TEORIA JOCURILOR ŞI RELAȚIILE SOCIALE

Victoria LOZAN

Universitatea de Stat din Moldova

În lucrare se examinează jocul bicriterial „Bătălia sexelor" [4]. Acest tip de joc poate fi văzut drept scenariu de bază pentru majoritatea relaţiilor dintre două persoane. Fiecare jucător are câte două funcţii de câştig: prima funcţie ilustrează utilitatea obţinută de la petrecerea timpului împreună, a doua – utilitatea obţinută de la satisfacerea preferinţelor proprii. Se determină mulţimile de echilibre Pareto-Nash şi Pareto-Stackelberg aplicând metoda intersecţiei graficelor aplicaţiilor de reacţii eficiente şi optimizarea funcţiei de câştig a jucătorului întâi pe graficul aplicaţiei de reacţii eficiente a jucătorului doi [3,2].

Cuvinte-cheie: *soluţie Pareto-Nash, soluţie Pareto-Stackelberg, aplicaţie de reacţii eficiente, intersecţia graficelor.*

GAMES THEORY AND SOCIAL RELATIONS

Two-criterion game „Battle of the Sexes" [4] is examined. This type of game can be seen as a baseline scenario for most relationships between two persons. Each player has two gain functions: the first function illustrates the desire to spend their time together and the second function illustrates the desire to satisfy own preferences. The Pareto-Nash and Pareto-Stackelberg equilibrium sets are determined by applying the method of intersection of graphs of efficient reactions mappings and the utility function optimization, corresponding to the first player, on the graph of efficient reactions mappings of the second player [3,2].

Keywords: *Pareto-Nash solution, Pareto-Stackelberg solution, efficient reactions mapping, graphs intersection*.

Teoria jocurilor reprezintă un ansamblu de instrumente analitice proiectate pentru a ne ajuta să înţelegem fenomenele pe care le observăm la interacţiunea factorilor de decizie în situaţii de conflict şi cooperare. Decidenţii urmăresc obiective exogene bine definite (decidenţii sunt raţionali) şi ţin cont de cunoştinţele/aşteptările referitoare la comportamentul altor decidenţi (decidenţii gândesc strategic). Modelele teoriei jocurilor sunt nişte reprezentări abstracte ale unor clase de situaţii din viaţa reală. Abstracţia lor ne permite să le utilizăm pentru a studia o gamă largă de fenomene. Jocul foloseşte teoria matematică pentru a exprima ideile formal. Utilizarea modelelor matematice trezeşte interes în studierea fenomenelor social-economice. În majoritatea situaţiilor de conflict şi cooperare sunt implicaţi doi decidenţi. Teoria jocurilor studiază o varietate de jocuri 2×2; fiecare din ele include o gamă largă de modele ale situaţiilor din viaţa reală, numite ***jocuri celebre***. Un joc de acest tip este „Bătălia sexelor" (BS), descris pentru prima dată în anul 1957 în lucrarea lui R.D. Luce şi H. Raiffa [4]. În acest joc, jucătorii îşi coordonează comportamentul având preferinţe contradictorii. Două persoane de sex opus, El şi Ea, doresc să iasă seara unul cu celălalt, însă au preferinţe diferite în legătură cu locul unde vor să meargă. Ea vrea să meargă la cinema, El – la basket. Modul în care funcţionează BS în acest caz: ca în majoritatea situaţiilor, decidenţii doresc să petreacă viaţa împreună având preferinţe şi viziuni diferite referitoare la modul de conducere a vieţii. Niciunul nu vrea să compromită un aspect important al vieţii sale: cariera, ceilalţi prieteni, unde vor locui ş.a.m.d. Deoarece ambii jucători sunt interesaţi de coordonare (fie *cinema - cinema*, fie *basket - basket*), ar trebui să ne aşteptăm la unul dintre următoarele rezultate.

El / Ea	Cinema	Basket
Cinema	(4, 3)	(2, 2)
Basket	(1, 1)	(3, 4)

În Tabel sunt prezentate pe orizontală strategiile ei, iar pe verticală – cele ale lui. Fiecare celulă conţine utilităţile obţinute de Ea şi de El în aceeaşi situaţie, separate prin virgulă. Se presupune prin valorile asociate că fiecare îşi doreşte la fel de mult să petreacă timpul cu celălalt şi la fel de mult să meargă la cinema, respectiv, la basket. Soluţia Nash [5], în strategii pure, a jocului este (*cinema, cinema*) şi (*basket, basket*) cu câştigurile (4, 3) şi (3, 4), respectiv, şi un echilibru Nash în strategii mixte $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ cu câştigul $\left(\frac{10}{4},\frac{10}{4}\right)$.

În cazul soluţiei Stackelberg [6] se cercetează două situaţii posibile: I) Ea este pe poziţia de lider şi II) El este pe poziţia de lider. În prima situaţie soluţia Stackelberg este (*cinema, cinema*) cu câştigul (4, 3) şi în situaţia a doua – (*bascket, bascket*) cu câştigurile (3, 4).

Modificăm jocul BS definind pentru fiecare decident câte două funcţii de câştig. Prima funcţie ilustrează câştigul obţinut de la petrecerea timpului împreună. Funcţia a doua reprezintă câştigul obţinut de la satisfacerea preferinţelor. Rezultatele posibile sunt descrise în următorul Tabel:

El / Ea	Cinema	Bascket
Cinema	(4,4), (4,0)	(0,4), (0,4)
Bascket	(0,0), (0,0)	(4,0), (4,4)

În Tabel sunt prezentate pe orizontală câştigurile obţinute de Ea, iar pe verticală – câştigurile obţinute de El. Prima pereche de numere din celulele Tabelului reprezintă utilităţile obţinute de Ea în situaţia respectivă, iar perechea a doua, după virgulă, utilităţile obţinute de El în aceeaşi situaţie. Din Tabel rezultă că pentru păstrarea unei relaţii trebuie să-ţi compromiţi interesele proprii. Dorinţa de a-ţi satisface preferinţele duce la necesitatea de a convinge partenerul să te însoţească sau să mergi singur.

Dacă jucătorii sunt indiferenţi unul faţă de celălalt, atunci câştigul se realizează în satisfacerea intereselor proprii. Funcţia de câştig ce ilustrează utilitatea obţinută de la petrecerea timpului împreună poate fi omisă. Sunt cazuri în care unul din parteneri este mai iubitor, pentru el nu contează îndeletnicirile personale, este preocupat de viaţa în cuplu, doreşte să-i facă pe plac celuilalt. Principalul într-o relaţie este înţelegerea reciprocă şi atingerea compromisurilor. Totuşi, e important a obţine beneficii conform ambelor funcţii de câştig. Uneori aceasta este posibil doar la repetarea jocului. Dacă jocul se repetă, atunci se pot satisface pe rând preferinţele.

Pentru determinarea mulţimilor de echilibre Pareto-Nash şi Pareto-Stackelberg în strategii mixte aplicăm algoritmii din [3] şi [2], respectiv. Algoritmii se bazează pe noţiunea de funcţie de sinteză.

$$F_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda_p^1 f_p^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \lambda_p^2 f_p^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \max, \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{X}\times\mathbf{Y}, \tag{1}$$
$$\lambda_p^i > 0, \ i=\overline{1,2}, \ \lambda_p^1+\lambda_p^2 = 1, \ p=\overline{1,2},$$

unde $\{f_p^i(\mathbf{x},\mathbf{y})\}_{i=1}^2$ – funcţiile de câştig ale jucătorului $p=\overline{1,2}$ definite pe $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$,

$\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ – mulţimile de strategii mixte ale jucătorilor.

Teorema 1. *Dacă* $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ *este soluţie a problemei monocriteriale (1), atunci* $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ *este punct eficient.*

Demonstraţia teoremei rezultă din condiţia suficientă Pareto cu funcţia de sinteză liniară [1].

Teorema 2 [5,1]. *Dacă mulţimile de strategii* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *sunt compacte şi funcţiile de câştig* $\{f_p^i(\mathbf{x},\mathbf{y})\}_{i=1}^2$, $p=\overline{1,2}$ *sunt continue, atunci jocul BS în strategii mixte posedă echilibru Pareto-Nash.*

Echilibrul în sensul Pareto-Nash cere ca fiecare dintre jucători să-şi aleagă strategia proprie din mulţimea sa de strategii eficiente, ca cel mai bun răspuns la strategiile alese de ceilalţi jucători. Mulţimea de echilibre Pareto-Nash în strategii mixte include mulţimea de echilibre în strategii pure. Ea este reprezentată de intersecţia graficelor aplicaţiilor de reacţii eficiente.

Pentru determinarea mulţimii de echilibre Pareto-Nash se efectuează următorii paşi:

1) se determină funcţiile de sinteză ale jucătorilor;
2) se determină graficele aplicaţiilor de reacţii eficiente ale jucătorilor;
3) se stabileşte mulţimea de echilibre Pareto-Nash.

Descrierea în detaliu a procesului de construcţie a graficelor aplicaţiilor de reacţii eficiente ale jucătorilor şi a metodei de determinare a mulţimii de echilibre Pareto-Nash în strategii mixte sunt expuse în [3].

În cazul echilibrului Pareto-Stackelberg, generalizăm afirmaţiile din [7]:

Teorema 3. *Pentru orice joc ierarhic finit mulţimea de echilibre Pareto- Stackelberg este nevidă.*

Teorema 4. *Dacă mulţimile de strategii* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{R}^2$ *sunt compacte şi orice funcţie de câştig* $f_p^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $i=\overline{1,2}$ $p=\overline{1,2}$ *este continuă pe mulţimea de strategii a adversarului pentru orice strategie proprie fixată, atunci mulţimea de echilibre Pareto-Stackelberg este nevidă.*

Demonstraţia rezultă din binecunoscuta teoremă Weierstrass.

Teorema 5. *Dacă orice mulţime de strategii* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{R}^2$ *este convexă şi orice funcţie de câştig* $f_p^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $i=\overline{1,2}$, $p=\overline{1,2}$ *este strict convexă pe mulţimea de strategii a adversarului pentru orice strategie proprie fixată, atunci jocul are un singur echilibru Pareto-Stackelberg.*

Demonstraţia rezultă din proprietatea funcţiilor strict convexe.

Pentru determinarea mulţimii de echilibre Pareto-Stackelberg se efectuează următorii paşi:

1) se determină funcţia de sinteză a jucătorului doi;
2) se determină graficul aplicaţiei de reacţii eficiente a jucătorului doi;
3) se stabileşte imaginea graficului aplicaţiei de reacţii eficiente a jucătorului doi în spaţiul criteriilor jucătorului întâi;
4) se stabileşte mulţimea de echilibre Pareto-Stackelberg.

Descrierea în detaliu a metodei de determinare a mulţimii de echilibre Pareto-Stackelberg în strategii mixte este expusă în [2].

Soluţia Pareto-Nash a jocului în strategii pure este: $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ ((*cinema*, *cinema*), (*cinema*, *bascket*), (*bascket*, *bascket*)). Soluţia Pareto-Nash în strategii mixte, pentru jocul descris în al doilea Tabel, se determină conform algoritmului:

1) Funcţiile de sinteză ale jucătorilor:

$$F_{Ea}(x,y) = (8\lambda y - 8\lambda + 4)x - 4\lambda y + 4\lambda,$$

$$F_{El}(x,y) = (8\mu x - 4)y - 4\mu x + 4.$$

2) Graficele aplicaţiilor de reacţii eficiente ale jucătorilor.

Se calculează raporturile: $y(\lambda) = \dfrac{8\lambda - 4}{8\lambda}$, $x(\mu) = \dfrac{4}{8\mu}$. Se notează cu $\alpha(\lambda) = 8\lambda$, $\beta(\lambda) = -8\lambda + 4$, $\gamma(\mu) = 8\mu$ şi $\delta(\mu) = -4$. Se stabilesc valorile $\lambda_\alpha = 0 \notin (0,1)$ şi $\mu_\gamma = 0 \notin (0,1)$ – soluţiile ecuaţiilor $8\lambda = 0$ şi $8\mu = 0$ respectiv. Se calculează valorile în extremităţile intervalului $[0,1]$.

a) $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 4 > 0$ – se obţine segmentul $[(0,0),(0,1)]$; $\alpha(1) = 8 > 0$, $\beta(1) = -4 < 0$, $\alpha(1) > -\beta(1)$, $y(1) = \frac{1}{2}$ – se obţin segmentele $\left[(0,0),\left(0,\frac{1}{2}\right)\right] \cup \left[\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(1,\frac{1}{2}\right)\right] \cup \left[\left(1,\frac{1}{2}\right),(1,1)\right]$.

Se trasează liniile şi se haşurează intervalul dintre ele şi latura respectivă a pătratului $[0,1] \times [0,1]$. Ca rezultat:

$$\mathbf{Gr_{Ea}} = [(0,0),(0,1)] \cup \left[(0,0),\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(1,\frac{1}{2}\right),(1,0),(0,0)\right].$$

$\mathbf{Gr_{Ea}}$ este reprezentat grafic în Figura 1.

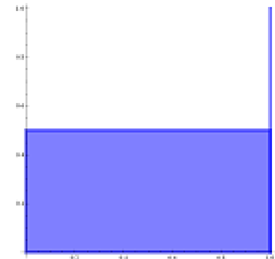


Fig.1

b) $\gamma(0) = 0$, $\delta(0) = -4 < 0$ – segmentul $[(0,0),(1,0)]$; $\gamma(1) = 8 > 0$, $\delta(1) = -4 < 0$, $\gamma(1) > -\delta(1)$, $x(1) = \frac{1}{2}$ – linia frântă $\left[(0,0),\left(\frac{1}{2},0\right)\right] \cup \left[\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},1\right)\right] \cup \left[\left(\frac{1}{2},1\right),(1,1)\right]$.

Se trasează liniile şi se haşurează intervalul dintre ele şi latura respectivă a pătratului $[0,1] \times [0,1]$. Ca rezultat:

$$\mathbf{Gr_{El}} = [(0,0),(1,0)] \cup \left[(1,0),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},1\right),(1,1),(1,0)\right].$$

$\mathbf{Gr_{El}}$ este reprezentat grafic în Figura 2.

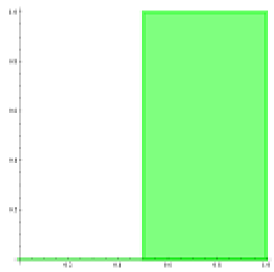


Fig.2

3) Mulţimea de echilibre Pareto-Nash în strategii mixte reprezintă intersecţia

$$\mathbf{PNES} = \mathbf{Gr_{Ea}} \cap \mathbf{Gr_{El}} = [(0,0),(1,0)] \cup [(1,0),(1,1)] \cup \left[\left(\frac{1}{2},0\right),(1,0),\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},0\right)\right].$$

PNES este reprezentată grafic în Figura 3.

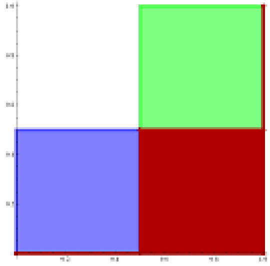


Fig.3

Soluţia în strategii mixte include soluţia în strategii pure.

Soluţia Pareto-Stackelberg în strategii mixte a jocului se determină cercetând două situaţii posibile: I) Ea este pe poziţia de lider şi II) El este pe poziţia de lider.

Situaţia I:

1) Se determină funcţia de sinteză pentru El: $F_{El}(x,y) = (\mu x - 4)y - 4\mu x + 4$.

2) Se stabileşte graficul aplicaţiei de reacţii eficiente:

$$\mathbf{Gr_{El}} = [(0,0),(1,0)] \cup \left[(1,0),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},1\right),(1,1),(1,0)\right].$$

3) Se determină imaginea $\mathbf{ImGr_{El}}$ în spaţiul de criterii al jucătorului lider. Adică,

$$\mathbf{ImGr_{El}} = \left[\left(f_{Ea}^1(0,0), f_{Ea}^2(0,0)\right), \left(f_{Ea}^1(1,0), f_{Ea}^2(1,0)\right)\right] \cup$$
$$\left[\left(f_{Ea}^1(1,0), f_{Ea}^2(1,0)\right), \left(f_{Ea}^1\left(\frac{1}{2},0\right), f_{Ea}^2\left(\frac{1}{2},0\right)\right), \left(f_{Ea}^1\left(\frac{1}{2},1\right), f_{Ea}^2\left(\frac{1}{2},1\right)\right), \left(f_{Ea}^1(1,1), f_{Ea}^2(1,1)\right), \left(f_{Ea}^1(1,0), f_{Ea}^2(1,0)\right)\right],$$

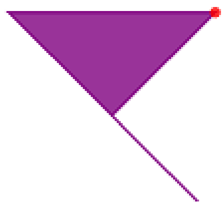


Fig.4

unde $f_{Ea}^1(x,y) = 8xy - 4x - 4y + 4$ şi $f_{Ea}^2(x,y) = 4x$. Reprezentarea grafică a imaginii este ilustrată în Figura 4.

4) Punctul din partea dreaptă sus determină echilibrul Pareto-Stackelberg. $\mathbf{PSE} = (1,1)$ ((*cinema*, *cinema*)) cu câştigurile $\langle (4,4),(4,0) \rangle$.

Situaţia II:

1) Se determină funcţia de sinteză pentru Ea:

$F_{Ea}(x,y) = (\mu x - 4\mu)y + (8\mu + 4)x + 4\mu$.

2) Se stabileşte graficul aplicaţiei de reacţii eficiente:

$$\mathbf{Gr_{Ea}} = \left[(0,0),\left(\frac{1}{2},0\right)\right] \cup \left[\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},1\right)\right] \cup \left[\left(\frac{1}{2},1\right),(1,1)\right].$$

3) Se determină imaginea $\mathbf{ImGr_{Ea}}$ în spaţiul de criterii al jucătorului lider. Adică,

$$\mathbf{ImGr_{Ea}} = \left[\left(f_{El}^1(0,0), f_{El}^2(0,0)\right), \left(f_{El}^1\left(\frac{1}{2},0\right), f_{El}^2\left(\frac{1}{2},0\right)\right)\right] \cup \left[\left(f_{El}^1\left(\frac{1}{2},0\right), f_{El}^2\left(\frac{1}{2},0\right)\right), \left(f_{El}^1\left(\frac{1}{2},1\right), f_{El}^2\left(\frac{1}{2},1\right)\right)\right] \cup$$
$$\cup \left[\left(f_{El}^1\left(\frac{1}{2},1\right), f_{El}^2\left(\frac{1}{2},1\right)\right), \left(f_{El}^1(1,1), f_{El}^2(1,1)\right)\right],$$

unde $f_{El}^1(x,y) = 8xy - 4x - 4y + 4$ şi $f_{El}^2(x,y) = 4 - 4y$. Reprezentarea grafică a imaginii este ilustrată în Figura 5.

4) Punctul din partea dreaptă sus determină echilibrul Pareto-Stackelberg. $\mathbf{PSE} = (0,0)$ ((*bascket*, *bascket*)) cu câştigurile $\langle (4,0),(4,4) \rangle$.

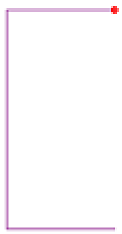
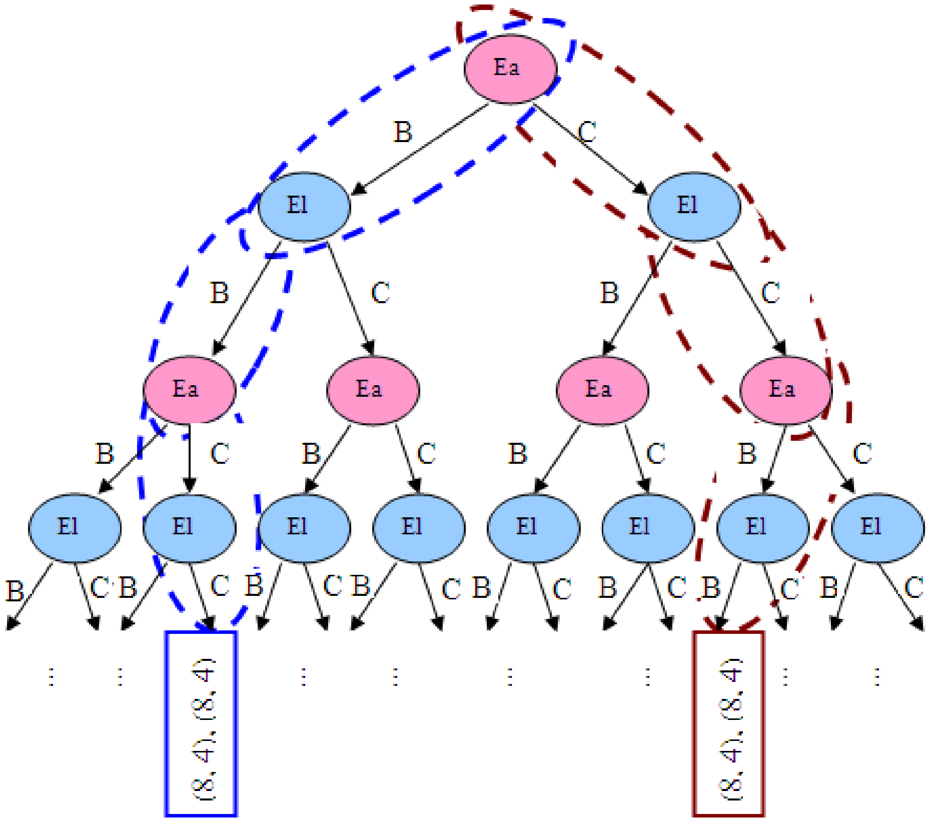


Fig.5

Soluţia Pareto-Stackelberg în strategii mixte coincide cu cea în strategii pure.

În orice situaţie este importantă cooperarea şi înţelegerea reciprocă între părţi. Dacă poziţia de lider este împărţită în mod egal, succesul este garantat. Cooperarea şi satisfacerea pe rând a preferinţelor, la repetarea jocului, include următoarele rezultate $(1,1)$ şi $(2,2)$ ((*cinema*, *cinema*) şi (*bascket*, *bascket*)). Se pot ilustra situaţiile respective utilizând jocul repetat în următoarea schemă:



La repetarea jocului partenerii obţin acelaşi beneficiu numai în cazul în care: mai întâi merg împreună la cinema apoi la bascket sau invers ($\langle (8,4),(8,4) \rangle$). Nu poţi obţine permanent câştiguri maxime dacă urmăreşti mai multe obiective în aceeaşi situaţie. Dar, cel mai important este alegerea strategiei corecte în situaţia creată. Comportamentul strategic e util nu doar în conflictele militare şi în afaceri, ci şi în căsătorie.

Aplicarea rezultatelor din [3,2] asupra binecunoscutului joc „Bătălia sexelor", dar cu două criterii, permite să se evidenţieze noi aspecte de analiză şi soluţionare.

Referinţe:

1. EHRGOTT, M. *Multicriteria Optimization*. Second Edition, Springer Berlin, Germany, 2005.
2. LOZAN, V., UNGUREANU, V. Aspecte algoritmice ale jocurilor ierarhice. În: Materialele Conferinţei internaţionale *„Modelare Matematică, Optimizare şi Tehnologii Informaţionale"*. Chişinău: Evrica, 2012, p.70-80.
3. LOZAN V., UNGUREANU, V. The Set of Pareto-Nash Equilibria in Multicriteria Strategic Games. In: *Computer Science Journal of Moldova*, 2012, vol.20, no.1(58), p.3-15.
4. LUCE, R.D., RAIFFA, H. *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Wiley & Sons, 1957.
5. NASH, J. Noncooperative game. In: *Annals of Mathematics*, Second Series, 1951, vol.54, no.2, p.280-295.
6. STACKELBERG, H. *Marktform und Gleichgewicht*. Springer Verlag, Vienna, 1934.
7. UNGUREANU, V. Solution principles for simultaneous and sequential games mixture. In: *ROMAI Journal*, 2008, vol.4, no.1, p.225-242.

Prezentat la 18.06.2013