STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.2(82)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.61-64

SISTEMUL DE AŞTEPTARE $[SM^a|M|\infty]$ CU FLUX SEMI-MARKOV. CRITERIUL DE MEDIERE

Iulia DAMIAN

Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălți

În articol sunt analizate rețelele semimarkoviene de servire şi este studiată convergența slabă în procesele de aşteptare în schema de mediere. De asemenea, este studiat criteriul de mediere a sistemului de aşteptare semi-Markov $[SM^a|M|\infty]$ prin evoluția aleatoare şi folosind operatorul de compensație a procesului extins Markov de reînnoire.

Cuvinte-cheie: *sistem de aşteptare, flux semi-Markov, criteriu de mediere, operator de compensație, timp aleator, matrice de probabilitate, rețea de aşteptare, evoluție stohastică.*

QUEUING SYSTEM WITH SEMI-MARKOV FLOW $[SM^a|M|\infty]$. AVERAGE SCHEME

In this article study the queuing system where the input flow is described by a semi-Markov process, the service time is exponentially distributed. This article is about of the weak convergence in average scheme. It is study average scheme for semi-Markov queuing systems $[SM^a|M|\infty]$ by a random evolution approach and using compensating operator of the corresponding extended Markov process.

Keywords: *queuing systems, semi-Markov flow, average scheme, compensating operator, random time, matrix of probability, queuing network, stochastic evolution.*

Introducere

Aplicații considerabile ale teoriei aşteptării au avut loc în soluționarea problemelor ce au apărut în proiectarea şi optimizarea sistemelor de prelucrare şi transport a informației, în particular în rețelele de telecomunicații. Diverse aspecte ale acestor probleme, cum ar fi probleme de optimizare, cercetarea sistemelor cu priorități, cu surse finite etc., au fost abordate de A.M. Andronov, E.A. Danielean, P.P. Bociarov, A.N. Dudin, V.A. Ivnițki, V.V. Kalaşnicov, A.V. Pecinkin, A.N. Kabalevscki, G.K. Mişcoi, V.V. Rykov, I.I. Falin, V.V. Vishnevski ş.a. Cele mai elegante rezultate au fost obținute aici pentru sisteme cu fluxuri staționare de tip Poisson. Situația însă radical s-a schimbat odată cu dezvoltarea vertiginoasă a rețelelor. Apariția noilor web servicii, transportul integral al datelor, glasului, videoinformației, precum şi apariția noilor tehnologii de rețea înzestrate cu metodologiile QoS(quality of service) şi CoS(class of service) de dirijare a calității serviciilor au înaintat noi cerințe în cercetarea şi elaborarea modelelor matematice. Modelele propuse pentru descrierea adecvată a noilor fenomene devin mult mai complicate, iar cercetarea lor implică noi abordări. Aceeaşi situație complicată este şi în domeniul modelelor rețelelor stocastice. Dezvoltarea semnificativă a rețelelor de aşteptare este descrisă în lucrările elaborate de V.S. Korolyuk, A.V. Svischuka, V.V. Korolyuk, A.F. Turbin, A.V. Skorokhod, I.I. Ghihman şi alții. Însă, aici apar un şir de probleme noi, deoarece în rețelele stocastice fluxul de ieşire a mesajelor de la un nod formează fluxul de intrare la un alt nod (sau alte noduri), care nu este de tip Poisson. Totodată, şi servirea mesajelor în nodurile acestor rețele nu mai este dirijată de repartiția exponențială. Astfel de rețele se numesc rețele de tip semi-Markov sau semimarkoviene. De aceea, analiza matematică a rețelelor semimarkoviene este complicată şi necesită aplicarea unor compartimente moderne ale matematicii.

Cele mai eficiente metode matematice de simplificare a sistemelor de aşteptare sunt: metoda de mediere şi metoda aproximației difuzionale. Metoda de mediere permite obținerea modelului simplificat determinat al sistemului de aşteptare. Rezolvarea problemei de optimizare pentru modelul de mediere simplificat este cu mult mai uşoară decât optimizarea modelul inițial. În prezentul articol este studiată schema asimptotică de mediere pentru sistemele de aşteptare semi-Markov date de o evoluție aleatoare şi folosind operatorul de compensație a procesului Markov extins corespunzător. Aproximația stocastică în sistemele de aşteptare este deja cunoscută şi stabilită [1-5,9]. Principalul motiv este că astfel de sisteme sunt foarte dificile şi, deseori, este imposibil de a opera cu ele folosind metodele proceselor Markov şi semi-Markov.

Criteriul de mediere pentru sistemul de aşteptare $[SM^{\varepsilon}|M|\infty]$

În sistemul de aşteptare de tipul $[SM^{\varepsilon}|M|\infty]$ fluxul de intrare este de tip semi-Matkov pe un spaţiu fazic standard (E,ε) şi timpul de servire este distribuit exponenţial conectat la un server.

Vom folosi procesul semi-Markov regulat $\kappa^{\varepsilon}(t),\quad t\geq 0$, pe un spaţiu fazic standard (E, ε) în schema de mediere cu un mic parametru $\varepsilon\to 0,\quad \varepsilon>0$.

Evoluţia cererilor în reţele pe mulţimea $\hat{E}=\{1,2,...N\}$ este definită de matricea de probabilitate $P_0=\left[p^0_{kr};\quad k,r\in \hat{E}\right],\quad \hat{E}:=\{1,2,...N\}$ şi de vectorul de intensitate a timpului de servire descris exponenţial $\mu=(\mu_k,\quad k\in\hat{E})$.

Reţelele de aşteptare sunt deschise, ceea ce înseamnă că matricea de probabilitate satisface condiţia:

$$p^0_{k0}=1-\sum_{r=1}^{N}p^0_{kr},\quad \max_{k\in E}p^0_{k0}>0$$

Procesul de aşteptare în schema de mediere este considerat în următoarea formă normalizată:

$$U^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^2\rho^{\varepsilon}\left(t/\varepsilon^2\right),\quad t\geq 0,\quad \varepsilon>0\ ,$$

unde $\rho^{\varepsilon}(t)=\left(\rho^{\varepsilon}_k(t),\quad k\in\hat{E}\right)$ este vectorul cu componentele $\rho^{\varepsilon}_k(t)$ – numărul de cereri în nodurile $k\in\hat{E}$ în momentul de timp t. Sistemul de aşteptare este considerat într-un regim de trafic: $\rho^{\varepsilon}_k(0)=u_k/\varepsilon^2,\quad k\in\hat{E}$.

Următoarele afirmaţii se presupun a fi juste [6]:

A1: Reţelele de aşteptare sunt deschise, ceea ce înseamnă că matricea de probabilitate satisface condiţia:

$$\max_{k\in E}p^0_{k0}>0$$

A2: Există soluţie nenegativă a ecuaţiei de evoluţie

$$dU^0(t)/dt=C\left(U^0(t)\right),\quad U^0(o)=u_0\ ,$$

unde vectorul-viteză $C(u)=\left(C_k(u),\quad k\in\hat{E}\right)$, este definit de componentele

$$C_k(u)=\gamma_k(u)+\lambda_k\ ,\quad \lambda_k=\hat{\pi}_k q_k\ ,$$

$$\gamma_k(u)=\sum_{r=1}^{N}\mu_r u_r\left[p_{rk}-\delta_{rk}\right].$$

Teorema (Criteriul de mediere):

Conform afirmaţiilor A1-A2, convergenţa slabă

$$U^{\varepsilon}(t)\Rightarrow U^0(t),\quad \varepsilon\to 0\ , \tag{1}$$

are loc.

Propoziţia: Fie că există un punct de echilibru $u^0\geq 0$, satisfăcând condiţia

$$C\left(u^0\right)=0\ .$$

Atunci, conform condiţiei iniţiale

$$U^{\varepsilon}(0)\Rightarrow u_0,\quad \varepsilon\to 0\ ,$$

convergenţa slabă

$$U^{\varepsilon}(t)\Rightarrow u_0,\quad \varepsilon\to 0\ ,$$

are loc.

Demonstrarea Teoremei: Procesul Markov regenerat

$$u^{\varepsilon}_n=u^{\varepsilon}\left(\tau^{\varepsilon}_n\right),\quad \kappa^{\varepsilon}_n=\kappa^{\varepsilon}\left(\tau^{\varepsilon}_n\right),\quad \tau^{\varepsilon}_n=\varepsilon^2\tau_n\ ,\quad n\geq 0\ ,$$

este caracterizat de *Operatorul de Compensaţie* [1]

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x)=\varepsilon^{-2}q(x)E\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}_{n+1},\kappa^{\varepsilon}_{n+1}\right)-\varphi(u,x)\,|\,u^{\varepsilon}_n=u\ ,\quad \kappa^{\varepsilon}_n=x\right] \tag{2}$$

Pasul principal în analiza asimptotică a sistemelor de aşteptare este de a construi o extindere asimptotică a operatorului de compensație (2) cu un parametru de serie $\varepsilon \to 0, \quad (\varepsilon > 0)$.

Lema: Operatorul de compensație (2) poate fi reprezentat în următoarea formă

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}q(x)\left[G^{\varepsilon}(x)P^{\varepsilon}D^{\varepsilon}(x) - I\right], \tag{3}$$

unde

$$G^{\varepsilon}(x) = \int_{0}^{\infty} G_x(dt)\Gamma_t^{\varepsilon} . \tag{4}$$

Semigrupul Γ_t^{ε} este definit de generatorul

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \sum_{k,r=1}^{N} \gamma_{kr}(u)\left[\varphi\left(u + \varepsilon^2 e_{kr}\right) - \varphi(u)\right], \tag{5}$$

aici vectorul de salt $e_{kr} := e_r - e_k$, $e_k := \left(\delta_k(l), \quad l \in \hat{E}\right), \quad k \in \hat{E}, \quad \delta_k(l) = \begin{cases} 1, & l = k, \\ 0, & l \neq k. \end{cases}$

şi intensitatea saltului:

$$\gamma_{kr}(u) := u_k \mu_k p_{kr}^{\mathbf{0}}, \quad k = \overline{1,N}, \quad r = \overline{0,N}, \quad k \neq r .$$

Operatorii $D^{\varepsilon}(k), \quad k \in \hat{E}$, sunt definiți de

$$D^{\varepsilon}(k)\varphi(u) = \varphi\left(u + \varepsilon^2 e_k\right), \quad k \in \hat{E} \cdot$$

Operatorul

$$P^{\varepsilon} = P + \varepsilon P_1 ,$$

unde $P\varphi(x) = \int_E P\left(x, dy\right)\varphi(y), \quad P_1\varphi(x) = \int_E P_1(x, dy)\varphi(y)$.

Lema. Operatorul de compensație (2) admite următoarea extindere asimptotică pe o funcție $\varphi(u,x) \in C^3\left(R^d\right)$ uniformă după $x \in E$:

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1 + Q_2(x) + \theta_L^{\varepsilon}(x)]\varphi(u,x) , \tag{6}$$

unde

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_{\mathrm{E}} P(x, dy)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right] \tag{7}$$

$$Q_1\varphi(x) = q(x)\int_{\mathrm{E}} P_1(x, dy)\,\varphi(y) \tag{8}$$

$$\lambda(x) = \left(\lambda_k(x), \quad k \in \hat{E}\right), \quad \lambda_k(x) = q(x)\,\delta_k(x) \tag{9}$$

$$Q_2(x)\varphi(u) = \left[\gamma(u) + \lambda(x)\right]\varphi'(u) \tag{10}$$

$$\gamma(u) = \mu^*(u)[P_0 - I], \quad \gamma(u) = (\gamma_k(u), k \in \hat{E}), \qquad \gamma_k(u) = \sum_{r=0}^{N} \mu_k u_k [p_{kr}^0 - \delta_{kr}] \tag{11}$$

şi termenul neglijabil

$$\left|\theta_L^{\varepsilon}(x)\varphi(u)\right| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \qquad \varphi(u) \in C^3\left(R^N\right).$$

Bibliografie:

1. ANISIMOV, V., LEBEDEV, V. *Stochastic Queuing Networks. Markov Models*. Lybid, 1992.
2. ANISIMOV,V. *Switching processes in Queuing Models*. ISTE, J. Wiley, London, 2008.
3. KOROLYUK, V., MISHKOY, G., MAMONOVA, A., GRIZA, IU. Queuing system evolution in phase merging scheme. In: *Bulletin Academy of Science of Moldova. Mathem*, 2008, no.3, p.83-88.
4. KOROLYUK, V.S, KOROLYUK, V.V. *Stochastic Models of Systems*. Kluwer Dordrecht, 1999.

5. LEBEDEV, E. On limit theorem for stochastic networks and its application. In: *Theory of Probability and Math. Stat*., 2002, no.68, p.94-98.
6. MAMONOVA, A. Exploited queuing system type $\left[SM \mid M \mid \mathbf{1} \mid \infty\right]^N$ in average scheme. In: *Proceeding of the Applied Mathematics and Mechanics Institute*, 2005, vol.10, p.135-144.
7. MAMONOVA, A. Operational queuing system in the scheme of diffusion approximation with evolution averaging. In: *Ukrainian Mathematical Journal*, 2006, no.5, p.708-714.
8. MAMONOVA, A. Superposition Markov renewal processes in phase merging. In: *Cybernetics and System Analysis,* 2005, vol.41, p.119-135.
9. SILVESTROV, D. *Limit Theorems for Randomly Stopped Stochastic Processes*. Springer, N.Y, 2004.

Prezentat la 22.03.2015