STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE

Revistă Ştiinţifică a Universităţii de Stat din Moldova, 2013, nr.2(62)

VARIETĂŢI ABSTRACTE MULTIDIMENSIONALE DEGENERATE

Sergiu CATARANCIUC

Universitatea de Stat din Moldova

Este definită varietatea degenerată n-dimensională şi sunt studiate unele proprietăţi ale acesteia. Varietăţile sunt considerate închise, conexe, omogene şi fără găuri. Pornind de la complexul generalizat de relaţii multi-are, se face clasificarea varietăţilor degenerate. Rezultatele obţinute sunt similare celor cunoscute pentru varietăţile clasice de genul p [5,11,12], studiate prin intermediul complexului simplu de relaţii multi-are.

Cuvinte-cheie: *relaţii multi-are, quasisimplex, varietate degenerată, grup de omologii, varietăţi abstracte, buclă n-dimensională.*

ABSTRACT MULTIDIMENSIONAL DEGENERATE VARIETIES

A degenerate n-dimensional variety is defined and some of its properties are studied. Varieties are considered closed, connected, homogeneous and without holes. In this paper the classification of degenerate n-dimensional varieties is done using generalized complexes of multi-ary relations. The results obtained are similar to results for classical varieties of genus p [5,11,12], which are based on simple complex of multi-ary relation.

Keywords: *multi-ary relations, quasisimplex, degenerate manifold, homology group, abstract varieties, n-dimensional loop.*

Fie $X^1 = X, X^2, X^3, ..., X^{m+1} = X^m, X, \ldots$ şirul de produse carteziene ale unei mulţimi finite de elemente $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Folosind submulţimile $R^m \subset X^m, m \geq 1,$ numite relaţii m-are ale elementelor din X, în [1-3] a fost definit complexul de relaţii multi-are şi aplicaţiile acestuia la soluţionarea unor probleme importante din punct de vedere teoretico-aplicativ.

În vederea fundamentării teoretice a cercetărilor legate de complexul de relaţii multi-are au fost obţinute un şir de rezultate importante, printre care un rol aparte revine clasificării varietăţilor abstracte definite prin intermediul acestui complex [4-6].

Complexele studiate în lucrările indicate mai sus se referă la cazul când cortegiile $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}) \in R^m \subset X^m$, ce reprezintă „cărămizile” din care este format complexul, nu conţin repetări ale elementelor din X. În cercetările ulterioare s-a constatat că cazul în care aceste cortegii conţin repetări ale elementelor din X conduce la un şir de generalizări netriviale ce parvin din specificul acestui obiect, numit complex generalizat de relaţii multi-are. Proprietăţile acestui complex, grupurile de omologii, caracteristica Euler etc. au fost studiate în [7-9].

Similar cazului complexului simplu [1], vom descrie în cele ce urmează varietăţile abstracte corespunzătoare complexului generalizat, care merită atenţie, sunt destul de captivante şi promiţătoare în vederea obţinerii unor rezultate noi ce ţin de topologia relaţiilor multi-are.

Pornim de la definiţia complexului generalizat de relaţii multi-are.

Definiţia 1 [10]: *Familia de relaţii* $\{R^1, R^2, ..., R^{n+1}\},\ R^m \subset X^m,\ 1 \leq m \leq n+1$, *ce satisface condiţiile:*

I. $R^1 = X^1 = X$,

II. $R^{n+1} \neq \varnothing$,

III. orice subşir ereditar $(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_l})$, *din şirul* $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}) \in R^m$, $1 \leq l \leq m \leq n+1$, ce *aparţine relaţiei l-are* R^l, *se numeşte complex generalizat (G-complex) de relaţii multi-are.*

Din această definiţie rezultă că mulţimea R^m a complexului generalizat de relaţii nu este vidă pentru orice $1 \leq m \leq n+1$.

În [6,11,12] a fost studiată legătura dintre varietatea abstractă şi un complex simplu de relaţii multi-are. În cele ce urmează vom generaliza aceste rezultate şi vom obţine o clasificare a varietăţilor, numite varietăţi degenerate.

Varietatea *n*-dimensională şi proprietăţile acesteia au fost studiate într-un şir de lucrări de către V.Boltiansky [13], C.Telman [14] ş. a. Astfel, varietatea este privită în primul rând ca un spaţiu Euclidian de o anumită dimensiune, numită dimensiunea varietăţii. Fiecare punct de pe o varietate are o vecinătate care este omeomorfă cu o mulţime deschisă a spaţiului.

Notăm prin $\sum^{n+1}(x, \varepsilon)$ sfera-corp în spaţiul Euclidian E^{n+1} cu centrul în careva punct $x \in E^{n+1}$ şi raza $\varepsilon > 0$. Sfera-corp $\sum^{n+1}(x, \varepsilon)$ se mai numeşte ε -vecinătate a punctului x.

Definiţia 2 [13]: *Mulţimea $N \subset E^{n+1}$ se numeşte varietate n-dimensională, $n \geq 2,$ dacă pentru orice punct $x \in N$ există careva ε -vecinătate $\sum(x, \varepsilon)$, astfel încât intersecţia $\sum^{n+1}(x, \varepsilon) \bigcap N$ reprezintă o mulţime omeomorfă cu sfera-corp $\sum^{n}(0, 1) \subset E^{n} \subset E^{n+1}$.*

Vom nota varietatea *n*-dimensională din E^{n+1} prin V^n şi vom considera că aceasta poate fi divizată într-un complex finit de simplexe, în caz general simplexe degenerate. Astfel de varietăţi sunt cunoscute ca varietăţi *n*-dimensionale combinatorice fără borduri [13].

Conform [9], orice complex generalizat de relaţii multi-are poate fi privit ca un complex de quasisimplexe abstracte. Dacă Q^m este familia de quasisimplexe abstracte *m*-dimensionale, atunci acest complex de relaţii se notează $K^n = \{Q^0, Q^1, ..., Q^n\}$.

Definiţia 3: *Complexul $K^n = \{Q^0, Q^1, ..., Q^n\}$ care satisface condiţiile:*

a) orice simplex (n-1)–dimensional al lui K^n reprezintă o faţetă proprie exact pentru două quasisimplexe n-dimensionale ale complexului;

b) *pentru oricare două simplexe n-dimensionale distincte Q_i^n şi Q_j^n există o succesiune de simplexe $Q_{i_1}^n = Q_i^n, Q_{i_2}^n, ..., Q_{i_q}^n = Q_j^n$, astfel încât $Q_{i_k}^n \bigcap Q_{i_{k+1}}^n \in Q^{n-1}$, $1 \leq k \leq q-1$;*

c) fiecare simplex Q^m al complexului $K^n, 1 < m < n,$ reprezintă o faţetă pentru cel puţin un simplex n-dimensional;

d) dacă simplexul m-dimensional Q^m reprezintă intersecţia simplexelor n-dimensionale distincte $Q_i^m, Q_j^n, 0 \leq m < n,$ atunci pentru succesiunea de simplexe din b) are loc relaţia:

$$Q^m \subset Q_{i_1}^n \bigcap Q_{i_2}^n \bigcap ... \bigcap Q_{i_q}^n,$$

se numeşte varietate abstractă degenerată cu dimensiunea n şi se va nota prin VD^n. Varietatea $VD^m, 0 \leq m \leq n-1,$ care este subcomplex al lui VD^n, se numeşte subvarietate a lui VD^n (se va scrie $\mathrm{VD}^m \subset \mathrm{VD}^n$).

Conform [9], notăm prin $\varepsilon_j^i(m, \Delta)$ coeficientul de Δ - incidenţă a unui quasisimplex Q_j^m al complexului K^n în raport cu quasisimplexul $Q_i^{m-1}, 1 \leq m \leq n$. Coeficientul $\varepsilon_j^i(m, \Delta)$ se descrie în modul următor:

$$\varepsilon_j^i(m, \Delta) = [Q_j^m : Q_i^{m-1}].$$

În cazul complexului simplu de simplex abstracte [1] a fost definită noţiunea de vacuum al simplexului [15]. În mod similar o vom face şi în cazul studiat în această lucrare.

Fie $Q_j^k = (x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_k})$ un quasisimplex oarecare cu dimensiunea k din complexul K^n.

Definiţia 4: *Dacă coeficientul de incidenţă $\varepsilon_j^i(k, \Delta) = [Q_j^k : (-1)^i S_i^{k-1}]$ este egal cu 1 în raport cu orice faţeta (k-1)-dimensională S_i^{k-1} a lui Q_j^k, $i = 0,1,...k,$ atunci $Q_j^k \setminus (\bigcup_{i=0}^{k}(-1)^i S_i^{k-1})$ se numeşte vacuum cu dimensiunea k al quasisimplexului Q_j^k, $1 \leq k \leq n$.*

Vom nota vacuumul quasisimplexului Q_j^k prin $\overset{0}{Q}{}_j^k$.

Remarcă. Vacuumul unui simplex cu dimensiunea zero coincide cu acel simplex.

Fie $Q_1^n, Q_2^n, ..., Q_t^n$ careva *t* quasisimplexe *n*-dimensionale din K^n, iar $\overset{0}{Q}{}_1^n$, $\overset{0}{Q}{}_2^n$, ... $\overset{0}{Q}{}_t^n$ – vacuumurile *n*-dimensionale ale acestora. Evident, $Q_i^n \setminus \overset{0}{Q}{}_i^n$ reprezintă, la rândul său, un complex de quasisimplexe *(n-1)*-dimensionale (este complexul generat de faţetele *(n-1)*-dimensionale ale lui Q_i^n), $1 \le i \le t$. Acest complex se numeşte bord al quasisimplexului Q_i^n.

Să admitem că într-o varietate degenerată VD^n au fost eliminate P_i vacuumuri *i*-dimensionale, $1 \le i \le n$.

Definiţia 5: *Varietatea degenerată* VD^n, *din care sunt eliminate* P_n *vacuumuri n-dimensionale,* P_{n-1} *vacuumuri (n-1)-dimensionale, ...,* P_1 *vacuumuri 1-dimensionale, se numeşte varietate degenerată cu* P_n *borduri n-dimensionale,* P_{n-1} *borduri (n-1)-dimensionale, ...,* P_1 *borduri 1-dimensionale.*

În cele ce urmează vom studia doar varietăţi ce satisfac definiţia 3. Astfel de varietăţi sunt:

- închise, adică fără borduri (se asigură de condiţia a) din definiţia 3);
- conexe (se asigură de condiţia b) din definiţia 3);
- omogene (condiţia c) din definiţia 3);
- fără găuri (condiţia d) din definiţia 3).

Fie S^n un quasisimplex abstract *n*-dimensional. Mulţimea tuturor faţetelor proprii ale lui S^n formează un complex de quasisimplexe abstracte, cu dimensiunea *(n-1)*, pe care îl vom numi frontieră–complex a quasi-simplexului dat şi îl vom nota prin $[S^n]$.

Teorema 1. *Frontiera–complex a unui simplex abstract* S^n *este o varietate abstractă (n-1)-dimensională şi fără borduri.*

Demonstraţie: pentru a demonstra teorema e suficient să demonstrăm că în cazul frontierei–complex a unui simplex abstract S^n sunt satisfăcute condiţiile definiţiei 3.

Un simplex *n*-dimensional S^n posedă proprietatea: orice faţetă *(n-i)*-dimensională, $1 \le i \le n$, aparţine exact la *i* faţete *p*-dimensionale, unde *p=n-i+1, n-i+2, ..., n* (în cazul *p=n*, considerăm că faţeta *n*-dimensională a lui S^n coincide cu simplexul S^n). În baza acestei proprietăţi rezultă că fiecare simplex S^{n-2} din complexul $[S^n]$ reprezintă o faţetă proprie exact pentru două simplexe *(n-1)*-dimensionale. Prin urmare, condiţia a) a definiţiei 3 este respectată. Aceasta, la rândul său, garantează şi respectarea condiţiei b), deoarece de la orice faţetă *(n-1)*-dimensională se poate trece la orice altă faţetă cu aceeaşi dimensiune. Din proprietatea quasisimplexului, anunţată anterior, rezultă că orice quasisimplex *m*-dimensional al complexului $[S^n]$, $0 \le m \le n-2$, reprezintă o faţetă a cel puţin unui simplex *(n-1)*-dimensional (condiţia c) a definiţiei 3).

Pentru a demonstra că se respectă şi ultima condiţie a definiţiei 3, e suficient să observăm că oricare două simplexe $S_1^{n-1}, S_2^{n-1} \in K^{n-1} = [S^n]$, fiind faţetele *(n-1)*-dimensionale ale lui S^n, au o singură faţetă comună $S^{n-2} \in K^{n-1} = [S^n]$, adică $S_1^{n-1} \cap S_2^{n-1} = S^{n-2}$, ceea ce înseamnă că succesiunea respectivă este chiar perechea S_1^{n-1}, S_2^{n-1}. ■

Pentru varietatea degenerată VD^n cu P_n borduri *n*-dimensionale, P_{n-1} borduri $(n-1)$-dimensionale, …, P_1 borduri 1-dimensionale vom nota prin $\widehat{P}^n = (P_1, P_2, ..., P_n)$ caracteristica de bord a lui VD^n, iar însăşi varietatea o vom numi varietate $\hat{P}^n$- degenerată.

În [9], folosind grupurile de Δ-omologii ale unui complex de relaţii multi-are pentru grupul numerelor întregi, a fost definită noţiunea de Δ-ciclu.

Definiţia 6: *O varietate $\hat{P}^n$ - degenerată se numeşte orientabilă, dacă conţine un Δ - ciclu n–dimensional.*

Fie S^n un quasisimplex abstract *n*-dimensional. Vom nota prin K^{n-1} frontiera–complex a lui S^n, adică $K^n = [S^n]$. În [9] a fost definită noţiunea de orientare pozitivă a unui quasisimplex.

Lema 1. *Dacă toate faţetele unui quasisimplex abstract n-dimensional S^n sunt orientate pozitiv, atunci frontiera–complex K^n a acestui quasisimplex este o varietate $\hat{P}^{n-1}$ - dimensională orientabilă.*

Demonstraţie: Fie toate faţetele quasisimplexului $S^n = (x_0, x_1,..., x_n)$ sunt orientate pozitiv.

Considerăm Δ - lanţul $L^{n-1} = 1\cdot S_0^{n-1} + 1\cdot S_1^{n-1} + ... + 1\cdot S_n^{n-1}$, unde S_i^{n-1}, $0 \le i \le n$, este faţeta simplexului S^n, opusă vârfului x_i. Pornind de la noţiunea de Δ -frontieră a unui simplex abstract şi simplexe coerente [13,16], uşor deducem că orice simplex S^{n-2} se va conţine exact de două ori cu semne opuse în Δ - lanţul

$$L^{n-2} = \Delta L^{n-1} = \Delta S_0^{n-1} + \Delta S_1^{n-1} + ... + \Delta S_n^{n-1},$$

ceea ce înseamnă că $L^{n-2} = 0$. Prin urmare, şi $\Delta L^{n-1} = 0$. Astfel, L^{n-1} este un Δ - ciclu (*n*-1)-dimensional al lui S^n şi este omolog cu zero. ■

Folosind noţiunea de caracteristica Euler [9], vom defini în continuare noţiunea de varietate sferică. Caracteristica Euler a varietăţii degenerate VD^n o vom nota prin $\chi(VD^n)$.

Definiţia 7: *O varietate abstractă degenerată, orientabilă şi fără borduri VD^n, se numeşte varietate sferică cu dimensiunea n, dacă posedă proprietatea:*

$$\chi(VD^n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 2, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

Varietatea sferică cu dimensiunea n se mai numeşte sferă abstractă n -dimensională şi se notează prin $\sum^n$. Drept exemplu de varietate sferică abstractă poate servi frontiera–complex a unui quasisimplex *n*-dimensional. Aceasta va fi o sferă cu dimensiunea *n*-1.

Fie $K^n = \{Q^0, Q^1,..., Q^n\}$ un complex de relaţii multi-are, reprezentat prin familiile de quasisimplexe *m*-dimensionale Q^m, $0 \le m \le n$. Vom spune că succesiunea de quasisimplexe *m*-dimensionale $Q_1^m, Q_2^m,..., Q_i^m$, $Q_{i+1}^m,..., Q_k^m$ ale acestui complex formează un lanţ *m*-dimensional, dacă intersecţia oricăror două quasisimplexe vecine ale acestei succesiuni reprezintă un quasisimplex (*m*-1)-dimensional. Dacă Q_i^m, Q_{i+1}^m sunt quasisimplexe orientate la fel (coerente – a se vedea [13,16]), atunci un astfel de lanţ se va numi ***drum m-dimensional*** în K^n.

Definiţia 8: *Varietatea degenerată abstractă şi orientabilă VD^n se numeşte conexă forte, dacă pentru oricare două quasisimplexe $Q_i^n, Q_j^n \in VD^n$ există drum de quasisimplexe n-dimensionale ce leagă Q_i^n de Q_j^n.*

Teorema 2. Orice varietate conexă forte VD^n reprezintă un ciclu *n*-dimensional şi grupul de omologii directe de ordin *m* al acesteia este izomorf cu grupul numerelor întregi, adică $\Delta^n(VD^n, Z) \cong Z$.

Demonstraţie: Într-o varietate conexă forte VD^n oricare două quasisimplexe *n*-dimensionale Q_α^n şi Q_β^n sunt unite printr-un drum *n*-dimensional $Q_\alpha^n = Q_1^n, Q_2^n, ..., Q_i^n$, $Q_k^n = Q_\alpha^n$.

Formăm Δ-frontiera varietăţii VD^n. Fiecare faţetă (*m*-1)-dimensională a varietăţii va figura în această frontieră exact de două ori, cu semne diferite. Prin urmare, $\Delta VD^n = 0$, ceea ce înseamnă că VD^n reprezintă un Δ-ciclu. Astfel, avem:

$$L^n = VD^n = S_1^n + S_2^n + ... + S_{\alpha_n}^n,$$

$$\text{sau} \quad L^n = VD^n = -S_1^n - S_2^n - ... - S_{\alpha_n}^n .$$

Evident, aceste sume reprezintă nişte $\Delta -$cicluri, ceea ce asigură relaţia $Z^n(\Delta) = \Delta^n(VD^n, Z) \cong Z$, deoarece nu există $\Delta -$cicluri *n*-dimensionale omoloage cu 0. ■

Alegem un quasisimplex *m*-dimensional Q^m al varietăţii conexe forte VD^n. $\Delta -$ciclul (*m*-1)-dimensional $z^{m-1} = \Delta Q^m$ îl vom numi în continuare $\Delta -$ciclu simplu, $1 \le m \le n.$

Definiţia 9: *Un $\Delta -$ciclu Z^m se va numi $\Delta -$ciclu elementar, dacă $Z^m = \delta_1 z_1^n + \delta_2 z_2^n + ... + \delta_k z_k^n$, unde $z_1^m, z_2^m, ..., z_k^m$ sunt $\Delta -$cicluri simple, iar $\delta_i = \pm 1, \quad 1 \le i \le k.$*

Unele rezultate cunoscute pentru cazul complexului simplu de relaţii multi-are (a se vedea [11,12]) se generalizează pentru G-complexele de relaţii multi-are, cu aceeaşi tehnică de demonstraţie.

Teorema 3. *Dacă într-o varietate degenerată abstractă orientabilă, fără borduri şi conexă forte VD^n, orice subvarietate (n-1)-dimensională, sferică şi orientabilă $\sum^{n-1}$ divizează VD^n în două componente conexe, atunci VD^n reprezintă o varietate sferică, adică $VD^n = \sum^n$.*

Demonstraţie: Din cele examinate anterior deducem că frontiera-complex K^{n-1} a unui simplex abstract *n*-dimensional reprezintă o varietate sferică abstractă (*n*-1)-dimensională. Aceasta garantează existenţa sub-varietăţii $\sum^{n-1} \subset VD^n$, care satisface ipoteza teoremei. Examinăm şirul de schelete *p*-dimensionale, $0 \le p \le n$, ale varietăţii degenerate VD^n, privindu-le ca complexe de relaţii multi-are $K^0 \subset K^1 \subset ... \subset K^{n-1} \subset K^n$, şi un şir de subvarietăţi sferice arbitrare:

$$\sum^1 \subset \sum^2 \subset ... \subset \sum^m \subset ... \subset \sum^{n-1} \subset VD^n = K^n \tag{1}$$

Conform ipotezei teoremei, $\sum^{n-1}$ divizează complexul K^n în două componente conexe, $\tilde{K}_1^n \cup \sum_1^{n-1}$ şi $\tilde{K}_2^n \cup \sum_2^{n-1}$, unde $\sum_1^{n-1}$ şi $\sum_2^{n-1}$ sunt două copii ale lui $\sum^{n-1}$. Ţinând cont de definiţia noţiunii de schelet al unui complex de relaţii multi-are [9], precum şi de succesiunea de incluziuni (1), rezultă că şi $\sum^m$ divizează complexul K^{m+1} în două subcomplexe: $\tilde{K}_1^{m+1} \cup \sum_1^m$ şi $\tilde{K}_2^{m+1} \cup \sum_2^{m+1}$. Deci, $\sum_1^m$ şi $\sum_2^m$ sunt Δ-cicluri omoloage cu 0. Astfel, şi $\sum^m$ este un Δ-ciclu omolog cu 0.

Fie $Z^m(\Delta)$ grupul Δ-ciclurilor lui $K^{m+1}, 1 \le m \le n-1$, deci şi al lui K^n. Toate simplexele *m*-dimensionale ale lui K^n aparţin lui K^m (deoarece K^m este scheletul *m*-dimensional al lui K^n). $Z_0^m(\Delta)$ reprezintă grupul Δ-ciclurilor omoloage cu 0 al lui K^{m+1}, pe când pentru K^m acestea nu mai sunt omoloage cu 0. Formând grupul-cât $Z^m(\Delta)/Z_0^m(\Delta) = \Delta^m(K^n, Z)$, să demonstrăm că acesta este trivial, adică e izomorf cu 0. Pentru aceasta e suficient a demonstra că grupul $Z^m(\Delta)$ satisface relaţia $Z^m(\Delta) \cong 0$.

Mai întâi vom demonstra că orice Δ-ciclu elementar din $Z^m(\Delta)$ al lui K^{m+1} este omolog cu 0. Pentru aceasta, conform definiţiei 9, este suficient a demonstra că orice Δ-ciclu simplu din grupul $Z^m(\Delta)$, raportat la complexul K^{m+1}, este omolog cu 0. Acest lucru este evident: dacă $S^{m+1} \in K^{m+1}$ e un simplex arbitrar, atunci, conform teoremei 2, $\Delta -$ciclul $z^m = \Delta S^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i S_i^m$, unde S_i^m este opus vârfului i, având dimensiunea *m*, aparţine grupului $Z^m(\Delta)$ al complexului K^m şi este un Δ-ciclu simplu. Concomitent z^m este Δ-frontiera Δ-lanţului $L^{m+1} = S^{m+1}$. Deci, z^m aparţine lui $Z_0^m(\Delta)$, adică vom nota $z^m = z_0^m \cdot K^n = VD$, sau K^{m+1} are în total α_{m+1} quasisimplexe (*m*+1)-dimensionale: $Q_1^{m+1}, Q_2^{m+1},..., Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$. Astfel, avem α_{m+1} Δ-cicluri simple: $z_{01}^m, z_{02}^m,..., z_{0\alpha_{m+1}}^m$, iar suma acestora:

$$z_0^m = \delta_1 z_{01}^m + \delta_2 z_{02}^m + ... + \delta_i z_{0i}^m + ... + \delta_{m+1} z_{0\alpha_{m+1}}^m, \tag{2}$$

unde $\delta_i = \pm 1, 1 \le i \le \alpha_{m+1}$, reprezintă un Δ-ciclu elementar şi omolog cu 0 pentru complexul K^{m+1}. Δ-ciclul z_0^m din relaţia (2) nu are forma generală a unui Δ-ciclu din $z_0^m(\Delta)$.

Expresia

$$z_0^m = g_1 z_{01}^m + g_2 z_{02}^m + ... + g_i z_{0i}^m + ... + g_{\alpha_{m+1}} z_{0\alpha_m+1}^m, \tag{3}$$

unde $g_i \in Z$ este arbitrar, $i \in \{1, 2,..., \alpha_m\}$, reprezintă forma generală a unui Δ-ciclu din $Z_0^m(\Delta)$ pentru complexul K^{m+1}. De aici, însă, nu rezultă că Δ-ciclurile $z_{01}^m, z_{02}^m,..., z_{0\alpha_{m+1}}^m$ constituie o *bază* [17] a grupului $z_0^m(\Delta)$ pentru subcomplexul $K^m \subset K^n$. Prin urmare, în condiţiile teoremei formulate şi în virtutea constatărilor de mai sus, imediat se verifică egalitatea (a se vedea teorema 2):

$$\delta_1 z_{01}^m + \delta_2 z_{02}^m + ... + \delta_i z_{0i}^m + ... + \delta_{\alpha_{m+1}} z_{0\alpha_{m+1}}^m = 0, \tag{4}$$

unde $z_{0i}^m = \Delta Q_i^{m+1}, \delta_i = \pm 1, 1 \le i \le \alpha_{m+1}$ şi deci $z_{01}^m = -\delta_1\delta_2 z_{02}^m - ... - \delta_1\delta_{\alpha_{m+1}} z_{0\alpha_{m+1}}^m$.

Considerând grupul $Z_0^m(\Delta)$ aparţinând subcomplexului K^m, acesta necesită a fi notat $Z^m(\Delta)$, deoarece vacumurile respective $Q_1^{m+1}, Q_2^{m+1},..., Q_{\alpha_{m+1}m+1}$ (definiţia 4), ce corespund frontierelor determinate de Δ-ciclurile menţionate, nu aparţin lui K^m.

Menţionăm că *orice* Δ-ciclu general z^m al grupului $Z^m(\Delta)$ pentru complexul K^m poate fi reprezentat sub forma:

$$z^m = g_1 z_1^m + g_2 z_2^m + ... + g_i z_i^m + ... + g_{\alpha_{m+1}} z_{\alpha_{m+1}}^m. \tag{5}$$

unde $z_i^m = \Delta Q_i^{m+1}$, iar $g_i \in Z, i \in \{1, 2,..., \alpha_{m+1}\}$.

Să considerăm familia VD^m a tuturor subvarietăţilor $VD^m \subset VD^{m+1}$ ce divizează K^{m+1} în două componente conexe. Rezultă că familia $\{VD^m\}$ divizează K^{m+1} în componentele conexe $Q_1^{m+1}, Q_2^{m+1},..., Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$, considerate ca subcomplexe ale lui K^{m+1}, adică:

$$\bigcup_{i=1}^{\alpha_{m+1}} Q_i^{m+1} = K^{m+1}.$$

Precum s-a observat mai sus, dacă subvarietatea arbitrară VD^{n-1} divizează VD^n în două componente conexe, atunci rezultă că şi subvarietatea sferică arbitrară VD^m divizează subcomplexul $K^{m+1} \subset VD^n$ în două componente conexe. Deci, Δ-ciclurile $z_{01}^m = \Delta S_1^{m+1}, z_{02}^m = \Delta Q_2^{m+1},..., z_{0\alpha_{m+1}}^m = \Delta Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$ determină Δ-ciclul general Δz_0^m al grupului $z_0^m(\Delta)$, pentru complexul K^m (a se vedea relaţia (2)). Aceste Δ-cicluri completate respectiv cu vacumurile $\overset{0}{Q}{}_1^{m+1}, \overset{0}{Q}{}_2^{m+1},..., \overset{0}{Q}{}_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$ determină simplexele $Q_1^{m+1}, Q_2^{m+1},..., Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$. Deci, Δ-ciclurile $z_1^m = \Delta Q_1^{m+1}, z_2^m = \Delta Q_2^{m+1},..., z_{\alpha_m}^m = \Delta Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$ sunt omoloage cu 0. Conform relaţiei (3), expresia (5) este argumentată.

Să arătăm că Δ-ciclul din (5) este omolog cu 0. Pentru aceasta, e suficient a se apela la demonstrația relației $\Delta\Delta L^m = 0,$ pentru orice $m \in \{0, 1,..., n\}$ din [19], de unde avem că $\Delta\Delta Q^m = 0, \forall m \in \{1, 2,..., n-1\}$. În continuare se verifică egalitatea $\Delta z_g^{m-1} = g_1 \Delta z_1^{m-1} + g_2 \Delta z_2^{m-1} + ... + g_{\alpha_m} \Delta z_{\alpha_m}^{m-1} = g_1 \Delta\Delta Q_1^m + g_2 \Delta\Delta Q_2^m + ... + g_{\alpha_m} \Delta\Delta Q_{\alpha_m}^m = 0.$ Prin urmare, pentru complexul K^n obținem că $Z^m(\Delta) \cong 0,$ ceea ce implică relația $\Delta^m(K^n, Z) \cong 0, 1 \le m \le n-1.$

Cunoscând proprietățile frontierei-complex K^{n-1} a unui quasimplex abstract *n*-dimensional Q^n, deducem că pentru complexul $K^n = VD^n$ se verifică relațiile:

$$\Delta^0(K^n, Z) \cong Z, \Delta^1(K^n, Z) \cong ... \cong \Delta^{n-1}(K^n, Z) \cong 0, \Delta^n(K^n, Z) \cong Z,$$

pe când rangul grupului *Z* este egal cu 1. Astfel, obținem:

$$\chi(V^n) = \chi(K^n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i r_i = \begin{cases} 0, & daca \quad n = 2m-1, \\ 2, & daca \quad n = 2m, \quad 1 \le m \le n-1, \end{cases}$$

unde r_i reprezintă rangurile grupurilor de omologii directe $\Delta^i(K^n, Z), 0 \le i \le n.$ Conform definiției 7, teorema e demonstrată.

În cele ce urmează vom face o clasificare a varietăţilor abstracte degenerate, orientabile şi fără borduri. O astfel de clasificare este cunoscută pentru varietățile determinate de complexele obişnuite de relații multi-are [12]. Apariția în cazul nostru a quasisimplexelor abstracte *n*-dimensionale îşi are „farmecul” său datorită buclelor *p*-dimensionale, $0 \le p \le n-1$. În rezultat vom obține o clasificare care le conține pe cele din [12].

Fie Q^m un quasisimplex abstract *m*-dimensional, determinat de şirul ordonat de elemente $(x_1, x_2,..., x_m)$.

Vom spune că două subşiruri ereditare $(x_{i_1}, x_{i_2},..., x_{i_p})$ şi $x_{j_1}, x_{j_2},..., x_{j_p}$, de lungime p, sunt distincte dacă ele diferă cel puțin printr-un element.

Definiția 10: *Familia din* $t \ge 1$ *subşiruri ereditare de lungimea p, distincte două câte două* $\Omega^p = \{(x_{i_1}^\alpha, x_{i_2}^\alpha,..., x_{i_p}^\alpha) : \alpha = 1, 2,..., t\}$, *a unui quasisimplex abstract m-dimensional* $Q^m = (x_1, x_2,..., x_m)$, *ce posedă proprietățile:*

a) toate elementele $x_{i_1}^\alpha, x_{i_2}^\alpha,..., x_{i_p}^\alpha$ *ale unui subşir ereditar* $\alpha = 1, 2,..., t$ *sunt distincte între ele;*

b) toate cele α *subşiruri ereditare,* $1 \le \alpha \le t$, *sunt formate din aceleaşi careva p elemente ale mulțimii inițiale X;*

c) Ω^p *este o familie maximală de subşiruri ereditare de lungime p, adică pentru quasisimplexul* $Q^m = (x_1, x_2,..., x_m)$ *nu există o altă familie de subşiruri ereditare* Ω_*^p *de lungime p ce posedă proprietățile a) şi b), astfel încât* $\Omega^p \subset \Omega_*^p$;

d) pentru quasisimplexul Q^m *nu există o altă familie, formată de asemenea din* $t \ge 1$ *subşiruri ereditare de lungimea* $q > p$, $\Omega^q = \{(x_{s_1}^\beta, x_{s_2}^\beta,..., x_{s_q}^\beta) : \beta = 1, 2,..., t\}$, *cu proprietățile a) şi b) menționate mai sus, astfel încât elementele lui X, ce generează subşirul* $(x_{i_1}^\alpha, x_{i_2}^\alpha,..., x_{i_p}^\alpha) \in \Omega^p$, *formează o submulțime a mulțimii de elemente din care e format subşirul* $(x_{s_1}^\beta, x_{s_2}^\beta,..., x_{s_q}^\beta) \in \Omega^q$

se numeşte buclă p-dimensională de gradul t a quasisimplexului Q^m.

Menționăm că cazul *t=1* generează condiția *p=m,* ceea ce înseamnă ca quasisimplexul Q^m reprezintă un simplex obişnuit S^m, studiat în [1].

Să construim acum un şir infinit de varietăți *n*-dimensionale neizomorfe. Din cele expuse mai sus rezultă că un complex generalizat de relații multi-are poate avea bucle cu dimensiunea $p = 1, 2,..., n-1.$ Menționăm că caracteristica Euler a unei varietăți sferice degenerate (definiția 7) nu depinde de numărul de bucle şi de dimensiunile acestora, dar depinde doar de dimensiunea varietății.

În conformitate cu situaţia clasică, varietatea sferică ce corespunde unui complex obişnuit [1] de relaţii multi-are se numeşte ***varietate cu genul 0*** (a se vedea [14,18,20,21 şi 12]). Existenţa buclelor p-dimensionale în complexele generalizate K^n conduc spre o varietate sferică degenerată cu dimensiunea n ce conţine ***simplexe de tip „şa"*** cu dimensiunea $0 \le p \le n-1$. Aceste simplexe corespund buclelor complexului K^n.

Fie X_1 şi X_2, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, mulţimi finite de elemente, în baza cărora, prin complexele generalizate de relaţii multi-are, se construiesc două varietăţi sferice degenerate disjuncte cu genul 0: $\sum_1^n$ şi $\sum_2^n$. Să considerăm că pe aceste sfere există un număr suficient de mare de quasisimplexe n-dimensionale, astfel încât pe $\sum_1^n$ şi, respectiv, pe $\sum_2^n$ să existe câte două quasisimplexe Q_{11}^n, Q_{12}^n şi, respectiv, Q_{21}^n, Q_{22}^n, astfel încât se respectă condiţiile:

$$Q_{11}^n \cap Q_{12}^n = \varnothing$$
$$Q_{21}^n \cap Q_{22}^n = \varnothing.$$

Determinăm bordurile lui $\sum_1^n$ şi Q_2^n prin eliminarea vacuumurilor simplexelor indicate:

$$bd^1(\textstyle\sum_1^n) = Q_{11}^n \setminus \overset{0}{Q}{}_{11}^{n} = [S_{11}^n]$$
$$bd^2(\textstyle\sum_1^n) = Q_{12}^n \setminus \overset{0}{Q}{}_{12}^{n} = [S_{12}^n]$$
$$bd^1(\textstyle\sum_2^n) = Q_{21}^n \setminus \overset{0}{Q}{}_{21}^{n} = [S_{21}^n]$$
$$bd^2(\textstyle\sum_2^n) = Q_{22}^n \setminus \overset{0}{Q}{}_{22}^{n} = [S_{22}^n].$$

Deoarece bordurile $bd^1(\sum_1^n)$ şi $bd^1(\sum_2^n)$ sunt izomorfe ca suprafeţe de simplexe, există un izomorfism şi între $bd^2(\sum_1^n)$ şi $bd^2(\sum_2^n)$. „Lipim" în mod izomorfic frontierele $bd^1(\sum_1^n)$ cu $bd^1(\sum_2^n)$ şi $bd^2(\sum_1^n)$ cu $bd^2(\sum_2^n)$.

Prin verificarea condiţiilor definiţiei 3 ne convingem că în rezultatul acestei operaţii de „lipire" se obţine o varietate degenerată nouă, pe care o vom nota prin VD_1^n.

Definiţia 11: *Varietatea degenerată VD_1^n se numeşte varietate degenerată cu genul 1.*

Într-o ilustrare grafică, varietatea VD_1^n s-ar deosebi de varietatea sferică $\sum_1^n$ (sau $\sum_2^n$) prin faptul că are o „gaură".

Fie acum că avem două varietăţi degenerate VD_1^n (varietatea cu o „gaură") şi VD_0^n (varietate fără „gaură" – varietate sferică degenerată), care posedă proprietăţile:

a) există perechile de quasisimplexe

$$Q_1^n(1), Q_2^n(1) \in VD_1^n \quad \text{şi} \quad Q_1^n(0), Q_2^n(0) \in VD_0^n;$$

b) perechile de quasisimplexe alese posedă proprietatea:

$$Q_1^n(1) \cap Q_2^n(1) = \varnothing$$
$$Q_1^n(0) \cap Q_2^n(0) = \varnothing$$

Examinăm bordurile:

$$bd^1(VD_1^n) = Q_1^n(1) \setminus \overset{0}{Q}{}_1^n(1) = [Q_1^n(1)],$$

$$bd^2(VD_1^n) = Q_2^n(1) \setminus \overset{0}{Q}{}_2^n(1) = [Q_2^n(1)],$$

$$bd^1(VD_0^n) = Q_1^n(0) \setminus \overset{0}{Q}{}_1^n(0) = [Q_1^n(0)],$$

$$bd^2(VD_0^n) = Q_2^n(0) \setminus \overset{0}{Q}{}_2^n(0) = [Q_2^n(0)].$$

„Lipim” iarăşi izomorfic $bd^1(VD_1^n)$ cu $bd^1(VD_0^n)$ şi, respectiv, $bd^2(VD_1^n)$ cu $bd^2(VD_0^n)$.

În rezultat obținem din nou o varietate abstractă (a se vedea definiția 3).

Definiția 12: *Varietatea abstractă degenerată* VD_2^n *se va numi varietate cu genul 2.*

(Genul 2 al varietății înseamnă ca avem o varietate cu două „găuri”.)

Acum putem generaliza operația de „lipire” descrisă mai sus: fie am obținut două varietăți degenerate VD_{p-1}^n şi VD_0^n, adică una are *(p-1)* „găuri”, iar alta este varietate sferică degenerată. Considerăm $S_1^n(p-1)$ şi $S_2^n(p-1)$ două quasisimplexe *n*-dimensionale distincte VD_{p-1}^n, iar $S_1^n(0)$ şi $S_2^n(0)$ – două simplexe *n*-dimensionale distincte din VD_0^n. Construim bordurile:

$$bd^1(VD_{p-1}^n) = Q_1^n(p-1) \setminus \overset{0}{Q}{}_1^n(p-1) = [Q_1^n(p-1)],$$

$$bd^2(VD_{p-1}^n) = Q_2^n(p-1) \setminus \overset{0}{Q}{}_2^n(p-1) = [Q_2^n(p-1)],$$

$$bd^1(VD_0^n) = Q_1^n(0) \setminus \overset{0}{Q}{}_1^n(0) = [Q_1^n(0)],$$

$$bd^2(VD_0^n) = Q_2^n(0) \setminus \overset{0}{Q}{}_2^n(0) = [Q_2^n(0)].$$

„Lipim” iarăşi izomorfic bordurile $bd^1(VD_{p-1}^n)$ cu $bd^1(VD_0^n)$ şi, respectiv, $bd^2(VD_{p-1}^n)$ cu $bd^2(VD_0^n)$. Obținem o varietate nouă VD_p^n.

Definiția 13: *Varietatea* VD_p^n *se numeşte varietate abstractă degenerată de genul p (adică, cu p „găuri”).*

Conform celor descrise mai sus, rezultă că printr-o procedură iterativă se poate obține un şir infinit de varietăți degenerate cu genul *p=0, 1, ...:*

$$VD_0^n, VD_1^n, VD_2^n, \dots, VD_p^n, \dots \tag{6}$$

În literatura de specialitate noțiunea de gen are un sens mult mai variat şi complicat (a se vedea, de exemplu [22]). Din aceste considerente, vom folosi mai mult în continuare noțiunea de varietate degenerată cu „găuri”.

Prin analogie cu cele cunoscute pentru proprietățile abstracte ce corespund complexelor de relații multi-are simple [1,12], vom demonstra, în cele ce urmează, un şir de rezultate ce țin de specificul varietăți-lor degenerate multidimensionale.

Teorema 4. *Pentru o varietate degenerată multidimensională* VD_p^n, $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ *se verifică egalitatea:*

$$\chi(VD_p^n) = \begin{cases} 2-2p, & daca \quad n = 2m, \\ 0, & daca \quad n = 2m-1, \end{cases} \tag{7}$$

unde $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Demonstraţie: Demonstraţia teoremei o vom face prin aplicarea inducţiei matematice în raport cu numărul de „găuri” *p* al varietăţii VD_p^n, $p \in N$.

În cazul *p=0* avem varietatea sferică VD_0^n. Ţinând cont de definiţia 7, obţinem:

$$\chi(VD_0^n) = \chi(\sum^n) = \begin{cases} 0, & daca \quad n = 2m-1, \\ 2, & daca \quad n = 2m, \end{cases}$$

unde $m \in N$.

Admitem că afirmaţia teoremei este adevărată pentru cazul *p=t*, $t \geq 0$. Examinăm cazul *p=t+1*. Să demonstrăm că are loc egalitatea:

$$\chi(VD_{t+1}^n) = \chi(\sum^n) = \begin{cases} 0, & daca \quad n = 2m-1, \\ 2-2(t+1), & daca \quad n = 2m. \end{cases}$$

În [9] se demonstrează că pentru oricare două subcomplexe generalizate K^p şi K^q ale unui complex generalizat de relaţii multi-are K, $0 \leq p, q \leq n,$ are loc egalitatea:

$$\chi(K^p \bigcup K^q) = \chi(K^p) + \chi(K^q) - \chi(K^p \bigcap K^q).$$

În baza acestei relaţii, a metodei de construire a şirului (6) şi a pasului precedent al inducţiei matematice, obţinem:

a) $\chi(VD_t^n) = 0 + (-1)^{2m-2} \cdot 2 - 2 + 0 + (-1)^{2m-2} \cdot 2 - 2 = 0,$ pentru $n = 2m-1,$

b) $\chi(VD_t^n) = 2 - 2(t-1) + (-1)^{2m-2} \cdot 2 - 0 + 2 + (-1)^{2m-1} \cdot 2 - 0 = 2 - 2t,$ pentru $n = 2m.$ ■

Notă. *În cazul n=1 există o singură varietate degenerată, care este sferică şi nu conţine „găuri”, adică* $VD_0^1 = \sum^1$. *Pentru* VD_0^1 *are loc egalitatea* $\chi(VD_0^1) = 0.$

Fie *X* o mulţime arbitrară de elemente, în baza căreia se construieşte un complex generalizat de relaţii multi-are K^n.

Considerăm că acest complex satisface condiţiile a)-d) ale definiţiei 3 şi, prin urmare, determină o varietate abstractă degenerată VD^n. Totdeauna putem admite că mulţimea de elemente *X* este suficient de mare, astfel încât se va găsi un element $x^* \in X,$ neutilizat la construcţia varietăţii $VD^n.$ Formăm simplexul 0-dimensional $S^0 = (x_0).$ (În baza definiţiei complexului generalizat din [9], putem considera S^0 şi ca un quasisimplex Q^0). Acum toate quasisimplexele din VD^n le vom înlocui prin quasisimplexe de forma $(x_0) \cdot Q^p = (x_0, x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_p}) = Q^{p+1}$, unde $Q^p \in VD^n$, $p \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Definiţia 14: *Quasisimplexul obţinut* Q^{p+1} *se numeşte piramidă degenerată cu vârful* x_0 *şi baza* Q^p. *Se notează această piramidă prin* PD^n.

Construcţia piramidei degenerate se face prin analogie cu cele din [13].

În continuare vom face o clasificare a mulţimii tuturor varietăţilor degenerate abstracte, orientabile şi fără borduri. A clasifica mulţimea tuturor varietăţilor *n*-dimensionale înseamnă a diviza această mulţime în clase (grupe), conform unei proprietăţi, astfel încât proprietatea fiecărei varietăţi din clasa dată să fie aceeaşi şi totodată să difere de proprietatea altei clase.

Şirul de varietăţi degenerate construite (6) permite să facem o clasificare conform numărului de „găuri” al acestora. Menţionăm că şirul (6) reprezintă un şir de varietăţi degenerate abstracte, orientabile, *n*-dimensionale şi fără borduri.

În mod similar cu cele demonstrate în [11,12], pentru varietatea degenerată obţinem următorul rezultat.

Teorema 5. *Dacă* VD^n *este o varietate degenarată abstractă, orientabilă, fără borduri şi conexă forte, determinată în baza unui complex generalizat de relaţii multi-are* K^n, *atunci în şirul (6) există o varietate, care conţine acelaşi număr de găuri ca şi* VD^n.

Demonstraţie: Vom nota prin $\sum_1^{(n-1)}$ o subvarietate abstractă şi sferică din VD^n. Să admitem că orice astfel de subvarietate divizează VD^n în două componente conexe. Conform teoremei 3, putem considera că VD^n este o sferă abstractă, adică $VD^n = \sum^n$. Aceasta înseamnă că varietatea căutată în şirul (6) este VD_0^n. Prin urmare, VD^n este de genul 0 (nu conţine „găuri”).

Să admitem că VD^n nu este varietate sferică degenerată. Atunci în VD^n există o subvarietate $\sum_{(1)}^{n-1}$. Conform presupunerii, în rezultat se obţine o varietate conexă cu două borduri $\sum_{(1)1}^{n-1}$ şi $\sum_{(1)2}^{n-1}$ izomorfe cu $\sum_{(1)}^{n-1}$. Aceste două borduri se obţin dintr-o mulţime de simplexe şi vacuumuri care se datorează „tăieturii” făcute pe $\sum_{(1)}^{n-1}$. Bordurile satisfac condiţia:

$$\sum_{(1)1}^{n-1} \cap \sum_{(1)2}^{n-1} = \varnothing.$$

Pe bordurile obţinute se construieşte câte o piramidă degenerată conform definiţiei 13. Notăm aceste piramide prin $PD_{(1)1}^n$ şi $PD_{(1)2}^n$, iar varietatea obţinută prin $VD_{(1)}^n$.

Uşor se verifică că varietatea obţinută posedă proprietăţile:

I. *Fiecare quasisimplex (n-1) dimensional de pe frontierele $\sum_{(1)1}^{n-1}$ şi $\sum_{(1)2}^{n-1}$ este faţetă comună exact pentru două quasisimplexe n-dimensionale.*
II. *Oricare două quasisimplexe n-dimensionale disjuncte (cu intersecţie vidă) pot fi unite printr-o succesiune de quasisimplexe n-dimensionale, astfel încât fiecare două quasisimplexe vecine din şirul respectiv au o faţetă (n-1)-dimensională comună. Aceasta rezultă din definiţia varietăţii degenerate VD^n şi a piramidelor $PD_{(1)1}^n$ şi $PD_{(1)2}^n$.*
III. *Fiecare quasisimplex m-dimensional, $0 \le m < n$, de pe bordurile pe care s-au construit piramidele, aparţine unui quasisimplex n-dimensional din VD^n sau uneia din cele două piramide construite.*
IV. *Simplexele de pe bordurile pe care s-au construit piramidele degenerate determină două varietăţi abstracte degenerate fără „găuri”.*

Deoarece varietatea degenerată VD^n este conexă forte, rezultă că piramidele $PD_{(1)1}^n$ şi $PD_{(1)2}^n$ pot fi construite astfel încât $VD_{(1)}^n$ de asemenea să fie conexă forte. Pentru aceasta e suficient de făcut ca orice quasisimplex *n*-dimensional Q_j^n al piramidei $PD_{(1)1}^n$ sau ($PD_{(1)2}^n$) să fie concordant cu quasisimplexul vecin Q_i^n din $VD^{(n)} \cup \sum_{(1)1}^{n} \cup \sum_{(1)2}^{(n)}$.

Demonstrăm teorema aplicând inducţia matematică în raport cu numărul de „găuri” $q \in N$.

Cazul q=1. Vom arăta că $\chi(VD_{(1)}^n) = \chi(VD_{(0)}^n) + 2$, unde $VD_{(0)}^n = VD^n$.

$\sum_{(1)1}^{n-1}$ şi $PD_{(1)2}^n$ reprezintă bazele piramidelor degenerate $PD_{(1)1}^n$ şi $PD_{(1)2}^n$. Folosind cele menţionate anterior, vom avea:

$$\chi(PD_{(1)1}^n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \alpha_i + (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \alpha_0 + \ldots + (-1)^n \alpha_{n-1} = 1.$$

De asemenea, şi $\chi(PD_{(1)2}^n) = 1$.

Din relaţia $VD_{(1)}^n = (VD^{(n)} \setminus \sum_{(1)}^{n-1}) \cup PD_{(1)1}^n \cup PD_{(1)2}^n$, rezultă:

$$\chi(VD_{(1)}^n) = \chi(VD^{(n)}) - \chi(\textstyle\sum_{(1)}^{n-1}) + \chi(PD_{(1)1}^n) + \chi(PD_{(1)2}^n) \tag{8}$$

Ţinând cont de faptul că $\chi(PD^n_{(1)1}) = \chi(PD^n_{(1)2}) = 1$, precum şi de relaţia (7), din (8) obţinem:

a) $\chi(VD^n_{(1)}) = \chi(VD^n_{(0)}) - 0 + 1 + 1 = \chi(VD^n_{(0)}) + 2,$ pentru $n = 2m, m \in N;$ (9)

b) $\chi(VD^n_{(1)}) = \chi(VD^n_{(0)}) - 2 + 1 + 1 = \chi(VD^n_{(0)}),$ pentru $n = 2m - 1, m \in N.$ (10)

Din raţionamentele de mai sus rezultă că pentru cazul $q = 1$ afirmaţia teoremei este adevărată.

Cazul q=p-1. Presupunem că s-au făcut *p-1* „tăieturi" sferice pentru varietatea $VD^n = VD^n_{(0)}$.

Dacă *n=2m* , atunci are loc formula recurentă $\chi(VD^n_{(p-1)}) = \chi(VD^n_{(0)}) + 2(p-1)$. În cazul *n=2m-1* se verifică egalitatea: $\chi(VD^n_{(p-1)}) = \chi(VD^n_{(0)}) = 0.$ (Ţinem cont de faptul că varietatea $VD^n_{(p-1)}$ nu este sferică.)

Cazul q=p. Conform pasului inductiv *q=p-1* şi teoremei 3, varietatea degenerată $(VD^n_{(p-1)})$ dispune de o varietate sferică $\sum^{n-1}_{(p)}$. Completând cu două piramide $(PD^n_{(p)1})$ şi $(PD^n_{(p)2})$, obţinem:

$$VD^n_{(p)} = VD^n_{(p-1)} \setminus \sum^{n-1}_{(p)} \cup PD^n_{(p)1} \cup PD^n_{(p)2}.$$

Ca şi în cazul *q=1*, obţinem $VD^n_{(p)} = VD^n_{(p-1)} \setminus \chi(\sum^{n-1}_{(p)}) + \chi(PD^n_{(p)1}) + \chi(PD^n_{(p)2})$, de unde:

$$\chi(VD^n_{(p)}) = \begin{cases} \chi(VD^n_{(p-1)}) - 0 + 1 + 1 = \chi(VD^n_{(p-1)}) + 2, & pentru \quad n = 2m, \\ \chi(VD^n_{(p-1)}), & pentru \quad n = 2m - 1. \end{cases}$$

În caz că $(VD^n_{(p)})$ este varietate sferică, atunci, ţinând cont de relaţia pentru $\chi(VD^n_{(p-1)})$ (cazul inductiv *q=p-1*), obţinem:

$$\chi(VD^n_{(p)}) = \begin{cases} \chi(V^n_{(0)}) = 2 - 2p, & pentru \quad n = 2m, \\ 0, & pentru \quad n = 2m - 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Din cele demonstrate, precum şi din rezultatele prezentate în [5,6,9,11,12], rezultă că complexul de relaţii multi-are reprezintă o structură discretă nouă ce poate fi utilizată cu succes la efectuarea unor cercetări cu caracter teoretico-aplicativ. Prin intermediul acestui complex au fost efectuate unele cercetări ce ţin de studierea diferitelor tipuri de varietăţi abstracte.

Bibliografie:

1. SOLTAN, P. On the Homologies of Multy-ary relations and Oriented Hipergraphs. În: *Studii în metode de analiză numerică şi optimizare*. Chişinău, 2000, vol.2, nr.1(3), p.60-81.
2. CATARANCIUC, S., SCRIPNIC, M., SOLTAN, P. A metric space with independent median. In: *Annals of Tiberiu Popoviciu, Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity*. Cluj-Napoca, 2005, vol.3, p.3-12.
3. CATARANCIUC, S. An algorithm for determination of the median independent on the metric of the space. In: *Annals of the Tiberiu Popoviciu seminar of functional equations, approximation and convexity*. Cluj-Napoca, 2006, vol.4, p.13-22.
4. BUJAC, M., CATARANCIUC, S., SOLTAN, P. On the proprieties of Multidimensional Torus. In: *The XIV Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the XIVth anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University*. Chişinău, 2006, p.66-70.
5. BUJAC, M., CATARANCIUC, S., SOLTAN, P. The problem of existence of the n-dimensional directed Euler tour of cubic manifold with pozitiv genus. In: *Annals of the Tiberiu Popoviciu seminar of functional equations, approximation and convexity*. Cluj-Napoca, 2007, vol.5, p.55-59.
6. BUJAC-LEISZ, M., CATARANCIUC, S., SOLTAN, P. The Euler tour of n-dimensional manifold with pozitiv genus. În: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica*. 2008, nr.2(57), p.110-113.
7. CATARANCIUC, S. The special metrics of the abstract cubic complex. În: *Studia Universitatis. Seria „Ştiinţe exacte şi economice".* Chişinău: CEP USM, 2008, nr.3(13), p.39-43.

8. CATARANCIUC, S. Transversale într-un complex de cuburi abstracte. În: *Studia Universitatis. Seria „Ştiinţe exacte şi economice”*. Chişinău: CEP USM, 2011, nr.2(42), p.34-43.
9. CATARANCIUC, S., SOLTAN, P. Abstract complexes their homologies and applications. În: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica*, 2010, nr.2(63), p.31-58.
10. CATARANCIUC, S. G-complexul de relaţii multi-are. În: *Analele Ştiinţifice ale USM, Seria „Ştiinţe fizico-matematice”*. Chişinău: CEP USM, 2006, p.119-122.
11. BUJAC, M., SOLTAN, P. On the abstract and oriented varieties. In: *Annals of the Tiberiu Popoviciu seminar of functional equations, approximation and convexity.* Cluj-Napoca, 2004, vol.2, p.11-16.
12. BUJAC, M., SOLTAN, P. The abstract multidimensional varieties and their classification. In: *Revue d’analyse numerique et de theorie de l’approximation*. Cluj-Napoca, 2004, nr.2, vol.33, p.163-165.
13. БОЛТЯНСКИЙ, В. Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей. В: *Труды математического института имени В.А. Стеклова*, XLVII. Москва: Изд-тво АН СССР, 1955. 199 с.
14. TELEMAN, C. *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile.* Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 1964. 290 p.
15. BUJAC, M., CATARANCIUC, S., SOLTAN, P. On the division in cubes of abstract manifold. În: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica*, 2010, nr.2(51), p.29-34.
16. АЛЕКСАНДРОВ, П.С. *Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию.* Москва: Наука, 1975. 367 с.
17. KUROŞ, A. *Curs de algebră superioară.* Chişinău: Lumina, 1967. 441 p.
18. HILTON, P.I., WYLIE, S. *Homology Theory. An introduction to Algebric topology.* New-York: Cambridge University Press, 1960, XV+484 p.
19. ПОНТРЯГИН, А.С. *Основы комбинаторной топологии*. Москва: Наука, 1986, 120 с.
20. BOLTYANSKY, V., EFREMOVICH, V. *Intuitive Combinatorial Topology*. Springer, 2001. 215 p.
21. БОЛТЯНСКИЙ, В., ЕФРЕМОВИЧ, В. *Наглядная топология*. Москва: Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 160 с.
22. *Математическая энциклопедия*. Москва: Советская Энциклопедия, том 1-5, 1977-1985.

Prezentat la 11.07.2013