

КОНСТРУКЦИИ ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ, СОХРАНЯЮЩИЕ ПОЛУИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ

Светлана АЛЕЩЕНКО

Тираспольский государственный университет

CONSTRUCȚIA INELELOR PSEUDONORMATE CARE PĂSTREAZĂ IZOMORFISMUL SEMIIZOMETRIC

Se examinează noțiunea de izomorfism semiizometric al inelelor pseudonormate. Se arată că izomorfismul semiizometric se păstrează la trecerea la limită și la supremumul pseudonormelor, la construcția sumei directe a inelelor pseudonormate.

Cuvinte-cheie: pseudonormă, inel pseudonormat, homomorfism izometric, izomorfism semiizometric, suma directă a inelelor.

CONSTRUCTIONS OF PSEUDONORMED RINGS WHICH KEEP A SEMI-ISOMETRIC ISOMORPHISM

In the present work the conception of a semi-isometric isomorphism of pseudonormed rings is studied. It's shown that a semi-isometric isomorphism is kept for the limit and supremum of pseudonorms, for the direct sum of pseudonormed rings.

Keywords: pseudonorm, pseudonormed ring, isometric homomorphism, semi-isometric isomorphism, the direct sum of rings.

1. Введение

1.1. Определение. Вещественнозначную функцию ξ , заданную в кольце \mathbf{R} , называют псевдонормой, если выполнены следующие условия:

- I. $\xi r \geq 0$ для любого $r \in \mathbf{R}$;
- II. $\xi r = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;
- III. $\xi -r = \xi r$ для любого $r \in \mathbf{R}$;
- IV. $\xi r_1 + r_2 \leq \xi r_1 + \xi r_2$ для любых $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$;
- V. $\xi r_1 \cdot r_2 \leq \xi r_1 \cdot \xi r_2$ для любых $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$.

Кольцо \mathbf{R} с заданной в нем псевдонормой называют псевдонормированным кольцом и обозначают \mathbf{R}, ξ .

Следующая теорема об изоморфизме часто применяется в алгебре.

1.2. Теорема. Пусть \mathbf{R} – кольцо, \mathbf{B} – подкольцо кольца \mathbf{R} . Если \mathbf{N} – идеал в \mathbf{R} , то существует изоморфизм $\varphi: \mathbf{B} / \mathbf{B} \cap \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{N} / \mathbf{N}$.

Эта теорема для топологических и псевдонормированных колец не всегда имеет место, поскольку на изоморфизм таких колец накладывается условие сохранения топологии (псевдонормы), т.е. изоморфизм топологических колец должен быть гомеоморфизмом, а изоморфизм псевдонормированных колец должен быть изометрическим. В [1] было доказано, что ничего больше, чем неравенство $\tilde{\xi} \varphi x \leq \xi x$ для кольцевого изоморфизма φ , получить нельзя. Поэтому на подкольцо \mathbf{B} приходится накладывать дополнительные условия, например, потребовать, чтобы \mathbf{B} было идеалом в кольце \mathbf{R} . В [1] было рассмотрено следующее понятие.

1.3. Определение. Пусть \mathbf{R}, ξ и $\bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – псевдонормированные кольца. Изоморфизм $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ назовём полуизометрическим, если существует такое псевдонормированное кольцо $\hat{\mathbf{R}}, \hat{\xi}$, что выполнены следующие условия:

- \mathbf{R} является идеалом в кольце $\hat{\mathbf{R}}$;
- $\hat{\xi}|_{\mathbf{R}} = \xi$;
- изоморфизм φ может быть продолжен до изометрического гомоморфизма $\hat{\varphi}: \hat{\mathbf{R}}, \hat{\xi} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$

псевдонормированных колец, т.е. такого гомоморфизма $\hat{\varphi}$, что

$$\bar{\xi} \hat{\varphi} \hat{r} = \inf_{i \in \ker \hat{\varphi}} \hat{\xi} \hat{r} + i \quad \text{для всех } \hat{r} \in \hat{\mathbf{R}}.$$

В [1] была доказана следующая теорема.

1.4. Теорема (критерий полуизометрического изоморфизма). Пусть \mathbf{R}, ξ и $\bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ – кольцевой изоморфизм. Изоморфизм $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец тогда и только тогда, когда

$$\frac{\xi}{\xi} \frac{a \cdot b}{b} \leq \bar{\xi} \varphi a \leq \xi a \quad \text{и} \quad \frac{\xi}{\xi} \frac{b \cdot a}{b} \leq \bar{\xi} \varphi a \leq \xi a$$

для любых $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathbf{R} \setminus 0$.

В настоящей работе рассмотрим некоторые конструкции псевдонормированных колец, сохраняющие полуизометрический изоморфизм.

2. Вспомогательные неравенства

2.1. Определение. Действительные числа p и p^* , где $p > 1$ и $p^* > 1$, называют сопряженными, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

2.2. Предложение. Для любых действительных чисел $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, где $k = 1, 2, \dots, n$, и для любого действительного числа $p > 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^{p^*} \right)^{1/p^*},$$

где p^* – сопряженное число к p .

2.3. Предложение. Для любых действительных чисел $a_{ik} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ и для любого действительного числа $p > 1$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} \right)^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^p \right)^{1/p}.$$

2.4. Предложение. Пусть для действительных чисел $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ задано семейство функций $G_\gamma a_1, a_2, \dots, a_n$ $| 1 \leq \gamma \leq \infty$ таких, что $G_\gamma a_1, a_2, \dots, a_n = \left(\sum_{k=1}^n a_k^\gamma \right)^{1/\gamma}$ при $1 \leq \gamma < \infty$ и $G_\infty a_1, a_2, \dots, a_n = \max a_1, a_2, \dots, a_n$ при $\gamma = \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} G_\gamma a_1, a_2, \dots, a_n = G_\infty a_1, a_2, \dots, a_n$ для любых $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;
- 2) $G_\gamma a_1, a_2, \dots, a_n \geq G_\sigma a_1, a_2, \dots, a_n$ для всех $1 \leq \gamma \leq \sigma \leq \infty$ и $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;
- 3) $\sup_{\gamma > 1} G_\gamma a_1, a_2, \dots, a_n = G_1 a_1, a_2, \dots, a_n$ для любых $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство предложений 2.2, 2.3 и 2.4 можно найти в [4].

3. Основные результаты

3.1. Определение. Направленным множеством называют частично упорядоченное множество Γ , удовлетворяющее следующему условию: для любых двух элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ найдется элемент $\gamma_3 \in \Gamma$, такой, что $\gamma_3 \geq \gamma_1$ и $\gamma_3 \geq \gamma_2$.

3.2. Определение. Пусть X – топологическое пространство, $x_\gamma | \gamma \in \Gamma$ – последовательность элементов из X по направленному множеству Γ . Элемент $a \in X$ называется пределом последовательности $x_\gamma | \gamma \in \Gamma$ по направленному множеству Γ , если для любой окрестности V точки a в X найдется элемент $\gamma_0 \in \Gamma$, такой, что $x_\gamma \in V$ для всех $\gamma \geq \gamma_0$. Обозначают $a = \lim_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$.

3.3. Предложение. Пусть Γ – некоторое множество, $\xi_\gamma | \gamma \in \Gamma$ – семейство псевдонорм в кольце \mathbf{R} . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если Γ – направленное множество, и для любого $r \in \mathbf{R}$ существует предел $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ по направленному множеству Γ , причем $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r \neq 0$ для каждого $r \neq 0$, то функция ξ , заданная как $\xi r = \lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ для каждого $r \in \mathbf{R}$, является псевдонормой в кольце \mathbf{R} ;

2) если для любого $r \in \mathbf{R}$ множество $\xi_\gamma r | \gamma \in \Gamma$ ограничено сверху, то функция ξ , заданная как $\xi r = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ для каждого $r \in \mathbf{R}$, является псевдонормой в кольце \mathbf{R} .

Доказательство. 1) Рассмотрим функцию $\xi r = \lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$. Покажем, что ξ является псевдонормой в кольце \mathbf{R} . Очевидно, что выполнены условия: I. $\xi r \geq 0$ для любого $r \in \mathbf{R}$; II. $\xi r = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$; III. $\xi -r = \xi r$ для всех $r \in \mathbf{R}$.

Покажем, что для всех $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ выполнены условия IV. $\xi r_1 + r_2 \leq \xi r_1 + \xi r_2$ и V. $\xi r_1 \cdot r_2 \leq \xi r_1 \cdot \xi r_2$. Из определения 3.2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Gamma$, такие, что

$$\begin{aligned} |\xi_\gamma r_1 - \xi r_1| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_1, \\ |\xi_\gamma r_2 - \xi r_2| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_2, \\ |\xi_\gamma r_1 + r_2 - \xi r_1 + r_2| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_3, \\ |\xi_\gamma r_1 \cdot r_2 - \xi r_1 \cdot r_2| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_4. \end{aligned}$$

Поскольку Γ – направленное множество, то существует $\gamma_5 \in \Gamma$, такое, что $\gamma_5 \geq \gamma_1, \gamma_5 \geq \gamma_2, \gamma_5 \geq \gamma_3$ и $\gamma_5 \geq \gamma_4$. Тогда для всех $\gamma \geq \gamma_5$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \xi r_1 + r_2 &< \xi_\gamma r_1 + r_2 + \varepsilon \leq \xi_\gamma r_1 + \xi_\gamma r_2 + \varepsilon < \xi r_1 + \xi r_2 + 3\varepsilon; \\ \xi r_1 \cdot r_2 &< \xi_\gamma r_1 \cdot r_2 + \varepsilon \leq \xi_\gamma r_1 \cdot \xi_\gamma r_2 + \varepsilon < \xi r_1 + \varepsilon \cdot \xi r_2 + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $\xi r_1 + r_2 \leq \xi r_1 + \xi r_2$ и $\xi r_1 \cdot r_2 \leq \xi r_1 \cdot \xi r_2$ для всех $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$.

Значит, функция ξ действительно задает псевдонорму в кольце \mathbf{R} .

3) Рассмотрим функцию $\xi r = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$. Покажем, что ξ является псевдонормой в кольце \mathbf{R} .

Очевидно, что выполнены условия: I. $\xi r \geq 0$ для любого $r \in \mathbf{R}$; II. $\xi r = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$; III. $\xi -r = \xi r$ для всех $r \in \mathbf{R}$.

Покажем, что для всех $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ выполнены условия IV. $\xi r_1 + r_2 \leq \xi r_1 + \xi r_2$ и V. $\xi r_1 \cdot r_2 \leq \xi r_1 \cdot \xi r_2$. Так как $\xi r_1 + r_2 = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r_1 + r_2$ и $\xi r_1 \cdot r_2 = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r_1 \cdot r_2$, то из определения супремума следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, такие, что

$$\xi r_1 + r_2 - \varepsilon < \xi_{\gamma_1} r_1 + r_2 \leq \xi r_1 + r_2,$$

$$\xi r_1 \cdot r_2 - \varepsilon < \xi_{\gamma_2} r_1 \cdot r_2 \leq \xi r_1 \cdot r_2.$$

Тогда выполнены неравенства

$$\xi r_1 + r_2 < \xi_{\gamma_1} r_1 + r_2 + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_1} r_1 + \xi_{\gamma_1} r_2 + \varepsilon \leq \xi r_1 + \xi r_2 + \varepsilon;$$

$$\xi r_1 \cdot r_2 < \xi_{\gamma_2} r_1 \cdot r_2 + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_2} r_1 \cdot \xi_{\gamma_2} r_2 + \varepsilon \leq \xi r_1 \cdot \xi r_2 + \varepsilon.$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $\xi r_1 + r_2 \leq \xi r_1 + \xi r_2$ и $\xi r_1 \cdot r_2 \leq \xi r_1 \cdot \xi r_2$ для всех $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$.

Таким образом, функция ξ является псевдонормой в кольце \mathbf{R} . Предложение доказано.

3.4. Предложение. Пусть \mathbf{R} и $\bar{\mathbf{R}}$ – кольца, $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце \mathbf{R} задано семейство псевдонорм $\xi_\gamma | \gamma \in \Gamma$;

2) в кольце $\bar{\mathbf{R}}$ задано семейство псевдонорм $\bar{\xi}_\gamma | \gamma \in \Gamma$;

3) для каждого $\gamma \in \Gamma$ изоморфизм $\varphi: \mathbf{R}, \xi_\gamma \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}_\gamma$ является полуизометрическим.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если Γ – направленное множество, и для любых $r \in \mathbf{R}$ и $\bar{r} \in \bar{\mathbf{R}}$ существуют пределы $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ и $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r}$ по направленному множеству Γ , причем $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r} \neq 0$ для каждого

$\bar{r} \neq 0$, то $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм, где $\xi r = \lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ и

$\bar{\xi} \bar{r} = \lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r}$ для всех $r \in \mathbf{R}$ и $\bar{r} \in \bar{\mathbf{R}}$;

2) если для любого $r \in \mathbf{R}$ множество $\xi_\gamma r | \gamma \in \Gamma$ ограничено сверху, то $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм, где $\xi r = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ и $\bar{\xi} \bar{r} = \sup_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r}$ для всех $r \in \mathbf{R}$ и $\bar{r} \in \bar{\mathbf{R}}$.

Доказательство.

1) Рассмотрим псевдонормы $\xi r = \lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ и $\bar{\xi} \bar{r} = \lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r}$ в кольцах \mathbf{R} и $\bar{\mathbf{R}}$, соответственно. Покажем, что $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм.

Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ отображение $\varphi: \mathbf{R}, \xi_\gamma \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}_\gamma$ является полуизометрическим изоморфизмом, то по теореме 1.4 для любых $r, q \in \mathbf{R}$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнены неравенства

$$\xi_\gamma r \cdot q \leq \bar{\xi}_\gamma \varphi r \cdot \bar{\xi}_\gamma q, \xi_\gamma q \cdot r \leq \bar{\xi}_\gamma q \cdot \bar{\xi}_\gamma \varphi r \text{ и } \bar{\xi}_\gamma \varphi r \leq \xi_\gamma r.$$

Из определения 3.2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \in \Gamma$, такие, что

$$\begin{aligned} |\xi_\gamma r - \xi r| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_1, \\ |\xi_\gamma q - \xi q| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_2, \\ |\xi_\gamma r \cdot q - \xi r \cdot q| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_3, \\ |\xi_\gamma q \cdot r - \xi q \cdot r| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_4, \\ |\bar{\xi}_\gamma \varphi r - \bar{\xi} \varphi r| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_5. \end{aligned}$$

Поскольку Γ – направленное множество, то существует $\gamma_6 \in \Gamma$, такое, что $\gamma_6 \geq \gamma_i$ для всех $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда для всех $\gamma \geq \gamma_6$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \xi r \cdot q &< \xi_\gamma r \cdot q + \varepsilon \leq \bar{\xi}_\gamma \varphi r \cdot \xi_\gamma q + \varepsilon < \bar{\xi} \varphi r + \varepsilon \cdot \xi q + \varepsilon + \varepsilon; \\ \xi q \cdot r &< \xi_\gamma q \cdot r + \varepsilon \leq \xi_\gamma q \cdot \bar{\xi}_\gamma \varphi r + \varepsilon < \xi q + \varepsilon \cdot \bar{\xi} \varphi r + \varepsilon + \varepsilon; \\ \bar{\xi} \varphi r &< \bar{\xi}_\gamma \varphi r + \varepsilon \leq \xi_\gamma r + \varepsilon < \xi r + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, для всех $r, q \in \mathbf{R}$ получим

$$\xi r \cdot q \leq \bar{\xi} \varphi r \cdot \xi q, \xi q \cdot r \leq \xi q \cdot \bar{\xi} \varphi r \text{ и } \bar{\xi} \varphi r \leq \xi r,$$

откуда по теореме 1.4 следует, что $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм.

2) Рассмотрим псевдонормы $\xi r = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ и $\bar{\xi} r = \sup_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma r$ в кольцах \mathbf{R} и $\bar{\mathbf{R}}$, соответственно. Покажем, что $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм.

Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ отображение $\varphi: \mathbf{R}, \xi_\gamma \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}_\gamma$ является полуизометрическим изоморфизмом, то по теореме 1.4 для любых $r, q \in \mathbf{R}$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнены неравенства

$$\xi_\gamma r \cdot q \leq \bar{\xi}_\gamma \varphi r \cdot \xi_\gamma q, \xi_\gamma q \cdot r \leq \xi_\gamma q \cdot \bar{\xi}_\gamma \varphi r \text{ и } \bar{\xi}_\gamma \varphi r \leq \xi_\gamma r.$$

Из определения точной верхней грани следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$, такие, что

$$\begin{aligned} \xi r \cdot q - \varepsilon &< \xi_{\gamma_1} r \cdot q \leq \xi r \cdot q, \\ \xi q \cdot r - \varepsilon &< \xi_{\gamma_2} q \cdot r \leq \xi q \cdot r, \\ \bar{\xi} \varphi r - \varepsilon &< \bar{\xi}_{\gamma_3} \varphi r \leq \bar{\xi} \varphi r. \end{aligned}$$

Тогда выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \xi r \cdot q &< \xi_{\gamma_1} r \cdot q + \varepsilon \leq \bar{\xi}_{\gamma_1} \varphi r \cdot \xi_{\gamma_1} q + \varepsilon \leq \bar{\xi} \varphi r \cdot \xi q + \varepsilon, \\ \xi q \cdot r &< \xi_{\gamma_2} q \cdot r + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_2} q \cdot \bar{\xi}_{\gamma_2} \varphi r + \varepsilon \leq \xi q \cdot \bar{\xi} \varphi r + \varepsilon, \\ \bar{\xi} \varphi r &< \bar{\xi}_{\gamma_3} \varphi r + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_3} r + \varepsilon \leq \xi r + \varepsilon. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, для всех $r, q \in \mathbf{R}$ получим

$$\xi r \cdot q \leq \bar{\xi} \varphi r \cdot \xi q, \xi q \cdot r \leq \xi q \cdot \bar{\xi} \varphi r \text{ и } \bar{\xi} \varphi r \leq \xi r,$$

откуда по теореме 1.4 следует, что $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм. Теорема доказана.

3.5. Следствие. Пусть \mathbf{R} и $\bar{\mathbf{R}}$ – кольца, $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце \mathbf{R} задано семейство псевдонорм $\xi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma$;

2) в кольце $\bar{\mathbf{R}}$ задана псевдонорма $\bar{\xi}$;

3) для каждого $\gamma \in \Gamma$ изоморфизм $\varphi: \mathbf{R}, \xi_\gamma \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ является полуизометрическим.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если Γ – направленное множество, и для любого $r \in \mathbf{R}$ существует предел $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ по направленному множеству Γ , то $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм, где $\xi r = \lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ для каждого $r \in \mathbf{R}$;

2) если для любого $r \in \mathbf{R}$ множество $\xi_\gamma r \mid \gamma \in \Gamma$ ограничено сверху, то $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм, где $\xi r = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma r$ для каждого $r \in \mathbf{R}$.

3.6. Следствие. Пусть \mathbf{R} и $\bar{\mathbf{R}}$ – кольца, $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце \mathbf{R} задана псевдонорма ξ ;

2) в кольце $\bar{\mathbf{R}}$ задано семейство псевдонорм $\bar{\xi}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma$;

3) для каждого $\gamma \in \Gamma$ изоморфизм $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}_\gamma$ является полуизометрическим.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если Γ – направленное множество, и для любого $\bar{r} \in \bar{\mathbf{R}}$ существует предел $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r}$ по направленному множеству Γ , причем $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r} \neq 0$ для каждого $\bar{r} \neq 0$, то $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм, где $\bar{\xi} \bar{r} = \lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r}$ для каждого $\bar{r} \in \bar{\mathbf{R}}$;

2) если $\bar{\xi} \bar{r} = \sup_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma \bar{r}$ для каждого $\bar{r} \in \bar{\mathbf{R}}$, то $\varphi: \mathbf{R}, \xi \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм.

3.7. Предложение. Пусть \mathbf{R}_k, ξ_k , $k=1, 2, \dots, n$, – псевдонормированные кольца, и $\mathbf{R} = \bigoplus_{k=1}^n \mathbf{R}_k = \mathbf{r} = r_1, r_2, \dots, r_n \mid r_k \in \mathbf{R}_k, 1 \leq k \leq n$ – прямая сумма колец \mathbf{R}_k , $1 \leq k \leq n$. Тогда каждая из функций $\zeta_\gamma r = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k r_k^\gamma \right)^{1/\gamma}$, $1 \leq \gamma < \infty$, $\zeta_\infty r = \max \xi_k r_k \mid 1 \leq k \leq n$ задает псевдонорму в кольце \mathbf{R} .

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\zeta_\gamma r = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k r_k^\gamma \right)^{1/\gamma}$, $1 < \gamma < \infty$. Покажем, что ζ_γ является псевдонормой в кольце \mathbf{R} .

Очевидно, что следующие условия псевдонормы выполнены: I. $\zeta_\gamma r \geq 0$ для любого $r \in \mathbf{R}$; II. $\zeta_\gamma r = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$; III. $\zeta_\gamma -r = \zeta_\gamma r$ для всех $r \in \mathbf{R}$.

Покажем, что выполнено условие IV. $\zeta_\gamma a + b \leq \zeta_\gamma a + \zeta_\gamma b$ для всех $a, b \in R$. Так как ξ_k – псевдонорма в кольце R_k , то для любых $a_k, b_k \in R_k$ имеем

$$\xi_k a_k + b_k \leq \xi_k a_k + \xi_k b_k .$$

В силу предложения 2.3 получим

$$\begin{aligned} \zeta_\gamma a + b &= \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k + b_k \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k + \xi_k b_k \right)^{1/\gamma} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right)^{1/\gamma} + \left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k \right)^{1/\gamma} = \zeta_\gamma a + \zeta_\gamma b . \end{aligned}$$

Покажем, что выполнено условие V. $\zeta_\gamma a \cdot b \leq \zeta_\gamma a \cdot \zeta_\gamma b$ для всех $a, b \in R$. Так как ξ_k – псевдонорма в кольце R_k , то для любых $a_k, b_k \in R_k$ имеем

$$\xi_k a_k \cdot b_k \leq \xi_k a_k \cdot \xi_k b_k .$$

Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \cdot b_k \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k \right)^{1/\gamma} .$$

Так как $\xi_k b_k \leq \max \xi_1 b_1, \xi_2 b_2, \dots, \xi_n b_n$, то

$$\left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right)^{1/\gamma} \cdot \max \xi_1 b_1, \xi_2 b_2, \dots, \xi_n b_n .$$

Из предложения 2.4 следует, что

$$\max \xi_1 b_1, \xi_2 b_2, \dots, \xi_n b_n \leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k \right)^{1/\gamma} ,$$

и мы получим

$$\begin{aligned} \zeta_\gamma a \cdot b &= \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \cdot b_k \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k \right)^{1/\gamma} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right)^{1/\gamma} \cdot \max \xi_1 b_1, \xi_2 b_2, \dots, \xi_n b_n \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k \right)^{1/\gamma} = \zeta_\gamma a \cdot \zeta_\gamma b . \end{aligned}$$

Значит, функция ζ_γ действительно задаёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ для каждого $\gamma \in I, +\infty$.

Рассмотрим $\zeta_I r = \sum_{k=1}^n \xi_k r_k$. Из предложения 2.4 следует, что $\zeta_I r = \sup_{\gamma > 1} \zeta_\gamma r$ для всех

$r \in R$. Так как функции ζ_γ являются псевдонормами в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ для всех $\gamma \in I, +\infty$, то

из предложения 3.3 следует, что функция ζ_I также задаёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$.

Рассмотрим $\zeta_\infty r = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k r_k$. Из предложения 2.4 следует, что $\zeta_\infty r = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \zeta_\gamma r$

для всех $r \in R$. Так как функции ζ_γ являются псевдонормами в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ для всех $\gamma \in 1, +\infty$,

то из предложения 3.3 следует, что функция ζ_∞ также задаёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$.

Таким образом, каждая из функций ζ_γ , $1 \leq \gamma \leq \infty$, задает псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$. Предложение доказано.

3.8. Теорема. Пусть R_k, ξ_k и $\bar{R}_k, \bar{\xi}_k$, $k=1, 2, \dots, n$, – псевдонормированные кольца, $\varphi_k: R_k, \xi_k \rightarrow \bar{R}_k, \bar{\xi}_k$, $k=1, 2, \dots, n$, – полуизометрические изоморфизмы,

$R = \bigoplus_{k=1}^n R_k = r = r_1, \dots, r_n \mid r_k \in R_k, 1 \leq k \leq n$ и $\bar{R} = \bigoplus_{k=1}^n \bar{R}_k = \bar{r} = \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n \mid \bar{r}_k \in \bar{R}_k, 1 \leq k \leq n$ –

прямые суммы колец R_k и \bar{R}_k с псевдонормами ζ_γ и $\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$ соответственно, где $\zeta_\gamma r = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k r_k^\gamma \right)^{1/\gamma}$,

$1 \leq \gamma < \infty$, $\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}} \bar{r} = \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \bar{r}_k^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}}$, $1 \leq \bar{\gamma} < \infty$, $\zeta_\infty r = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k r_k$,

$\bar{\zeta}_\infty \bar{r} = \max_{1 \leq k \leq n} \bar{\xi}_k \bar{r}_k$. Тогда для любых $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$ отображение $\Phi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \dots \times \varphi_n$,

$\Phi: R, \zeta_\gamma \rightarrow \bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$, действующее по правилу $\Phi r_1, r_2, \dots, r_n = \varphi_1 r_1, \varphi_2 r_2, \dots, \varphi_n r_n$,

также является полуизометрическим изоморфизмом.

Доказательство.

Проверим выполнение критерия полуизометрического изоморфизма (см. теорему 1.4) для отображения $\Phi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \dots \times \varphi_n$, $\Phi: R, \zeta_\gamma \rightarrow \bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$, в случае $1 < \gamma \leq \bar{\gamma} < \infty$.

Так как $\varphi_k: R_k, \xi_k \rightarrow \bar{R}_k, \bar{\xi}_k$ – полуизометрический изоморфизм, то для любых $a_k, b_k \in R_k$ выполнены неравенства

$$\bar{\xi}_k \varphi_k a_k \leq \xi_k a_k; \xi_k a_k \cdot b_k \leq \bar{\xi}_k \varphi_k a_k \cdot \xi_k b_k; \xi_k b_k \cdot a_k \leq \bar{\xi}_k \varphi_k a_k \cdot \xi_k b_k.$$

Тогда из этих неравенств с учетом предложения 2.4 для произвольных $a = a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ и $b = b_1, b_2, \dots, b_n \in R$ имеем

$$\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}} \Phi a = \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \varphi_k a_k^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k^\gamma \right)^{1/\gamma} = \zeta_\gamma a.$$

Затем

$$\begin{aligned} \zeta_\gamma a \cdot b &= \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k \cdot b_k^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \varphi_k a_k \cdot \xi_k b_k^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \bar{\xi}_k \varphi_k a_k \cdot \left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \varphi_k a_k^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k^\gamma \right)^{1/\gamma} = \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}} \Phi a \cdot \zeta_\gamma b. \end{aligned}$$

Аналогично доказываем неравенство $\zeta_\gamma b \cdot a \leq \bar{\zeta}_\gamma \Phi a \cdot \zeta_\gamma b$.

Таким образом, для любых $a, b \in R$ выполнены неравенства

$$\zeta_\gamma a \cdot b \leq \bar{\zeta}_\gamma \Phi a \cdot \zeta_\gamma b ; \zeta_\gamma b \cdot a \leq \zeta_\gamma b \cdot \bar{\zeta}_\gamma \Phi a ; \bar{\zeta}_\gamma \Phi a \leq \zeta_\gamma a .$$

Значит, по теореме 1.4 отображение $\Phi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \dots \times \varphi_n$ действительно является полуизометрическим изоморфизмом кольца R, ζ_γ в кольцо $\bar{R}, \bar{\zeta}_\gamma$ при $1 < \gamma \leq \bar{\gamma} < \infty$.

Рассмотрим предельные случаи для γ и $\bar{\gamma}$.

Если $\gamma = 1$ и $1 < \bar{\gamma} < \infty$, то $\zeta_1 = \sup_{\gamma > 1} \zeta_\gamma$ в силу предложения 2.4. Тогда из следствия 3.5 следует,

что $\Phi: R, \zeta_1 \rightarrow \bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$ – полуизометрический изоморфизм.

При $\gamma = \bar{\gamma} = 1$ согласно предложению 2.4 имеем $\zeta_1 = \sup_{\gamma > 1} \zeta_\gamma$ и $\bar{\zeta}_1 = \sup_{\bar{\gamma} > 1} \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из предложения 3.4 следует, что $\Phi: R, \zeta_1 \rightarrow \bar{R}, \bar{\zeta}_1$ – полуизометрический изоморфизм.

Если $\bar{\gamma} = \infty$ и $1 < \gamma < \infty$, то из предложения 2.4 следует, что $\bar{\zeta}_\infty = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow +\infty} \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из следствия 3.6 следует, что $\Phi: R, \zeta_\gamma \rightarrow \bar{R}, \bar{\zeta}_\infty$ – полуизометрический изоморфизм. Применяя следствие 3.5, получим, что при $\bar{\gamma} = \infty$ и $\gamma = 1$ отображение $\Phi: R, \zeta_1 \rightarrow \bar{R}, \bar{\zeta}_\infty$ также является полуизометрическим изоморфизмом.

Если $\gamma = \bar{\gamma} = \infty$, то согласно предложению 2.4 имеем $\zeta_\infty = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \zeta_\gamma$ и $\bar{\zeta}_\infty = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow +\infty} \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из предложения 3.4 следует, что $\Phi: R, \zeta_\infty \rightarrow \bar{R}, \bar{\zeta}_\infty$ – полуизометрический изоморфизм.

Таким образом, каковы бы ни были $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$, отображение $\Phi: R, \zeta_\gamma \rightarrow \bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$, где $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ и $\bar{R} = \bigoplus_{k=1}^n \bar{R}_k$, является полуизометрическим изоморфизмом прямых сумм псевдонормированных колец. Теорема доказана.

Литература:

1. ALESCHENKO, S.A., ARNAUTOV, V.I. Quotient rings of pseudonormed rings. În: *Buletinul Academiei de Științe a Moldovei*, 2006, no.1(44), p.3-16.
2. ALESCHENKO, S.A. On some constructions of pseudonormed rings preserving semi-isometric isomorphisms. În: *5th International Algebraic Conference in Ukraine*, Odessa, 2005, p.15-16.
3. ARNAUTOV, V.I., GLAVATSKY, S.T., MIKHALEV, A.V. *Introduction to the theory of topological rings and modules*. Marcel Dekker, Inc. New York, 1996.
4. ХАРДИ, Г.Г., ЛИТТЛВУД, Дж.Е., ПОЛИА, Г. *Неравенства*. Москва, ИЛ, 1948.

Prezentat la 11.07.2013