

PROPAGAREA UNDELOR ELASTICE ÎN MEDII PLAN-PARALELE

Alisa CURLICOVSCHI

Universitatea de Stat din Moldova

Unde elastice apar doar dacă există sursa de oscilație (perturbația) și mediul elastic de propagare. Propagarea lor continuă are loc cu o viteză finită, numită viteză de propagare a undelor elastice, iar localizarea în timp și spațiu se referă la sursa de oscilații. Unda elastică transmite energie și impuls, iar propagarea oscilațiilor printr-un mediu elastic sub formă de unde elastice indică tendința sistemului spre o valoare minimă a energiei potențiale, adică spre o nouă stare de echilibru. În lucrare este prezentată soluționarea problemei cu privire la răspândirea undelor elastice monocromatice în medii plan-paralele. Funcțiile proprii ale oscilațiilor pentru problema cercetată nu depind de vectorul de undă, iar vitezele de grup sunt mai mici ca vitezele de propagare a undelor de deplasare în mediul cu aceleași caracteristici și se apropie asimptotic de această viteză odată cu creșterea vectorului de undă.

Cuvinte-cheie: unde elastice, medii plan-paralele, vector de undă, viteze de propagare.

THE PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN PLANE-PARALLEL MEDIA

Elastic waves occur only if the source of oscillation (perturbation) and the elastic propagation medium exist. Their continuous propagation takes place at a finite speed, the so-called elastic waves propagation speed, and location in time and space refers to the oscillation source. Elastic wave transmits energy and momentum, and oscillations propagation through an elastic medium in the form of elastic waves, shows the tendency of the system towards a minimum potential energy, i.e. to a new steady state. The paper presents the solution of the problem of the monochromatic elastic waves propagation in plane-parallel mediums. Eigenfunctions of the oscillations for the considered problem do not depend on the wave vector, and the group velocities are smaller than the propagation speeds of the displacement waves in a medium with the same features and it is approaching asymptotically this speed with the increase in wave vector.

Keywords: elastic waves, plane-parallel mediums, wave vector, velocity of propagation.

Introducere

Undele elastice sunt generate în medii elastice de către perturbații mecanice care constau într-o deformare locală a mediului (întindere, comprimare, forfecare, încovoiere etc.), producând variația locală a diferiților parametri caracteristici mediului (de exemplu, poziția unui punct material din mediu, viteza acestuia, presiunea, densitatea etc.), care vor fi funcții atât de poziție, cât și de timp.

Sursa de oscilații poate fi constituită dintr-o varietate de sisteme fizice. Ca surse de oscilații putem considera:

- coardele vocale care generează sunetul vocii umane;
- interacțiunea plăcilor tectonice ale scoarței Pământului (originea undelor seismice);
- atracția Lunii și a Soarelui determină undele care se propagă în oceanul planetar (mareele);
- o coardă elastică pusă în stare de vibrație;
- instrumentele muzicale etc.

Mediul elastic de propagare a undelor elastice reprezintă un mediu continuu format din particule materiale (atomi, ioni, molecule), între care se exercită forțe elastice. De regulă, orice formă de agregare cunoscută: solidă, lichidă, gazoasă sau plasmă poate fi considerată ca mediu elastic. Din exemplificările privind producerea undelor elastice se observă că ele sunt indispensabile și nu pot exista decât simultan. De exemplu, dacă există sursa de oscilații dar nu există mediul elastic, nu apare unda elastică; un clopoțel situat sub un vas de sticlă vidat nu produce sunet, deoarece nu există mediu elastic (aerul). Pe Lună nu pot fi transmise sunetele de la un astronaut la altul, deoarece nu există atmosferă. Însă, poate exista și fenomenul invers: să fie mediu elastic, dar fără sursă de oscilație, ca, de exemplu, suprafața liniștită a unui lac. În concluzie: **unda elastică apare numai dacă există sursa de oscilație (perturbația) și mediul elastic de propagare.**

Sursa de oscilații (perturbații) transmite prin mediul elastic mișcarea sa oscilatorie particulelor materiale din jurul său și în contact direct cu el. Aceste particule transmit, la rândul lor, mișcarea oscilatorie particulelor învecinate și astfel, din aproape în aproape, oscilațiile provenite de la sursă se propagă prin mediul elastic sub formă de unde elastice. De aceea, undele elastice reprezintă un proces fizic după care perturbația (sursa de oscilații) se propagă într-un mediu elastic prin interacțiune continuă și, din aproape în aproape, a particulelor

materiale ale mediului elastic respectiv. Această propagare continuă are loc cu o viteză finită numită *viteză de propagare a undelor elastice*, iar localizarea în timp și spațiu se referă la sursa de oscilații. Ceea ce se propagă prin mediul elastic este mișcarea oscilatorie și nu particulele materiale care efectuează oscilații locale, adică unda elastică transmite energie și impuls. Se cunoaște faptul că starea de echilibru se realizează când valoarea energiei potențiale este minimă. O perturbație a mediului elastic (sursă de oscilații) conduce la o creștere a energiei potențiale și, implicit, la o stare de dezechilibru a sistemului. Propagarea oscilațiilor prin mediul elastic sub formă de unde elastice indică tendința sistemului spre o valoare minimă a energiei potențiale, adică spre o nouă stare de echilibru.

Mediile continue sunt sisteme de particule legate (molecule, atomi, ioni), adică particule care interacționează între ele, astfel încât dacă una din particule oscilează, vor oscila după ea și particulele vecine. O mișcare oscilatorie, imprimată unui punct dintr-un mediu elastic, se comunică progresiv și celorlalte puncte ale mediului. Punctul material ce a fost pus în stare de vibrație devine un izvor (sursă) de oscilații care se propagă în toate direcțiile din spațiu. Propagarea din aproape în aproape a unei perturbații în mediul elastic poartă numele de *undă elastică*.

Mediile care determină anumite particularități ale propagării undelor pot fi clasificate astfel: omogene sau neomogene; izotrope sau anizotrope; liniare sau neliniare; dispersive sau nedispersive; conservative sau disipative.

Un mediu este:

- omogen dacă proprietățile fizice sunt aceleași în orice punct, independent de coordonate;
- anizotrop dacă proprietățile fizice variază în raport cu direcția și izotrop dacă nu există direcții privilegiate pentru aceste proprietăți;
- liniar dacă perturbația globală este provenită prin suprapunerea mai multor unde de același tip, descrise de funcțiile de undă;
- dispersiv dacă viteza de propagare a perturbației depinde de caracteristicile mediului;
- disipativ dacă propagarea se face cu absorbție de energie și conservativ dacă propagarea nu se face cu absorbție de energie.

Un mediu este ideal dacă acesta este omogen, izotrop, liniar, nedispersiv și conservativ. La clasificarea undelor elastice se consideră atât elemente proprii unei elastice, cât și elemente caracteristice mediului de propagare. Se definește *front de undă* locul geometric al punctelor din mediul elastic intrate în mișcare oscilatorie în același moment. Se definește *suprafață de undă* locul geometric al punctelor care sunt la un moment dat în aceeași fază de oscilație. Definițiile arată că există un singur front de undă și o infinitate de suprafețe de undă. Într-un mediu elastic izotrop și omogen viteza de propagare a undelor elastice fiind aceeași în toate direcțiile, frontul și suprafețele de undă devin sfere concentrice cu centrul în sursa de oscilație. Considerând o direcție de propagare în spațiu a undelor elastice care să treacă prin centrul sursei de oscilație, ansamblul fenomenelor oscilatorii după această direcție constituie *rază de undă*. Se definește *rază de undă* dreapta perpendiculară pe suprafața de undă într-un punct dat, orientată de la sursă spre exterior în sensul propagării unde. În medii neomogene și anizotrope forma inițială a suprafeței de undă nu se menține constantă în timp și spațiu, se deformează datorită propagării unde cu viteze diferite și pe direcții diferite prin mediul elastic. În medii omogene și izotrope, unde perturbația se propagă cu aceeași viteză în toate direcțiile, frontul de undă coincide cu suprafața de undă. Forma suprafețelor de undă depinde atât de proprietățile mediului elastic, cât și de geometria sursei de oscilații. Geometria sursei de oscilații clasifică undele elastice în unde plane și unde sferice.

Modurile de propagare se definesc în funcție de două direcții: direcția de oscilație a particulelor materiale și direcția de propagare a undelor elastice. În această considerație, distingem următoarele moduri de propagare:

- modul de propagare longitudinal (unde longitudinale);
- modul de propagare transversal (unde transversale);
- modul de propagare la suprafață (unde de suprafață);
- modul undelor de placă.

Spațiul (mediul elastic) din jurul sursei de oscilații străbătut de unde elastice se numește *câmp de unde*, iar dacă este vorba de *unde sonore*, definim câmpul sonor sau *câmp acustic*. În propagarea lor printr-un mediu elastic, undele elastice se caracterizează prin frecvență, viteză de propagare și lungime de undă.

În funcție de frecvența f , adică de numărul de oscilații pe secundă, undele elastice se clasifică în:

– *unde infrasonore* (infrasunetele) având frecvențe cuprinse între 0 și 20 Hz ($0 < f < 20$ Hz). Aceste unde se află sub limita intervalului audibil, nu sunt percepute de către organul auditiv al omului; sunt sesizabile prin efectele secundare pe care le produc;

– *unde sonore* (sunete) cuprinse între 20 Hz și 20000 Hz ($20 \text{ Hz} < f < 20 \text{ KHz}$), produc senzația nedure-roasă de *sunet*; reprezintă intervalul de audibilitate al omului;

– *undele ultrasonore* (ultrasunetele) având frecvența cuprinsă între 20 KHz și 600 MHz ($20 \text{ KHz} < f < 600 \text{ MHz}$); produc senzația de durere asupra organului auditiv uman;

– *undele hipersonore* (hipersunetele) având frecvența cuprinsă între 600 MHz și 100 GHz ($1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$).

Limita superioară a frecvenței este determinată de performanțele tehnice ale aparaturii de producere a ultrasunetelor (surse).

Viteza de propagare, notată v , reprezintă viteza de propagare a undelor elastice prin material. După caracterul vitezei de propagare a unei elastice se disting:

– *unde nedispersive*, la care viteza unei într-un mediu omogen și izotrop este constantă pentru toate lungimile de undă din grupul respectiv de unde. Undele sonore în aer și, în general, în fluide sunt unde nedispersive;

– *unde dispersive*, la care viteza de propagare depinde de lungimea de undă sau de frecvență. În cazul propagării unui grup de unde, fiecare undă monocromatică din grup va avea viteza sa proprie de propagare, numită *viteză de fază*, așa încât fenomenul de propagare este dispersiv, fenomen manifestat la solide anizotrope.

Lungimea de undă, notată λ , reprezintă distanța măsurată pe rază între două puncte consecutive care prezintă aceeași fază de oscilație. Această distanță variază cu frecvența și cu viteza de propagare a undelor elastice prin material.

1. Modelul teoretic

Păstrând presupunerea caracteristicilor mecanice ale mediilor elastice [1, p.143] este prezentată soluționarea problemei cu privire la răspândirea undelor elastice monocromatice de deplasare în medii plan-paralele.

Pentru a descrie starea tensionat-deformată a stratului elastic, se introduce un sistem de coordonate cartezian dreptunghiular x_1, x_2, x_3 cu axa ox_3 orientată perpendicular spre suprafețele de frontieră ale stratului și suprafața x_1, x_2 , care trece prin mijlocul stratului. În sistemul de coordonate ales suprafețele de frontieră sunt descrise de ecuația $x_3 = \pm d/2$, unde d – grosimea stratului. Axa ox_1 coincide cu direcția răspândirii unei monocromatice elastice. Starea deformată a mediului va fi caracterizată de vectorul deplasării $\vec{U}(x_1, x_2, x_3, t)$ cu componentele $U_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $U_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $U_3(x_1, x_2, x_3, t)$ și tensorul deformației corespunzător $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$, $j = 1, 2, 3$, iar starea tensionată – de tensorul tensiunii

$$\sigma_{ij}, \quad j = 1, 2, 3 \quad [2, 4].$$

Toate caracteristicile mecanice ale mediului elastic în strat sunt considerate constante în suprafețele paralele celor de frontieră și pot să se modifice în direcția longitudinală a stratului. Tensorii deformației și tensiunii în mediul elastic anizotrop sunt legați prin legea generalizată a lui Hooke [6, p.21]:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad j = 1, 2, 3,$$

unde A_{ijkl} – tensorul modulelor elastice pentru $A_{ijkl} = A_{ijkl}(x_3)$.

Pentru comoditatea expunerii ulterioare în cazul modulelor elastice se va introduce o notație de doi indici

$$A_{1111} = c_{11}, \quad A_{2222} = c_{22}, \quad A_{3333} = c_{33}, \quad A_{1122} = c_{12}, \quad A_{1133} = c_{13}, \quad A_{1313} = c_{44}, \quad A_{2323} = c_{55}, \quad A_{1212} = c_{66}$$

Calculul ulterior se efectuează pentru mediile anizotrope caracterizate de corelațiile suplimentare dintre module $c_{44} = c_{55} \neq c_{66}$.

Pentru unda monocromatică vectorul deplasării în sistemul de coordonate adoptat se scrie sub forma:

$$\vec{U}(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{u}(x_3) e^{i(\omega t - kx_1)}, \quad (1)$$

unde $\vec{u}(x_3)$ – valoarea de amplitudine a vectorului deplasării, ω – frecvența unghiulară, k – vectorul de undă. Starea tensionat-deformată a fâșiei elastice se determină în rezultatul soluționării ecuațiilor dinamice ale teoriei elasticității

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

la îndeplinirea condițiilor inițiale și de frontieră.

Particularitatea formării stării tensionat-deformate în stratul elastic atât în problemele statice, cât și dinamice ale teoriei elasticității oferă posibilitatea descompunerii acestei stări în două: pentru una dintre ele deformarea are loc în suprafețele x_1x_2 (deformarea rotativ-deplasată), pentru care nu are loc deformarea curbei fâșiei, iar pentru alta – în suprafața x_1x_3 . În particular, pentru unda monocromatică (1) deformarea rotativ-deplasată se reduce numai la cea de deplasare și se descrie prin componenta de deplasare $U_2(x_1, x_2, x_3, t)$. Deoarece în expunerea ulterioară figurează doar această componentă, pentru simplificare indexul de jos în reprezentarea acestei componente îl vom omite. Ecuațiile dinamice ale elasticității (2) pentru deformările de deplasare enunțate, create de continuitatea unei monocromatice (1), se reduc la ecuații diferențiale de gradul doi față de amplitudinea funcției $u(x_3)$ [4, p.22]:

$$-\rho\omega^2 u(x_3) = (c_{44}(x_3)u'(x_3))' - c_{66}(x_3)k^2 u(x_3). \quad (3)$$

Pentru fâșia cu frontierele libere tensiunile tangente suprafețelor de frontieră ale fâșiei sunt egale cu zero și în felul acesta avem $\sigma_{23}(x_1, x_2, \pm d/2) = c_{44}(\pm d/2)u'(\pm d/2)$, de unde ajungem la condițiile de frontieră pentru funcția de amplitudine

$$u'(\pm d/2) = 0. \quad (4)$$

Ecuația diferențială (3) și condițiile de frontieră (4) determină problema spectrală de frontieră pentru determinarea frecvențelor proprii permise și a frecvențelor amplitudinilor corespunzătoare lor ale oscilațiilor de deplasare ale stratului fără schimbarea formei sale. Menționăm că problema de frontieră (3), (4) este autoconjugată, ceea ce permite analizarea soluțiilor, utilizarea metodelor comune de analiză și a rezultatelor teoriei operatorilor diferențiali autoconjugăți.

Îndeosebi, vom menționa că problema (3), (4) depinde de parametrul k și astfel frecvențele proprii ca și funcții de amplitudine, în caz general, la fel sunt funcții de parametrul k , adică:

$$\omega_i = \omega_i(k), \quad u_i = u_i(x_3; k)$$

(prin indicele de jos se numerotează elementele proprii ale problemei spectrale de frontieră (3), (4)).

La varierea continuă a parametrului k frecvențele proprii ale oscilațiilor reprezintă funcții continue $\omega_i = \omega_i(k)$ (curbe dispersionale). Vom arăta că intersecția graficelor acestor funcții obținute în rezultatul soluționării problemei dispuse este imposibilă. Într-adevăr, dacă pentru careva valori ale parametrului k ar avea loc intersecția graficelor, aceasta ar înseamna că valoarea frecvenței pentru această valoare a parametrului este dublă. Vom scrie ecuația (3) pentru funcția proprie $u(x_3)$ și vom înmulți ambele părți ale ecuației cu funcția $v(x_3)$. Efectuând o procedură analoagă față de funcția $v(x_3)$ cu înmulțirea ulterioară la funcția proprie $u(x_3)$ și scăderea expresiilor obținute, ca rezultat ajungem la expresia $(c_{44}(x_3)u'(x_3))'v(x_3) - (c_{44}(x_3)v'(x_3))'u(x_3) = 0$, care o prezentăm sub forma $c'_{44}(x_3)w(x_3) + c_{44}(x_3)w'(x_3) = 0$, unde este introdusă notarea $w(x_3) = u'(x_3)v(x_3) - u(x_3)v'(x_3)$. Soluția ecuației în raport cu $w(x_3)$ se scrie sub formă explicită $c_{44}(x_3)w(x_3) = c_{44}(x_3)(u'(x_3)v(x_3) - u(x_3)v'(x_3)) = Const$ și, luând în considerație condițiile de frontieră (4) pentru funcțiile proprii, se obține $u'(x_3)v(x_3) - u(x_3)v'(x_3) = 0$. Ca rezultat, se ajunge la dependența $u(x_3) = Cv(x_3)$, care este în contradicție cu condiția independenței liniare a funcțiilor ce aparțin valorii proprii duble. În așa fel, intersecția curbelor dispersionale corespunzătoare oscilațiilor de deplasare ale stratului este imposibilă.

Un șir de afirmații despre caracterul dependențelor dispersionale $\omega_n(k)$ pot fi spuse fără soluționarea nemijlocită a problemei de frontieră (3), (4), dacă se apelează la formularea ei variațională. Se cunoaște că problemei de frontieră autoconjugate oricând i se poate pune în corespondență problema variațională, ca ecuație Euler pentru ea va fi această problemă de frontieră [5, p.173]. Cu scopul obținerii expresiei pentru funcționala corespunzătoare problemei de frontieră discutate, înmulțim ambele părți ale ecuației diferențiale (3) cu $u(x_3)$ și integrăm în intervalul $(-0.5d, 0.5d)$. Ca rezultat, luând în considerație condițiile de frontieră (4), ajungem la expresia Rayleigh pentru frecvență:

$$\omega^2[u] = \frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{44}(x)u'^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u^2(x)dx} + \frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u^2(x)dx} k^2. \quad (5)$$

Prin calcule nemijlocite se verifică dacă ecuația diferențială (3) este ecuația Euler pentru problema variațională

$$\omega^2[u] \rightarrow \text{extremum}_{u(x)}, \quad (6)$$

unde funcționala $\omega^2[u]$ se determină prin expresia (5). În timp ce condițiile de frontieră (4) sunt după terminologia calculului variațional naturale pentru funcționala (5), această condiție poate fi efectiv utilizată la efectuarea calculelor cu utilizarea formulării variaționale a problemei de frontieră, deoarece permite neglijarea îndeplinirii condițiilor de frontieră, fiindcă condițiile de frontieră naturale se îndeplinesc automat la atingerea minimumului de către funcțională. Menționăm că în expresiile de sub integrale (5), spre deosebire de ecuația diferențială (3), coeficienții variaționali nu se diferențiază.

Expresia Rayleigh (5) pentru frecvențele oscilațiilor libere [3, p.228] permite obținerea în formă generală a expresiei pentru vitezele de grup, corespunzătoare dependențelor dispersionale $\omega_n(k)$:

$$v_n(k) = \frac{d\omega_n(k)}{dk} = \frac{1}{\omega_n(k)} \frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_n^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_n^2(x)dx} k. \quad (7)$$

La obținerea expresiei (7) în mod esențial se utilizează faptul că funcțiile proprii $u_n(x)$ satisfac problema de frontieră (3), (4).

Din expresia (7) rezultă că vitezele de grup pentru $k=0$ se transformă în zero pentru toate dependențele dispersionale care au $\omega_n(0) \neq 0$. Revenim la soluționarea problemei de frontieră (3), (4) pentru $k=0$. Nemijlocit, se verifică dacă valorii frecvenței $\omega = 0$ îi corespunde soluția nenulă $u(x) \equiv Const$ care satisface condițiile de frontieră și, în așa fel, $\omega = 0$, $u(x) \equiv Const$ este soluția problemei spectrale (3), (4). Vom nota curba dispersională, care corespunde acestei soluții, prin $\omega_0(k)$. Din expresia Rayleigh rezultă dependența asimptotică pentru $\omega_0(k)$, pentru $k \ll 1$ [2,4]:

$$\omega_n(k) \approx \sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_0^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_0^2(x)dx}} k,$$

iar luând în considerație (7), ajungem la concluzia că viteza de grup corespunzătoare dependenței dispersivele $\omega_0(k)$ este diferită de zero și este egală cu

$$v_n(0) = \sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_0^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_0^2(x)dx}} = \sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)dx}}.$$

Vom analiza comportamentul vitezelor de grup $v_n(k)$ pentru valori mari ale spectrului de undă, pentru $k \gg 1$ din expresia Rayleigh (5). Pentru pătratul frecvenței obținem expresia asimptotică pentru dependențele dispersivele [2, 4]:

$$\omega_n(k) \approx \sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_n^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_n^2(x)dx}} k,$$

iar, luând în considerație expresia (7), ajungem la expresia asimptotică pentru vitezele de grup pentru valorile mari ale spectrului de undă:

$$v_n(k) \approx \sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_n^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_n^2(x)dx}}, \quad k \gg 1. \quad (8)$$

Notăm prin ρ_{\min} , ρ_{\max} și c_{66}^{\min} , c_{66}^{\max} frontierele inferioare și superioare pentru variabilele densității și ale modulului elasticității, astfel încât $\rho_{\min} \leq \rho(x) \leq \rho_{\max}$, $c_{66}^{\min} \leq c_{66}(x) \leq c_{66}^{\max}$.

Vom reieși din inegalitatea

$$c_{66}^{\min} \int_{-0.5d}^{0.5d} u_n^2(x)dx \leq \int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_n^2(x)dx \leq c_{66}^{\max} \int_{-0.5d}^{0.5d} u_n^2(x)dx. \quad (9)$$

Pentru partea stângă a inegalității (9) este justă expresia:

$$c_{66}^{\min} \int_{-0.5d}^{0.5d} u_n^2(x)dx = c_{66}^{\min} \int_{-0.5d}^{0.5d} \frac{\rho(x)u_n^2(x)}{\rho(x)} dx \geq \frac{c_{66}^{\min}}{\rho_{\max}} \int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_n^2(x)dx.$$

În mod analog obținem reprezentarea pentru partea dreaptă:

$$c_{66}^{\max} \int_{-0.5d}^{0.5d} u_n^2(x)dx = c_{66}^{\max} \int_{-0.5d}^{0.5d} \frac{\rho(x)u_n^2(x)}{\rho(x)} dx \leq \frac{c_{66}^{\max}}{\rho_{\min}} \int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_n^2(x)dx.$$

În rezultat, luând în considerație inegalitățile obținute și expresia (7), ajungem la determinarea frontierelor modificării vitezelor de grup pentru undele de deplasare în stratul cu caracteristicile mecanice variabile (pentru $k \gg 1$) [2, 4]:

$$\sqrt{\frac{c_{66}^{\min}}{\rho_{\max}}} \leq v_n(k) \leq \sqrt{\frac{c_{66}^{\max}}{\rho_{\min}}}, \quad k \gg 1, \quad n=0,1,2,3...$$

2. Rezultate numerice și discuții

În continuare vom prezenta calcule concrete pentru stratul cu caracteristicile mecanice constante ρ , c_{44} , c_{66} , când problema de frontieră (3), (4) se scrie sub forma:

$$-\rho\omega^2 u(x_3) = c_{44}u''(x_3) - c_{66}k^2 u(x_3), \quad u'(\pm d/2) = 0 \quad (10)$$

Acum soluția problemei (3) se obține ușor în formă analitică în corespundere cu metodica standardă de soluționare a ecuației diferențiale cu coeficienți constanți și se caută soluția fundamentală a ecuației diferențiale în (10) sub forma $u(x_3) = \exp(\gamma x_3)$, a cărei substituție în (10) conduce la $-\rho\omega^2 = c_{44}\gamma^2 - c_{66}k^2$ și valorile

$$\gamma_{1,2} = \pm\kappa, \quad \kappa = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}k^2 - \frac{\rho}{c_{44}}\omega^2}. \quad (11)$$

Prezentând soluția generală a ecuației diferențiale (10) sub forma $u(x_3) = C_1 \sinh(\kappa x_3) + C_2 \cosh(\kappa x_3)$ din condiția de îndeplinire a condițiilor de frontieră, ajungem la un sistem de ecuații omogene pentru determinarea constantelor necunoscute C_1, C_2 :

$$\kappa \left(C_1 \cosh \frac{\kappa d}{2} + C_2 \sinh \frac{\kappa d}{2} \right) = 0, \quad \kappa \left(C_1 \cosh \frac{\kappa d}{2} - C_2 \sinh \frac{\kappa d}{2} \right) = 0. \quad (12)$$

Menționăm că $\kappa = 0$ este soluția sistemului (12). Acestei valori a lui κ îi corespunde propria formă $u(x_3) \equiv Const$ și dependența dispersională care reiese din (11) $\omega(k) = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}}k$, unde $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}}$. Condiția de soluționare a sistemului omogen (12) fiind trecerea determinantului ei în zero duce la egalitatea pentru determinarea valorilor admisibile ale lui $\kappa \cosh \frac{\kappa d}{2} \sinh \frac{\kappa d}{2} = 0$ sau la forma echivalentă:

$$\cosh \frac{\kappa d}{2} = 0, \quad \sinh \frac{\kappa d}{2} = 0. \quad (13)$$

Soluții ale primei dintre ecuațiile (13) servesc valorile $\frac{\kappa d}{2} = i(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (i – unitate imaginară), cărora le corespund dependențele dispersionale și formele proprii (funcții impare), Fig.1:

$$\omega_n^a(k) = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \frac{c_{66}}{\rho}k^2}; \quad u_n^a(x_3) = C_n^a \sin \frac{(2n+1)\pi x_3}{d}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad [4,5]$$

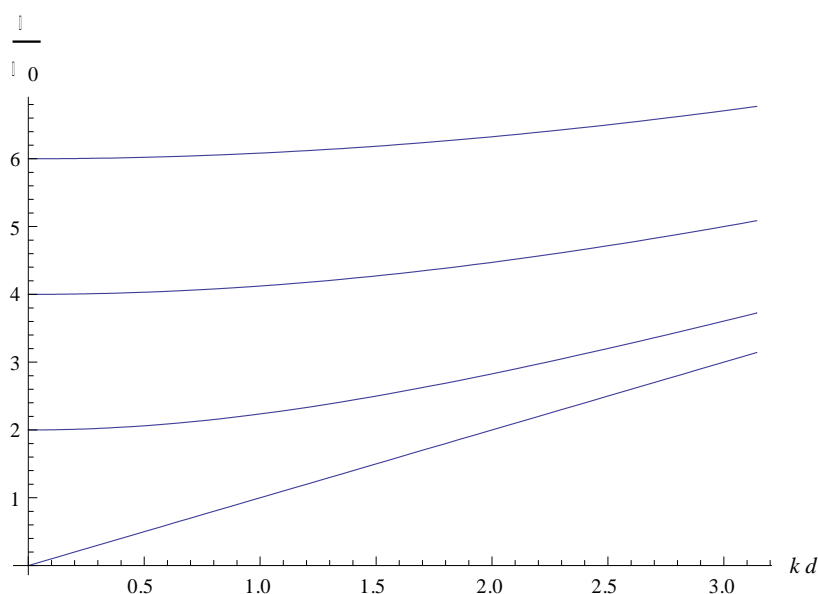


Fig.1 .Dependența frecvenței relative de valorile kd (funcții pare), $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m.

Soluții ale ecuației a doua în (13) sunt valorile $\frac{\kappa d}{2} = in\pi$, $n = 0,1,2,3\dots$ (i – unitate imaginară). Acestor valori le corespund dependențele dispersionale și formele proprii (funcții pare), Fig.2:

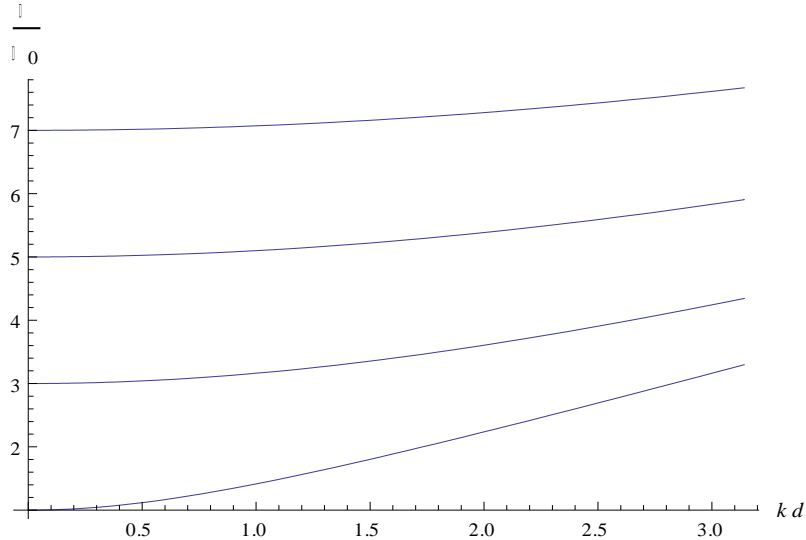


Fig.2. Dependența frecvenței relative de valorile kd (funcții impare), $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m.

$$\omega_n^s(k) = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho} (2n)^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \frac{c_{66}}{\rho} k^2}; u_n^s(x_3) = C_n^s \cos \frac{2n\pi x_3}{d}; n = 0,1,2,3\dots$$

De menționat că toate funcțiile proprii ale oscilațiilor pentru problema cercetată nu depind de vectorul de undă.

La fel, menționăm pentru vitezele de grup inegalitatea

$$v_n^s(k) = \frac{d\omega_n^s(k)}{dk} = \frac{\frac{c_{66} k}{\rho}}{\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho} (2n)^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \frac{c_{66}}{\rho} k^2}} \leq \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \quad (\text{Fig.3})$$

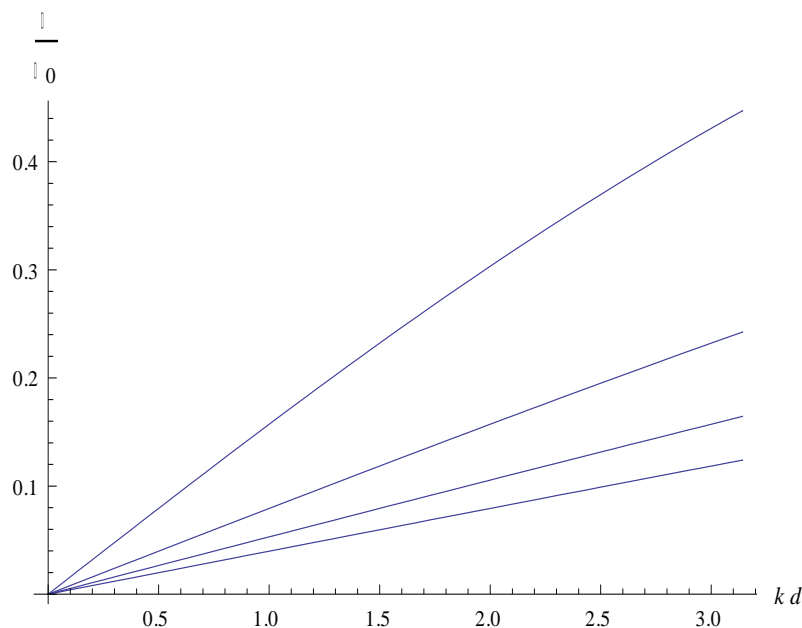


Fig.3. Dependența vitezei relative de valorile kd (funcții pare), $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m.

$$v_n^a(k) = \frac{d\omega_n^a(k)}{dk} = \frac{\frac{c_{66} k}{\rho}}{\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho} (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \frac{c_{66} k^2}{\rho}}} \leq \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \quad (\text{Fig.4})$$

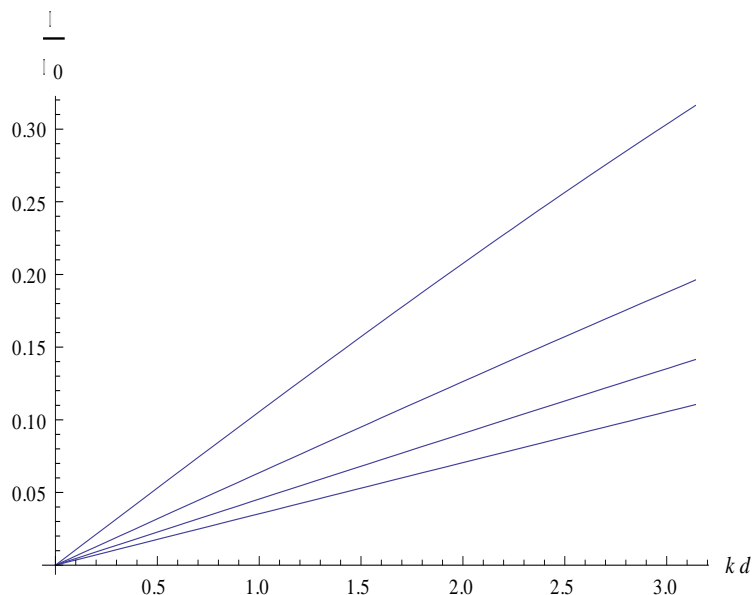


Fig.4. Dependența vitezei relative de valorile kd (funcții impare), $d=5 \cdot 10^{-9}$ m.

În așa fel, vitezele de grup pentru toate modelele sunt mai mici decât vitezele de răspândire a undelor de deplasare în mediul cu aceleași caracteristici și asimptotic se apropie de această viteză cu creșterea vectorului de undă.

Concluzii

În lucrare este prezentată soluționarea problemei cu privire la răspândirea undelor elastice monocromatice în medii plan-paralele. Caracteristicile mecanice ale mediului elastic în strat sunt considerate constante în suprafețele paralele celor de frontieră, iar tensorii deformării și tensiunii în mediul elastic anizotrop sunt legați prin legea generalizată a lui Hooke. Starea tensionat-deformată a fâșiei elastice se determină în rezultatul soluționării ecuațiilor dinamice ale teoriei elasticității, ținându-se cont de condițiile inițiale și de frontieră. Se obține expresia Rayleigh pentru frecvență, iar prin calcule nemijlocite se verifică dacă ecuația diferențială de gradul doi față de amplitudinea vectorului deplasării este ecuația Euler pentru problema variațională. Expresia Rayleigh pentru frecvențele oscilațiilor libere permite obținerea în formă generală a expresiei pentru vitezele de grup, corespunzătoare dependențelor dispersionale, fiind prezentată și expresia asimptotică pentru vitezele de grup în cazul valorilor mari ale spectrului de undă. În final, au fost efectuate calcule concrete pentru stratul cu caracteristici mecanice constante și sunt reprezentate grafic dependențele frecvenței relative de valorile kd , funcții pare și impare, pentru $d=5 \cdot 10^{-9}$ m.

Referințe:

- BALANDIN, A., POKATILOV, E., NIKA, D. Phonon engineering in Hetero- and Nanostructures. In: *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2007, vol. 2, p.140-170.
- CURLICOVSCHI, A., GAMURARI, V., BARSUC, A. Particularitățile spectrului fononic în heterostructuri plane. În: *Materialele Conferinței științifice a masteranzilor și doctoranzilor „Cercetare și inovare – perspective de evoluție și integrare europeană”*, 23 septembrie 2009. Chișinău: 2009, p.93-94, ISBN 978-9975-70-863-0
- RAYLEIGH, J.W. On the Free Vibration in an Infinite Plate of Homogenous Isotropic Elastic. In: *Matter. Proc. Math. Soc.* (London), 1889, no.20, p.225-234.

4. БАРСУК, А., ГАМУРАРЬ, В., КУРЛИКОВСКИ, А. Анализ распространения сдвиговых волн в упругом слое для непрерывной и дискретной моделей слоя. În: *Materialele Simpozionului științific internațional „Materiale noi multifuncționale și studierea proprietăților fizice și chimice”*. Chișinău, 2011, p.20-27, ISBN 978-9975-76-054-9
5. КУРАНТ, Р., ГИЛЬБЕРТ, Д. *Методы математической физики*. Москва: Директ-Медиа, 2001, том.1, с.173.
6. ЛАНДАУ, Л.Д., ЛИФШИЦ, Е.М. *Теория упругости*. Москва: Наука, 1987, с.246.

Prezentat la 31.05.2013