar{\varphi}_{g_i}(p_j)$, $g_k = g_i g_j$, $\bar{\varphi}_{g_i} = \varphi(g_i)$ şi $\bar{\varphi}_{g_i}(p_j) = g_i p_j g_i^{-1}$ (teorema principală a $\overline{P}$-simetriei) [5,11,12].

Vom menţiona că, pentru $Q = e$, adică pentru grupurile minore, semiminore şi pseudominore, teorema principală a $\overline{P}$-simetriei se simplifică foarte mult. În aceste cazuri se folosesc de acum aplicaţiile cvasiomomorfe de dreapta ψ cu nucleul H' al grupului generator G pe grupul de definire P, pe subgrupul P' şi, respectiv, pe submulţimea cu unitate P' a grupului P care nu mai este grup. Cvasiomomorfele de dreapta ψ, menţionate mai sus, sunt însoţite de omomorfismul φ cu nucleul H şi păstrează corespondenţa dintre elementele grupurilor P'' ($e \le P'' \subseteq P'$) şi H, obţinută în rezultatul izomorfismului grupului-factor H/H'' pe P'', unde $H'' = H' \cap H$ şi $H'' \lhd H$.

Pentru grupurile $G^{(P)}$ de $\overline{P}-$simetrie în lucrările [5,12] au fost propuse simboluri cu mai mulţi termeni (simboluri polinomiale), care dau posibilitatea de a le prezenta univoc. Anume: dacă două grupuri sunt echivalente (adică, dacă ele au subgrupuri de simetrie conjugate între ele şi cu acelaşi conţinut geometric), atunci ele se prezintă cu acelaşi simbol. Pentru grupurile minore, semiminore şi pseudominore acest simbol are forma: $G|H'[\{P,P_i\}|(P')|P'';H/H'''/H'']$. Simbolul polinomial include în sine o informaţie detaliată despre structura grupului respectiv. Anume: G este grupul generator, H' este subgrupul de simetrie în $G^{(P)}$, $\{P,P_i\}$ este simbolul grupului de definire (grup concret de substituţii cu subgrupul staţionar P_i), (P') este totalitatea componentelor-substituţii ale elementelor grupului $G^{(P)}$, H este nucleul omomorfismului însoţitor $\varphi : G \to AutP$, $H'' = H' \cap H$ este subgrupul de simetrie în subgrupul de $P-$simetrie $H^{(P)}$. Mai mult decât atât, $H/H'''/H''$ este simbolul trinomial al grupului $H^{(P)}$; H/H'' este izomorf cu P'', unde $P'' = \{p \mid h^{(p)} \in H^{(P)}\}$; H'''/H'' este izomorf cu $P_i{}' = P_i \cap P''$. Vom menţiona că grupurile concrete de substituţii P şi subgrupurile lor staţionare P_i (ca şi în cazul $P-$simetriei) le vom prezenta cu ajutorul simbolurilor grupurilor de categoria G_{30} izomorfe lor, care sunt scrise în simbolica lui Schonflies [2,4].

3. Vom expune pe scurt rezultatele concrete obţinute în procesul de deducere şi de descriere a grupurilor de $\overline{3}-$simetrie din grupurile de tablete în calitate de grupuri generatoare G. Grupurile cristalografice de categoria G_{320} (numite şi grupuri de tablete) sunt grupurile tridimensionale punctuale cu un plan invariant

ce trece prin punctul singular). Grupurile de tablete le vom prezenta în simbolica lui Şubnikov cu ajutorul unui sistem ireductibil generator. Conform lui Şubnikov, axele şi planele de simetrie se notează tot aşa ca şi în simbolica internaţională, pe când perpendicularitatea elementelor de simetrie se notează nu prin linie fracţionară, ci prin două puncte, iar paralelismul lor – printr-un punt. Axele de rotoreflexie de ordinul N se notează prin simbolul $\tilde{N}$.

Deoarece grupul $P\ (\cong C_3)$ este de ordin prim, el nu conţine subgrupuri netriviale P'. Prin urmare, pentru $\overline{3}$ – simetrie nu există atât grupuri semimajore, semiminore, mijlocii sau semimijlocii, cât şi grupuri pseudo-mijlocii. Deci, în orice familie de grupuri de $\overline{3}$ – simetrie pot exista numai grupuri generatoare, majore, minore sau pseudominore. Vom menţiona că în grupurile de $\overline{3}$ – simetrie nu pot exista în calitate de subgrupuri grupuri de $P-$simetrie, deoarece grupul P nu are subgrupuri netriviale P''.

Întâi de toate vom menţiona că grupurile majore de $\overline{P}-$simetrie nedegenerată cu grupul generator G ($e < Q = P' = P$), în corespundere cu teorema principală a $\overline{P}-$simetriei, se deduc în formă de produs semidirect de dreapta nedegenerat [8] al grupului de definire P cu grupul G, însoţit de omomorfismul $\varphi : G \to AutP$, care este construit conform legii $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g$, unde $\bar{\varphi}_g(p_i) = gp_i g^{-1}$. În cazul concret cercetat grupul de definire $P = \{e, p = (123), p^{-1} = (132)\}$. De aceia, grupul tuturor automorfismelor $AutP = \{1^\alpha, 2^\alpha\}$, unde 1^α este automorfismul identic, iar automorfismul 2^α aplică unul pe celălalt elementele de ordinul al treilea p şi p^{-1}. Drept consecinţă, nucleul $H = Ker\varphi$ al omomorfismului însoţitor trebuie să fie un subgrup de indicele 2 în grupul generator G. Cu alte cuvinte, toate elementele din H trebuie să genereze automorfismul 1^α, iar celelalte elemente ale grupului G să genereze automorfismul 2^α.

În cele 31 grupuri de tabletă $1, 2, 3, 4, 6, 1\cdot m, 2\cdot m, 3\cdot m, 4\cdot m, 6\cdot m, 1:m, 4:m, 6:m, m\cdot 1:m, m\cdot 2:m, m\cdot 3:m, m\cdot 4:m, m\cdot 6:m, \tilde{2}, \tilde{4}, \tilde{6}, \tilde{2}\cdot m, \tilde{4}\cdot m, \tilde{6}\cdot m, 1:2, 2:2, 3:2, 4:2, 6:2$ există exact 59 de subgrupuri invariante H (divizori normali: $H \lhd G$) de indicele 2. Vom menţiona că din cele 31 grupuri de categoria G_{320} numai grupurile 1 şi 3 (grupuri de ordin impar) nu au subgrupuri de indicele 2. Pentru fiecare din cele 59 subgrupuri invariante de indicele 2, în calitate de nucleu, construim produsul semidirect de dreapta, respectiv, $P \leftthreetimes_{\varphi H(\Phi)} G = [P, G, H, \Phi]$, unde $\Phi = AutP$ (deoarece $G/H \cong C_2 \cong AutP$).

Vom analiza în detalii numai două exemple concrete. Grupul $G = 4\cdot m$ are doi divizori normali de indicele 2: $H_1 = 4$ şi $H_2 = 2\cdot m$. Respectiv, se obţin două grupuri majore $G_1 = [P, G, H_1, \Phi]$ şi $G_2 = [P, G, H_2, \Phi]$ de $\overline{3}$ – simetrie. Grupurile G_1 şi G_2 sunt formate din aceleaşi perechi pg (în total 24), unde $p \in P$, iar $g \in G$. Deosebirea dintre G_1 şi G_2 se evidenţiază la nivelul operaţiilor de grup, unde automorfismele generate de elemente concrete g din grupul generator G acţionează diferit asupra componentelor-substituţii. Anume: pentru grupul G_1 vom avea $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_4 = \bar{\varphi}_{4^{-1}} = 1^\alpha$, iar $\bar{\varphi}_{m_1} = \bar{\varphi}_{m_2} = \bar{\varphi}_{m_3} = \bar{\varphi}_{m_4} = 2^\alpha$. Deoarece în grupul $4\cdot m$ există doi divizori normali concreţi de forma $2\cdot m$ (ce se includ la fel în grup [12]), apoi în cazul grupului G_2 sunt posibile două subcazuri concrete, de exemplu: $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_{m_1} = \bar{\varphi}_{m_3} = 1^\alpha$ şi $\bar{\varphi}_4 = \bar{\varphi}_{4^{-1}} = \bar{\varphi}_{m_2} = \bar{\varphi}_{m_4} = 2^\alpha$, sau $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_{m_2} = \bar{\varphi}_{m_4} = 1^\alpha$ şi $\bar{\varphi}_4 = \bar{\varphi}_{4^{-1}} = \bar{\varphi}_{m_1} = \bar{\varphi}_{m_3} = 2^\alpha$.

Grupul $G = \tilde{4}\cdot m$ are trei divizori normali de indicele al doilea, anume: $H_1 = \tilde{4}, H_2 = 2\cdot m, H_3 = 2:2$. Subgrupurile H_2 şi H_3 sunt izomorfe, dar sunt caracterizate de ansambluri de elemente de simetrie cu conţinut geometric diferit [12]. În rezultat, se obţin 3 grupuri majore de $\overline{3}$ – simetrie cu grupul generator $\tilde{4}\cdot m$: $G_1 = [P, G, H_1, \Phi]$, $G_2 = [P, G, H_2, \Phi]$ şi $G_3 = [P, G, H_3, \Phi]$. Deosebirea dintre grupurile G_1, G_2

şi G_3 se manifestă la nivelul operaţiilor lor de grup, unde unele elemente concrete g din grupul generator G generează diferite automorfisme.

4. În continuare vom deduce şi vom descrie grupurile minore de $\overline{3}-$simetrie. Conform teoremei principale a $\overline{P}-$simetriei, pentru a deduce grupurile minore cu grupul generator G trebuie să se caute în G aşa subgrupuri H', indicele cărora coincide cu ordinul grupului P. Deci, în cele 31 grupuri generatoare trebuie analizate numai subgrupurile de indicele 3. În rezultatul cercetării respective am constatat că numai grupurile $6,\ 3\cdot m,\ 6\cdot m, 3:m,\ \ 6:m,\ \ m\cdot 3:m,\ \ m\cdot 6:m,\ \tilde{6},\ \ \tilde{6}\cdot m,\ \ 3:2,\ \ 6:2$ au subgrupuri H' de indicele 3 diferite de grupul respectiv G. Vom analiza în detalii toate cazurile respective de deducere a grupurilor minore.

Grupul de simetrie $G=6$ (grup ciclic de ordinul 6) are subgrupul adevărat de indicele 3 $H'=2$. În acest caz, aplicaţia ψ a grupului $G=6$ cu nucleul $H'=2$ este omomorfă (deci, nu există cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat cu nucleul $H'=2$). Ca rezultat, grupul respectiv obţinut $G^{(P)}=\{e1, e2, p3, p6^{-1}, p^{-1}3^{-1}.p^{-1}6\}$ este grup de $\overline{3}-$simetrie degenerată, adică este un grup de $3-$simetrie cu simbolul binomial $6/2$. În mod analog pentru $G=\tilde{6}$ avem $H'=\tilde{2}$ şi, ca rezultat – grupul de $3-$simetrie cu simbolul binomial $\tilde{6}/\tilde{2}$. Vom menţiona că acelaşi tablou se observă şi în cazurile celorlalte grupuri abeliene de tablete, cum sunt $3:m$ şi $6:m$.

Fie $G=3\cdot m$. Subgrupurile conjugate între ele $m_1=\{1,m_1\}$, $m_2=\{1,m_2\}$, $m_3=\{1,m_3\}$ sunt de indicele 3. Are sens de analizat numai un caz, de exemplu: $H'=m_1$. Aplicaţia ψ cu nucleul $H'=m_1$ a grupului $G=3\cdot m$ pe grupul $P\,(\cong C_3)$ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul $H=3$. Ca rezultat, se obţine un grup minor de $\overline{3}-$simetrie nedegenerată $G^{(P)}=\{e1, em_1, p3, pm_3, p^{-1}3^{-1}, p^{-1}m_2\}$ cu simbolul polinomial $3\cdot m\,|\,m[\{C_3,C_1\}\,|\,C_3;3/1/1]$.
În mod analog pentru grupul generator $G=3:2$ se obţine grupul minor de $\overline{3}-$simetrie nedegenerată $G^{(P)}=\{e1, e2_1, p3, p2_3, p^{-1}3^{-1}, p^{-1}2_2\}$ cu simbolul polinomial $3:2\,|\,2[\{C_3,C_1\}\,|\,C_3;3/1/1]$.

Fie $G=6\cdot m=\{1,6,3,2,3^{-1},6^{-1},m_1,m_2,m_3,m_4,m_5,m_6\}$ şi $H_1=6$. Subgrupurile conjugate între ele $2\cdot m_1=\{1,2,m_1,m_4\}$, $2\cdot m_2=\{1,2,m_2,m_5\}$ şi $2\cdot m_3=\{1,2,m_3,m_6\}$ sunt de indicele 3. Are sens de analizat numai un caz, de exemplu: $H'=2\cdot m_1$. Intersecţia $H''=2$ a lui $H_1=6$ cu $H'=2\cdot m_1$ este divizor normal în $H_1=6$. În acest subcaz $P''=P$, deoarece $H_1/H''\cong P$. Aplicaţia ψ cu nucleul $H'=2\cdot m_1$ a grupului $G=6\cdot m$ pe grupul $P\,(\cong C_3)$ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul $H_1=6$. Deci, se obţine grupul $G^{(P)}=\{e1, e2, em_1, em_4, p3, p6^{-1}, pm_3, pm_6, p^{-1}3^{-1}, p^{-1}6, p^{-1}m_2, p^{-1}m_5\}$ cu simbolul polinomial $6\cdot m\,|\,2\cdot m[\{C_3,C_1\}\,|\,C_3;6/2/2]$.

Dacă $G=6\cdot m$, $H'=2\cdot m_1$, iar $H_2=3\cdot m_1=\{1,3,3^{-1},m_1,m_3,m_5\}$, atunci $H''=m_1$, care nu-i divizor normal în $H_2=3\cdot m_1$; deci, nu poate exista grup minor de $\overline{3}-$simetrie cu caracteristicile respective. Fie acum $G=6\cdot m$, $H'=2\cdot m_2$, iar $H_2=3\cdot m_1$; atunci $H''=1$, iar grupul-factor H_2/H'', fiind neciclic de ordinul 6, nu poate fi izomorf cu un subgrup P'' al grupului P; de asemenea, nu există grup minor de $\overline{3}-$simetrie cu caracteristicile respective. Rezultate similare se obţin şi în subcazurile: 1) $G=6\cdot m$, $H'=2\cdot m_3$, iar $H_2=3\cdot m_1$; 2) $G=6\cdot m$, $H_3=3\cdot m_2=\{1,3,3^{-1},m_2,m_4,m_6\}$, iar H' este oricare din cele trei subgrupuri de indicele 3. În mod analog pentru grupul generator $G=6:2$ se obţine grupul minor de $\overline{3}-$simetrie nedegenerată

$G^{(P)} = \{e1, e2, e2_1, e2_4, p3, p6^{-1}, p2_3, p2_6, p^{-1}3^{-1}, p^{-1}6, p^{-1}2_2, p^{-1}2_5\}$ cu simbolul polinomial $6 \cdot m | 2:2[\{C_3, C_1\} | C_3; 6/2/2]$.

Fie $G = \tilde{6} \cdot m = \{1, \tilde{6}, 3, \tilde{2}, 3^{-1}, \tilde{6}^{-1}, m_1, 2_2, m_3, 2_4, m_5, 2_6\}$ şi $H_1 = \tilde{6}$. Subgrupurile conjugate între ele $2_2 : m_5 = \{1, 2_2, m_5, \tilde{2}\}$, $2_4 : m_1 = \{1, 2_4, m_1, \tilde{2}\}$ şi $2_6 : m_3 = \{1, 2_6, m_3, \tilde{2}\}$ sunt de indicele 3. Are sens de analizat numai un caz, de exemplu: $H' = 2_4 : m_1$. Intersecţia $H'' = \tilde{2}$ a lui $H_1 = \tilde{6}$ cu $H' = 2_4 : m_1$ este divizor normal în $H_1 = \tilde{6}$. Şi în acest subcaz $P'' = P$. Aplicaţia ψ cu nucleul $H' = 2_4 : m_1$ a grupului $G = \tilde{6} \cdot m$ pe grupul $P\,(\cong C_3)$ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul $H_1 = \tilde{6}$. Deci, se obţine grupul $G^{(P)} = \{e1, e\tilde{2}, em_1, e2_4, p3, p\tilde{6}^{-1}, pm_3, p2_6, p^{-1}3^{-1}, p^{-1}\tilde{6}, p^{-1}2_2, p^{-1}m_5\}$ cu simbolul polinomial $\tilde{6} \cdot m | 2:m[\{C_3, C_1\} | C_3; \tilde{6}/\tilde{2}/\tilde{2}]$. Cazurile când $G = \tilde{6} \cdot m$, $H' = 2:m$, iar $H = 3 \cdot m$ sau $H = 3:2$ nu dau niciun grup minor de $\overline{3}-$simetrie nedegenerată cu caracteristicile respective; cauzele sunt similare celor menţionate la analizarea grupurilor $6 \cdot m$ şi $6:2$ ce sunt izomorfe cu $\tilde{6} \cdot m$.

Grupul de tabletă $G = m \cdot 3 : m = \{1, \overline{6}, 3, 3^{-1}, \overline{6}^{-1}, m, m_1, m_2, m_3, 2_1, 2_2, 2_3\}$ are trei subgrupuri de indicele 2 diferite: $H_1 = 3:m$, $H_2 = 3 \cdot m$ şi $H_3 = 3:2$. Subgrupurile conjugate între ele $2_1 \cdot m = \{1, 2_1, m, m_1\}$, $2_2 \cdot m = \{1, 2_2, m, m_2\}$ şi $2_3 \cdot m = \{1, 2_3, m, m_3\}$ sunt de indicele 3. Are sens de analizat numai un caz, de exemplu, $H' = 2_1 \cdot m$. Fie $H_1 = 3:m$; intersecţia $H'' = m$ a lui H_1 cu H' este divizor normal în $H_1 = 3:m$. În acest subcaz $P'' = P$, deoarece $H_1 / H'' \cong P$. Aplicaţia ψ cu nucleul $H' = 2_1 \cdot m$ a grupului $G = m \cdot 3 : m$ pe grupul $P\,(\cong C_3)$ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul $H_1 = 3:m$. $G^{(P)} = \{e1, e2_1, em, em_1, p3, p\overline{6}^{-1}, p2_3, pm_3, p^{-1}3^{-1}, p^{-1}\overline{6}, p^{-1}2_2, p^{-1}m_2\}$ este grupul obţinut şi el are simbolul polinomial $m \cdot 3 : m | 2 \cdot m[\{C_3, C_1\} | C_3; 3:m/m/m]$.

Dacă $G = m \cdot 3 : m$, $H' = 2 \cdot m$, iar $H_2 = 3 \cdot m$, atunci H'' este caracterizat de unul din planele ce trec prin axa 3, deci H'' nu-i divizor normal în $H_2 = 3 \cdot m$. Prin urmare, nu poate exista grup minor de $\overline{3}-$simetrie cu caracteristicile respective. Rezultate similare se obţin şi în subcazurile când $G = m \cdot 3 : m$, $H_3 = 3:2$, iar H' este oricare din cele trei subgrupuri de indicele 3.

Şi în sfârşit, grupul $G = m \cdot 6 : m$ are cinci subgrupuri de indicele doi diferite: $H_1 = 6:m$, $H_2 = 6 \cdot m$, $H_3 = 6:2$, $H_4 = \tilde{6} \cdot m$ şi $H_5 = m \cdot 3 : m$. Subgrupurile conjugate între ele $m_1 \cdot 2_1 : m$, $m_2 \cdot 2_2 : m$ şi $m_3 \cdot 2_3 : m$ sunt singurele subgrupuri de indicele 3 în grupul $G = m \cdot 6 : m$. Are sens de analizat situaţia generală, anume: când vom considera $H' = m \cdot 2 : m$. Intersecţia $H'' = 2:m$ a lui H_1 cu H' este divizor normal în $H_1 = 6:m$. În acest subcaz $P'' = P$, deoarece $H_1 / H'' \cong P$. Aplicaţia ψ cu nucleul $H' = m \cdot 2 : m$ a grupului $G = m \cdot 6 : m$ pe grupul $P\,(\cong C_3)$ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul $H_1 = 6:m$. În rezultat, se obţine un grup de $\overline{3}-$simetrie nedegenerată cu simbolul polinomial $m \cdot 6 : m | m \cdot 2 : m[\{C_3, C_1\} | C_3; 6:m/2:m/2:m]$. În toate celelalte subcazuri (când $H_2 = 6 \cdot m$, $H_3 = 6:2$, $H_4 = \tilde{6} \cdot m$ şi $H_5 = m \cdot 3 : m$) intersecţia H'' a lui H cu H' nu este divizor normal în H. Deci, nu pot exista grupuri minore de $\overline{3}-$simetrie cu caracteristicile respective.

Rezumând rezultatele concrete analizate mai sus, putem spune că din cele 31 grupuri de tablete se obţin numai 7 grupuri minore de $\overline{3}$ – simetrie nedegenerată.

5. În încheiere, vom analiza grupurile pseudominore de $\overline{3}$ – simetrie cu grupurile generatoare de categoria G_{320}. Conform teoremei principale a $\overline{P}$ – simetriei, în grupul de definire P se caută toate submulţimile P' ce verifică condiţia $e \subset P' \subset P$, iar în grupul generator G se caută toate subgrupurile H' de indice egal cu puterea submulţimii P', pentru care există izomorfismul $\lambda : H / H'' \to P''$, unde $e \le P'' \subset P'$ şi $P'' < P$, $H'' = H' \cap H$ şi $H'' \triangleleft H$, iar $H = Ker\varphi$ este subgrup de indicele 2 în grupul G. Este evident că în grupul cercetat P ($\cong C_3$) există numai submulţimile $P_1' = (e, p)$ şi $P_2' = (e, p^{-1})$ ce verifică condiţiile cerute şi $P'' = e$. De asemenea, este clar că atât H', cât şi H trebuie să fie subgrupuri de indicele 2 în G, iar intersecţia lor H'' trebuie să coincidă cu H. Acest lucru este posibil numai atunci când $H' = H = H''$.

Este uşor de verificat că aplicaţia ψ a grupului G (unde G este unul din cele 31 grupuri de tablete) cu nucleul H' (unde H' este un divizor normal în G de indicele 2) pe una din submulţimile $P_1' = (e, p)$ sau $P_2' = (e, p^{-1})$ este un cvasiomomorfism de dreapta, însoţit de omomorfismul $\varphi : G \to AutP$ cu nucleul $H = H'$. Deoarece cele 31 grupuri cristalografice de categoria G_{320} au în total 59 subgrupuri de indicele 2, apoi se vor obţine 118 grupuri pseudominore.

Bibliografie:

1. LUNGU, A. Aplicaţii cvasiomomorfe şi produse semidirecte de grupuri. În: *Conferinţa ştiinţifică jubiliară „50 de ani ai USM". Rezumatele comunicărilor.* 2-3 octombrie 1996. Chişinău, USM, 1996, p.22-24.
2. SCHONFLIES, A. *Kristallsysteme und Kristallstruktur.* Leipzig, 1891 (ediţia a II-a în 1923).
3. SHUBNIKOV, A.V. and KOPTSIK, V.A. *Symmetry in Science and Art*. Moskva: Nauka, 1972 (English translation: Plenum, New York, 1974).
4. ZAMORZAEV, A., PALISTRANT, A., LUNGU, A. *Teoria grupurilor discrete de simetrie. Partea II:* Ciclu de prelegeri speciale. Chişinău, 1992. 100 p.
5. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., КАРПОВА, Ю.С., ЛУНГУ, А.П., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Р-симметрия и ее дальнейшее развитие.* Кишинев: Штиинца, 1986.
6. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. О группах квазисимметрии (Р-симметрии). В: *Кристаллография,* 1967, том 12, с.819-825.
7. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., ГАЛЯРСКИЙ, Э.И. и ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Цветная симметрия, ее обобщения и приложения.* Кишинев: Штиинца, 1978.
8. КОПЦИК, В.А., КОЦЕВ, И.Н., КУЖУКЕЕВ, Ж.-Н.М. Беловские цветные группы и классификация магнитных структур. В: *Сообщения ОИЯИ*, Р4-7513. Дубна, 1973.
9. ЛУНГУ, А.П. *К теории* $\overline{P}$ – *симметрии.* Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 мая 1978 г., №1709-78 Деп., 16 с.
10. ЛУНГУ, А.П. К выводу групп Q-симметрии ($\overline{P}$ -симметрии). В: *Кристаллография,* 1980, том 25, вып.5, с.1051-1053.
11. ЛУНГУ, А.П. К полному выводу групп $\overline{P}$ -симметрии. В: *Всесоюзный симпозиум по теории симметрии и её обобщениям. Тезисы докладов.* Кишинев, 1980, с.75-77.
12. ЛУНГУ, А.П. *Универсальная методика вывода групп* $\overline{P}$ *-симметрии (Q-симметрии).* Рукопись деп. в МолдНИИНТИ 28 июля 1983г., №308М-Д83, 14 с.

Notă: Lucrarea a fost elaborată în cadrul Proiectelor 11.817.08.41F. şi 12.839.08.07F.

Prezentat la 25.02.2013