ASPECTE GEOMETRICE ŞI ALGEBRICE ALE APARATULUI MATEMATIC AL $\overline{P}-$SIMETRIEI ŞI W_p-SIMETRIEI

Alexandru LUNGU

Universitatea de Stat din Moldova

În acest articol sunt studiate unele particularităţi geometrice şi algebrice ale metodelor de deducere şi descriere a structurii generale a grupurilor de tipuri diferite ale simetriilor generalizate în formă de $\overline{P}-$simetrie şi W_p-simetrie.

Cuvinte-cheie: *simetrii generalizate, grupuri, aplicaţii cvasiomomorfe.*

GEOMETRIC AND ALGEBRAIC ASPECTS OF MATHEMATICAL APPARATUS OF $\overline{P}-$SYMMETRY AND W_p-SYMMETRY

In the present paper there are studied some geometric and algebraic features of the method of deriving and the description of general structure of groups of different type of the generalizations of classical symmetry in form of $\overline{P}-$symmetry and W_p-symmetry.

Keywords: *generalized symmetry, groups, quasi-homomorphe applications.*

1. Cercetarea structurii generale şi a proprietăţilor grupurilor de diferite tipuri ale generalizărilor recente ale simetriei clasice este mai complexă şi mai dificilă decât problema analogică pentru grupurile de $P-$simetrie [9-11].

Scopul studiului efectuat este: de a analiza particularităţile specifice atât geometrice, cât şi algebrice proprii generalizărilor recente ale simetriei clasice sub formă de $\overline{P}-$simetrie [11,17,18] şi W_p-simetrie [14,19-21], apoi de a elucida complexitatea metodelor de descriere şi de deducere a grupurilor de diferite tipuri ale acestor generalizări în comparaţie cu metodele respective, aplicate în cazul $P-$simetriei.

2. Generalizările simetriei clasice în sens „fizic" (simetria clasică se completează cu o legitate de transformare a „indicilor"-calităţi localizaţi în punctele figurii geometrice considerate F), cum ar fi $P-$simetria Zamorzaev, $\overline{P}-$simetria sau W_p-simetria, se deosebesc între ele printr-un şir de particularităţi specifice geometrice şi algebrice. Simetriile generalizate ce se includ în schema $P-$simetriei în calitate de cazuri particulare (de exemplu, antisimetria Şubnikov [26], antisimetria multiplă [12,13], simetria de coloraţie Belov [8,10], antisimetria de coloraţie Poly [24], antisimetria de coloraţie Neronova-Belov [22], antisimetria multiplă de coloraţie [23], criptosimetria simplă şi multiplă Niggli-Wondratschek [5]) se caracterizează prin faptul că punctele figurii geometrice F considerate iniţial sunt înzestrate cu „indici"-calităţi de natură scalară (ce aparţin unei mulţimi concrete date $N=\{1,2,...,m\}$), iar legea transformării „indicilor" are un caracter global, care nu depinde de poziţia punctelor.

În ceea ce priveşte transformările de W_p-simetrie, „indicii" de asemenea sunt de natură scalară, dar legitatea de schimbare a lor este mai complexă şi poartă un caracter local, adică legea de transformare a „indicilor" depinde de poziţia punctelor. Vom menţiona că simetria policromatică Wittke-Garrido [7] şi simetria complexă Bienenstok-Ewald [1] pot fi considerate drept cazuri particulare concrete ale W_p-simetriei, care tratează problema generalizării „fizice" a simetriei clasice (cazul când „indicii" au natură scalară) în sensul cel mai larg posibil. În cazul $\overline{P}-$simetriei (de asemenea, a se vedea simetria magnetică Tavgher-Zaiţev [25] şi $Q-$simetria Kopţik [6,15,16]) aceşti „indici" reprezintă nişte mărimi omogene ce posedă orientaţie (de exemplu, vectori polari cu module egale, vectori axiali, tensori etc.). Mai mult decât atât, ei reprezintă nişte calităţi proprii punctelor în care sunt localizaţi. Prin urmare, orice transformare de simetrie clasică a figurii geometrice „indexate" acţionează direct nu doar asupra punctelor figurii, dar şi asupra „indicilor" lor, care sunt rigid legaţi pe puncte. Drept consecinţă, orice transformare de simetrie clasică a figurii „indexate" $F^{(N)}$ generează o anumită substituţie a acestor „indici".

3. Orice transformare de simetrie generalizată $\tilde{g}$ a unei figuri „indexate" este o transformare mixtă ce constă din două componente: prima - componenta pur geometrică g, care este o transformare de simetrie clasică, şi a doua componentă, care include în sine o informaţie parţială sau completă despre transformarea „indicilor"-calităţi sub forma unei substituţii p sau, respectiv, a unui cortegiu de substituţii din grupul dat de definire P (P este un grup tranzitiv de substituţii pe mulţimea N).

Din definiţia transformării de $P-$simetrie [9] urmează că componentele respective (transformarea pur geometrică g şi substituţia „indicilor" p) sunt absolut independente. Fiecare componentă are domeniul său de acţiune: componenta geometrică g acţionează numai asupra punctelor M ale figurii „indexate" $F^{(N)}$ (neglijând „indicii" localizaţi în punctele respective) pe când „indicii" sunt transformaţi în totalitate conform substituţiei p. Ca urmare, se obţine că aceste componente sunt comutative $gp = pg = \tilde{g}$. Operaţia în grupurile respective se efectuează pe componente: $g_i p_i \cdot g_j p_j = g_i g_j p_i p_j = g_k p_k$.

În ce priveşte orice transformare de $\overline{P}-$simetrie $\tilde{g} = pg$ [17], apoi mai întâi componenta geometrică g acţionează şi asupra punctelor M şi asupra „indicilor" r localizaţi în ele, adică g acţionează asupra punctelor „indexate" (M, r) aplicându-le pe punctele „indexate" $(g(M), g(r))$, şi numai după aceasta componenta p efectuează o transformare suplimentară a „indicilor", încât $\tilde{g}(F^{(N)}) = F^{(N)}$. Prin urmare, în grupurile de $\overline{P}-$simetrie componentele nu mai sunt comutative şi joacă roluri diferite în operaţia de grup: $p_i g_i \cdot p_j g_j = p_i p_j^{g_i} g_i g_j = p_k g_k$, unde $g_k = g_i g_j$, $p_k = p_i p_j^{g_i}$, iar $p_j^{g_i} = g_i p_j g_i^{-1} = \vec{\varphi}_{g_i}(p_j)$ este imaginea lui p_j la automorfismul $\varphi(g_i) = \vec{\varphi}_{g_i} \in AutP$.

Vorbind despre transformările mixte $\tilde{g}$ de W_p-simetrie, trebuie să subliniem că ele sunt mult mai complexe. Anume: ele includ în sine atât informaţia despre transformarea propriu-zisă a punctelor figurii geometrice considerate (componenta geometrică g), cât şi informaţia completă despre transformarea (schimbarea) „indicilor" r, localizaţi în punctele interioare M_k ale domeniilor fundamentale ale grupului generator (componenta a doua). În acest caz, legea de schimbare a „indicilor" este formată din elemente-substituţii ce acţionează local (pentru punctele diferitelor domenii fundamentale, în general, există substituţii diferite). Deci, componenta a doua w a transformării $\tilde{g} = gw$ de W_p-simetrie se prezintă sub forma unui cortegiu de elemente ale grupului dat iniţial de substituţii P, adică $w = <..., p^{g_i}, ...>$.

4. Orice grup de $P-$simetrie $G^{(P)}$ este un subgrup în produsul direct al grupului de definire P cu grupul generator G: $G^{(P)} \le G \times P = P \times G$. În cazul $\overline{P}-$simetriei orice grup $\tilde{G}$ este subgrup în produsul semidirect de dreapta al grupului de definire P cu grupul generator G, însoţit de omomorfismul fixat $\varphi : G \to AutP$, unde $\varphi(g) = \vec{\varphi}_g$ pentru orice $g \in G$ şi $\vec{\varphi}_g(p) = gpg^{-1}$, adică $\tilde{G} \le P \rightthreetimes_{\varphi H(\Phi)} G$. În acest caz, H este nucleul omomorfismului φ ($H = Ker\varphi$), iar Φ este imaginea completă a grupului G ($\Phi = \mathrm{Im}\varphi \le AutP$).

Vom menţiona că atât formularea problemei de generalizare concretă, cât şi aparatul matematic al $P-$simetriei reprezintă un caz particular al $\overline{P}-$simetriei. Anume, dacă acţiunea componentei geometrice g asupra „indicilor" este trivială (g generează substituţia unitate), atunci practic transformarea „indicilor" este descrisă în totalitate numai de componenta p. Mai mult decât atât, componentele geometrice g generează numai automorfismul identic al grupului de definire P, deci operaţia de grup devine pe componente (cazul $P-$simetriei). Amintim că produsul direct $P \times G$ se obţine ca un caz particular al produsului $P \rightthreetimes_{\varphi H(\Phi)} G$ atunci când $Ker\varphi = G$, iar $\Phi = i$ este automorfismul identic al grupului P.

Din esenţa noţiunii de simetrie generalizată „fizic”, cum sunt $P-$simetria şi $\overline{P}-$simetria, rezultă că orice grup $\tilde{G}$ de o anumită simetrie generalizată cu grupul de definire P şi grupul generator G reprezintă aşa o totalitate de elemente $\tilde{g}=g^{(p)}$, încât mulţimea componentelor geometrice g formează numaidecât grupul generator G ($G=\{g\,|\,g^{(p)}\in\tilde{G}\}$), pe când mulţimea componentelor-substituţii p formează o submulţime P' în grupul de definire P ($P'=\{p\,|\,g^{(g)}\in\tilde{G}\}\subseteq P$). În cazul $P-$simetriei submulţimea P' întotdeauna este un subgrup în P: $e<P'\leq P$, pe când la $\overline{P}-$simetrie P' nu întotdeauna este un subgrup în grupul P. Atenţionăm că P' este o submulţime cu unitatea grupului: $e\subset P'\subseteq P$. Ca rezultat, în clasificarea grupurilor de $\overline{P}-$simetrie pe tipuri, spre deosebire de $P-$simetrie, apar încă două tipuri noi: grupuri pseudominore (când $e=Q\subset P'\subset P$, dar P' nu este subgrup) şi grupuri pseudomijlocii (când $e<Q\subset P'\subset P$, dar P' nu este subgrup). Vom menţiona că clasificarea se face în dependenţă de coraportul dintre grupul de definire P, mulţimea substituţiilor-componente P' şi subgrupul transformărilor $P-$identice Q (unde $Q=\tilde{G}\cap P'=\tilde{G}\cap P$), care în ansamblu verifică relaţiile $e\leq Q\subseteq P'\subseteq P$.

Orice grup de $P-$simetrie completă ($P'=P$) cu grupul generator G poate fi dedus din grupurile P şi G în rezultatul paşilor următori: 1) în P şi G se caută divizorii normali Q şi, respectiv, H, încât grupurile-factor G/H şi P/Q să fie izomorfe: $G/H\cong P/Q$; 2) se construieşte izomorfismul χ al grupului-factor G/H pe grupul-factor P/Q conform regulii $\chi(gH)=pQ$; 3) se consideră reuniunea produselor obţinute $gH\cdot pQ$ (teorema principală a $P-$simetriei) [2]. Conform acestei teoreme, se deduc grupurile majore ($e<Q=P'=P$), minore ($e=Q<P'=P$) şi cele mijlocii ($e<Q<P'=P$). Celelalte tipuri ale grupurilor de $P-$simetrie, anume: cele semimajore ($e<Q=P'<P$), semiminore ($e=Q<P'<P$) şi, respectiv, semimijlocii ($e<Q<P'<P$) pot fi deduse în mod analogic considerând în teorema principală subgrupul P' în locul grupului P.

5. În procesul de elaborare a unor metode de deducere a grupurilor de tipuri diferite ale $\overline{P}-$simetriei din grupul de definire P şi grupul generator G aplicaţia omomorfă a unui grup pe alt grup a fost generalizată (cu două niveluri de generalizare) în formă de cvasiomomorfism de dreapta al grupului pe o submulţime din alt grup [2,3,11,18]. Vom comenta pe scurt aceste aplicaţii cu scopul de a ilustra mai bine trăsăturile specifice ale aparatului matematic al $\overline{P}-$simetriei în comparaţie cu aparatul matematic al $P-$simetriei.

Fiind date grupurile G şi P şi omomorfismul φ cu nucleul H al grupului G pe subgrupul Φ din grupul tuturor automorfismelor lui P, aplicaţia ψ a grupului G în grupul P (conform legii $\psi(g)=p$) se numeşte cvasiomomorfism de dreapta, dacă pentru orice g_i şi g_j din G $\psi(g_ig_j)=\psi(g_i)\cdot\vec{\varphi}_{g_i}[\psi(g_j)]=p_i\vec{\varphi}_{g_i}(p_j)=p_k$, unde $\vec{\varphi}_{g_i}=\varphi(g_i)$. Dacă $Ker\varphi=G$, atunci ψ degenerează în omomorfism obişnuit. Nucleul aplicaţiei cvasiomomorfe de dreapta ψ ($Ker\psi=H'$) este un subgrup în G, care, în general, nu este un divizor normal. Imaginea completă P' a grupului G la cvasiomomorfismul de dreapta ψ ($\mathrm{Im}\psi=P'$), în general, nu este grup, dar verifică condiţia $e\subset P'\subseteq P$. Pentru orice g_i din $G\setminus H'$ vom avea că $\psi(g_iH')=p_i\neq e$ (unde e este unitatea grupului dat P); dacă $g_iH'\neq g_jH'$, atunci şi $p_i\neq p_j$. În acest caz φ se numeşte omomorfismul însoţitor al aplicaţiei ψ.

Aplicaţia $\tilde{\psi}$ a grupului G în mulţimea claselor de resturi de dreapta ale grupului P în raport cu subgrupul său adevărat Q, conform legii $\tilde{\psi}(g_i)=Qp_i$, se numeşte cvasiomomorfism de dreapta generalizat, dacă $\tilde{\psi}(g_i)=Qp_i$ şi $\tilde{\psi}(g_j)=Qp_j$ implică egalităţile $\tilde{\psi}(g_ig_j)=Qp_i\cdot\vec{\varphi}_{g_i}(Qp_j)=Qp_k$. Pentru ca aplicaţia $\tilde{\psi}$ a grupului G în mulţimea claselor de resturi de dreapta ale grupului finit P în raport cu subgrupul său adevărat Q (conform legii $\tilde{\psi}(g_i) = Qp_i$) să fie cvasiomomorfism de dreapta generalizat, este necesar şi suficient ca $\vec{\varphi}_{g_i}(Q) = p^{-1}Qp$ pentru orice element g al grupului G şi $Qp = \tilde{\psi}(g)$.

În orice grup $\tilde{G}$ de $\overline{P}$-simetrie cu grupul generator G, nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi: G \to AutP$, subgrupul Q de transformări *P*-identice şi subgrupul H' de simetrie ($H' = G \cap \tilde{G}$) se conţine în calitate de subgrup un grup $H^{(P)}$ (cu operaţia de grup pe componente), care formal nu se deosebeşte de grupurile de *P*-simetrie. Din această cauză grupul $H^{(P)}$ este considerat în continuare drept grup de *P*-simetrie cu grupul generator H, cu acelaşi subgrup Q de transformări *P*-identice şi cu subgrupul de simetrie H'', unde $H'' = H' \cap H$.

Pentru grupurile finite P orice grup de $\overline{P}$-simetrie poate fi dedus din grupul său generator G, cunoscând nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi: G \to AutP$, făcând următorii paşi: 1) se găsesc în P toate subgrupurile Q şi submulţimile P' ce se descompun în clase de resturi de dreapta în raport cu Q, iar în G toate subgrupurile H' de indice egal cu puterea mulţimii tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui P' în raport cu Q, pentru care există izomorfismul grupurilor-factor P''/Q şi H/H'', unde $e \le Q \le P'' \subseteq P'$, $P'' < P$, $Q \triangleleft P''$, iar $H'' = H' \cap H$ şi $H'' \triangleleft H$; 2) se construieşte cvasiomomorfismul de dreapta generalizat $\tilde{\psi}$ cu nucleul H' al grupului G pe mulţimea tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui P' în raport cu Q, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul H, şi care păstrează corespondenţa dintre elementele lui P'' şi H obţinută în rezultatul izomorfismului grupurilor-factor H/H'' şi P''/Q; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare p' din $Qp = \tilde{\psi}(g)$ şi se introduce în mulţimea acestor perechi operaţia $p_i g_i \cdot p_j g_j = p_i \vec{\varphi}_{g_i}(p_j) g_i g_j = p_k g_k$, unde $\vec{\varphi}_{g_i} = \varphi(g_i)$ şi $\vec{\varphi}_{g_i}(p_j) = g_i p_j g_i^{-1}$ (teorema principală a $\overline{P}$-simetriei) [3,11].

Vom menţiona că pentru $Q = e$, adică pentru grupurile minore, semiminore şi pseudominore, teorema principală a $\overline{P}$-simetriei se simplifică foarte mult, folosindu-se de acum aplicaţiile cvasiomomorfe de dreapta ψ cu nucleul H' al grupului generador G pe submulţimea P' a grupului de definire P, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul H, care păstrează corespondenţa dintre elementele lui P'' şi H obţinută în rezultatul izomorfismului grupului-factor H/H'' pe grupul P'', unde $e \le P'' \subseteq P'$.

6. În ce priveşte $W_p -$ simetria, aparatul matematic este mult mai complex [3,4,21], deoarece el ţine cont de transformarea ,,indicilor" în fiecare din punctele $G-$echivalente, unde G este grupul generator. Vom comenta pe scurt esenţa şi bazele teoriei generale a $W_p -$simetriei pentru a ilustra mai bine trăsăturile specifice şi deosebirile dintre această generalizare a simetriei clasice şi alte generalizări bine cunoscute.

Construim produsul cartezian *W* al cópiilor izomorfe cu *P* şi indexate sus în dreapta cu elemente din *G*, adică $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$, (unde $P^{g_i} \cong P$). Fie că se dă includerea izomorfă φ a grupului *G* în grupul tuturor automorfismelor grupului *W* conform regulii $\varphi\ g\ = \vec{\varphi}_g = \bar{g}$, unde automorfismul $\bar{g}$ acţionează asupra elementelor $w = <..., p^{g_i}, ...>$ din *W* prin intermediul *g*-deplasărilor la stânga ale componentelor lor, adică $\bar{g}(w) = w^g = <..., p^{gg_i}, ...>$. Se consideră mulţimea $A = GW$ tuturor perechilor *gw,* unde $g \in G$ şi $w \in W$, care este un grup cu legea de compoziţie $g_i w_i \cdot g_j w_j = g_k w_k$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = \bar{g}_j(w_i) w_j = w_i^{g_j} w_j$ iar $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$. Grupul *A* este numit împletire (torsificare) standardă carteziană de stânga a grupului *P* cu grupul de operatori *G,* însoţită de deplasarea directă la stânga a componentelor. Structura algebrică obţinută se notează cu simbolul $\bar{G}\ Wr\ P$ sau cu simbolul $\bar{G} \wr P$. Este evident faptul că grupul A este un produs semidirect de stânga [2] al grupului W cu grupul de operatori G, însoţit de izomorfismul $\varphi: G \to AutW$ cu regula $\varphi(g) = \bar{g}$.

De menţionat că rolul grupurilor G şi P în împletirea standardă carteziană de stânga obţinută este diferit. Anume: grupul P joacă un rol pasiv, participând cu cópiile sale izomorfe în structura considerată, pe când grupul G joacă un rol activ, implicându-se prin intermediul elementelor sale în operaţia de grup şi generând anumite automorfisme ale grupului W. Mai mult decât atât, toate automorfismele neidentice ale grupului W, generate de elementele g din grupul G prin intermediul $g-$deplasărilor la stânga ale componentelor din w, sunt externe. În particular, dacă W este un produs direct al cópiilor izomorfe cu grupul P şi indexate cu elemente din grupul G, atunci prin analogie se obţine împletirea standardă directă de stânga a grupurilor P şi G, care se notează cu simbolul $\bar{G}\ wr\ P$ sau cu simbolul $\bar{G}\wr P$.

În cazul transformărilor $g^{(w)} = gw$ de W_p - simetrie componenta pur geometrică g acţionează direct numai asupra punctelor figurii geometrice F ,,indexate" şi nu acţionează asupra ,,indicilor" localizaţi în aceste puncte (ei sunt nişte mărimi scalare analog cazului P-simetriei lui Zamorzaev). În ce priveşte componenta a doua w (legea de transformare a ,,indicilor", unde $w \in W$), ea are o structură cu multe ,,componente" $w = <..., p^{g_i}, ...>$, unde ,,componentele" sunt nu altceva decât substituţii din grupul iniţial P. ,,Indicele" localizat în punctul $M_k = g_k(M_1)$ (unde punctul M_1 este un punct fixat de poziţie generală a figurii F faţă de grupul G) se transformă de către componenta p^{g_k} din w [19]. Este evident că puterea mulţimii de puncte $G-$echivalente cu punctul M_1 coincide cu numărul de ,,componente" p^{g_i} în w. Amintim, că grupul W este egal cu produsul cartezian al cópiilor izomorfe ale grupului iniţial de definire P, indexate cu elemente din grupul generator G.

Mulţimea $G^{(W_p)}$ transformărilor de W_p -simetrie ale unei figuri ,,indexate" $F^{(N)}$ formează un grup, care este subgrup în împletirea standardă carteziană de stânga a grupului iniţial de substituţii P cu grupul de simetrie G, însoţită de izomorfismul $\varphi: G \to AutW$ (unde $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$, $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g = \bar{g}$, iar $\bar{g}(w) = w^g = <..., p^{gg_i}, ...>$), adică $G^{(W_p)} \le \bar{G}\ Wr\ P$.

Mulţimea W' a tuturor componentelor w din transformările $g^{(w)} = gw = \ <g \mid p^{g_1}, p^{g_2}, ...>$ grupului $G^{(W_p)}$ de W_p -simetrie, în general, nu formează un grup. W' este o submulţime cu unitatea w_0 a grupului W ($w_0 \subseteq W' \subseteq W$). Subgrupul V al transformărilor W-identice ale grupului $G^{(W_p)}$ ($V = G^{(W_p)} \cap W' = G^{(W_p)} \cap W$) întotdeauna este un divizor normal în $G^{(W_p)}$. În ce priveşte subgrupul de simetrie H al grupului $G^{(W_p)}$ ($H = G^{(W_p)} \cap G$), el, în general, nu este un divizor normal.

Dintre proprietăţile specifice ale grupurilor de W_p -simetrie ce ţin de structura lor generală vom menţiona doar următoarele: 1) În orice grup de W_p -simetrie $G^{(W_p)}$, cu grupul iniţial de substituţii P şi grupul generator G, submulţimea $W' = \{w \mid g^{(w)} \in G^{(W_p)}\}$, subgrupul V de transformări W-identice şi subgrupul de simetrie H, se conţine în calitate de subgrup grupul $G_1^{(W_1)}$. Grupul $G_1^{(W_1)}$ este determinat de acelaşi grup iniţial de substituţii P, are grupul generator G_1 (unde $G_1 \le G$), iar totalitatea componentelor w ce caracterizează transformarea ,,indicilor" formează subgrupul W_1 din W, care verifică condiţiile $W_1 \le DiagW \cong P$ şi $W_1 \subset W'$). Vom menţiona că grupul $G_1^{(W_1)}$ are subgrupul V_1 de transformări P-identice (unde $V_1 = V \cap DiagW$) şi subgrupul de simetrie H. Grupul $G_1^{(W_1)}$ formal nu se deosebeşte de grupurile de $P-$simetrie. 2) Dacă grupul W este finit, atunci: a) $V^g = wVw^{-1}$ pentru componentele g şi w ale transformărilor $g^{(w)}$ din $G^{(W_p)}$, b) orice element al clasei de resturi Hg este combinat în perechi cu fiecare element al clasei de resturi wV, iar elementele claselor diferite Hg_i şi Hg_j – cu elementele claselor diferite w_iV şi, respectiv, w_jV.

Fie date grupurile G şi P şi omomorfismul φ cu nucleul H al grupului G în grupul $AutP$, unde $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g$ şi $\bar{\varphi}_g(p) = g^{-1}pg = p' \in P$. Aplicaţia μ a grupului G în grupul P, conform regulii $\mu(g) = p$, se numeşte cvasiomomorfism de stânga, dacă pentru orice g_i şi g_j din G avem $\mu(g_i g_j) = \bar{\varphi}_{g_j}(\mu(g_i)) \cdot \mu(g_j) = \bar{\varphi}_{g_j}(p_i) \cdot p_j = p_k$. Dacă nucleul omomorfismului însoţitor $\varphi : G \to AutW$ al aplicaţiei cvasiomomorfe de stânga μ a grupului G în grupul $W = \overline{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ este egal cu unitatea din G (adică, dacă φ este un izomorfism), atunci μ se numeşte cvasiomomorfism de stânga natural. Mai mult decât atât, dacă automorfismele respective $\varphi(g) = \bar{g}$ sunt generate de $g-$deplasările la stânga ale componentelor în w din W (adică, $\bar{g}(w) = w^g$), atunci aplicaţia μ se numeşte cvasiomomorfism de stânga natural exact al grupului G în grupul W.

Aplicaţia $\tilde{\mu}$ a grupului G pe submulţimea X a mulţimii tuturor claselor de resturi de stânga a grupului W în raport cu subgrupul său V conform regulii $\tilde{\mu}(g) = wV$ se numeşte cvasiomomorfism de stânga natural exact generalizat, însoţit de deplasarea la stânga directă, dacă, pentru orice $g_i, g_j \in G$, relaţiile $\tilde{\mu}(g_i) = w_i V$ şi $\tilde{\mu}(g_j) = w_j V$ implică $\tilde{\mu}(g_i g_j) = (w_i V)^{g_j} * w_j V = w_k V$, unde $w_i V,\ w_j V,\ w_k V \in X$.

Orice grup de $G^{(W_p)}$ de W_p-simetrie, cu grupul W finit, poate fi dedus din grupul său generator G şi grupul $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ prin paşii următori: 1) se caută în W toate subgrupurile V şi submulţimile W' ce se descompun în clase de resturi de stânga faţă de V, iar în G toate subgrupurile H de indice egal cu puterea mulţimii claselor de resturi ale lui W' în raport cu V şi pentru care există izomorfismul $\lambda : G_1 / H \to W_1 / V_1$, unde $G_1 \le G, W_1 \le DiagW$, $W_1 \subset W'$, iar $V_1 = V \cap DiagW$ şi $V_1 \lhd W_1$; 2) se construieşte cvasiomomorfismul de stânga natural exact generalizat $\tilde{\mu}$ cu nucleul H al grupului G pe mulţimea tuturor claselor de resturi de stânga ale submulţimii W' în raport cu V conform regulii $\tilde{\mu}(g_i) = w_i V$, ce păstrează corespondenţa dintre elementele grupurilor-factor G_1 / H şi W_1 / V_1, obţinută în rezultatul izomorfismului λ; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare w' din clasa de resturi $wV = \tilde{\mu}(g)$ şi în totalitatea acestor perechi se introduce legea de compoziţie $g_i w_i \circ g_j w_j = g_i g_j (w_i)^{g_j} w_j = g_k w_k$ (teorema principală a W_p-simetriei [3,21]).

Vom menţiona că, în cazul W_p-simetriei, nu există grupuri minore ($w_0 = V < W' = W$) pentru generalizările netriviale ($|P| \ge 2$, unde P este grupul de substituţii iniţial dat). Pentru grupurile semiminore ($w_0 = V < W' < W$) şi cele pseudominore ($w_0 = V \subset W' \subset W$ şi W' nu-i grup) teorema principală a W_p-simetriei se simplifică mult, folosindu-se de acum aplicaţiile cvasiomomorfe de stânga naturale exacte μ cu nucleul H al grupului G pe submulţimea W' din W, însoţit de izomorfismul $\varphi : G \to AutW$ (conform regulii $\varphi(g) = \bar{g}$), care păstrează corespondenţa dintre elementele lui G_1 şi W_1, obţinută în rezultatul izomorfismului grupului-factor G_1 / H pe W_1, unde $G_1 < G, w_0 \le W_1 \le DiagW$ şi $W_1 \subset W'$.

Bibliografie:

1. BIENENSTOCK, A. and EWALD, P.P. Symmetry of Fourier space. In: *Acta Crystallogr,* vol.15, 1962, p.1253-1261.
2. LUNGU, A. Aplicaţii cvasiomomorfe şi produse semidirecte de grupuri. În: *Conferinţa ştiinţifică jubiliară „50 de ani ai USM". Rezumatele comunicărilor*. 2-3 octombrie 1996. Chişinău, USM, 1996 p.22-24.
3. LUNGU, A. *Teoria simetriei de coloraţie generalizată cu aplicarea extensiunilor şi a împletirilor grupurilor* / Autoreferat al tezei de doctor habilitat. Chişinău, 1997.

4. LUNGU, A. The recent generalizations of colored symmetry. In: *Visual mathematics. Art and Science Electronic Journal of ISIS – Symmetry,* vol.2, 2000, no.2. 25 p. (versiunea electronică: http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/lungu/index.html).
5. NIGGLI, A., WONDRATSCHEK, H. Eine Versllegemeineryng der Punktgruppen. *Z. Kristallogr.*, 1960, Bd. 114, p.215-231.
6. SHUBNIKOV, A.V. and KOPTSIK, V.A. *Symmetry in Science and Art.* Moskow: Nauka, 1972. (English translation: Plenum, New York, 1974).
7. WITTKE, O. et GARRIDO, J. Symetrie des polyedres polychromatiques. In: *Bull. Soc. Franc. Miner. Cristallogr.*, vol. 82, 1959, p.223-230.
8. БЕЛОВ, Н.В., ТАРХОВА, Т.Н. Группы цветной симметрии. В: *Кристаллография*, 1956, том 1, вып.1, с.4-13.
9. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. О группах квазисимметрии (Р-симметрии) В: *Кристаллография.* 1967, том 12, с.819-825.
10. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., ГАЛЯРСКИЙ, Э.И. и ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Цветная симметрия, ее обобщения и приложения.* Кишинев: Штиинца, 1978. 275 с.
11. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., КАРПОВА, Ю.С., ЛУНГУ, А.П., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Р-симметрия и ее дальнейшее развитие.* Кишинев: Штиинца, 1986.
12. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., СОКОЛОВ, Е.И. Симметрия и различного рода антисимметрия конечных фигур. В: *Кристаллография*, 1957, том 2, вып.1, с.9-12.
13. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. *Теория простой и кратной антисимметрии.* Кишинев: Штиинца, 1976. 283 с.
14. КОПЦИК, В.А., КОЦЕВ, И.Н. К теории и классификации групп цветной симметрии. II. W-симметрия. В: *Сообщения ОИЯИ*, Р4-8068, Дубна, 1974.
15. КОПЦИК, В.А. К теории симметрии реального кристалла. В: *Проблемы кристаллологии.* Москва: МГУ, 1976, с.36-46.
16. КОПЦИК, В.А., КОЦЕВ, И.Н. КУЖУКЕЕВ, Ж.-Н.М. Беловские цветные группы и классификация магнитных структур. В: *Сообщения ОИЯИ*, Р4-7513, Дубна, 1973.
17. ЛУНГУ, А.П. *К теории* $\overline{P}-$ *симметрии* // Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 мая 1978 г., №1709-78 Деп., 16 с.
18. ЛУНГУ, А.П. К выводу групп Q-симметрии ($\overline{P}$ -симметрии). В: *Кристаллография*, 1980, том 25, вып.5, с. 1051-1053.
19. ЛУНГУ, А.П. К классификации групп W-симметрии. В: *Исследования по современной алгебре и геометрии.* Кишинёв: Штиинца, 1983, с.79-84.
20. ЛУНГУ, А.П. К теории групп W-симметрии. В: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, 1992, nr.3(9), p.72-81.
21. ЛУНГУ, А.П. Универсальная методика вывода конечных групп W_p-симметрии. În: *Anale ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe reale”.* Chişinău, 1997, p.16-22.
22. НЕРОНОВА, Н.Н., БЕЛОВ, Н.В. Цветные антисимметрические мозаики. В: *Кристаллография*, 1961, том 6, вып.6, с.831-839.
23. ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. Двумерные группы цветных симметрий и различного рода антисимметрии. В: *Кристаллография*, 1966, том 11, вып.5, с.707-713.
24. ПОЛИ, Г.И. Мозаики для групп цветной антисимметрии. В: *Кристаллография*, 1961, том 6, вып.1, с.109-111.
25. ТАВГЕР, Б.А., ЗАЙЦЕВ, В.М. *О магнитной симметрии кристаллов.* В: *ЖЭТФ*, 1956, том 30, вып.3, с.564-568.
26. ШУБНИКОВ, А.В. *Симметрия и антисимметрия конечных фигур.* Москва: Изд-во АН СССР, 1951. 172 с.

Notă: *Lucrarea a fost elaborată în cadrul Proiectelor 12.839.08.07F şi 11.817.08.41F.*

Prezentat la 21.01.2013