CARACTERISTICILE PROBABILISTICE ALE TIMPULUI DE EVOLUȚIE AL SISTEMELOR ALEATOARE DISCRETE

Alexandru LAZARI

Catedra Matematica Aplicată

In this article it is being studied a class of random discrete systems, developing polynomial algorithms for determining the basic characteristics of time evolution of their own. It is a generalized problem for the case when the transfer time of the system in the next state is also a random variable with known distribution law. The developed algorithms are based on probabilistic method of determining the characteristics of random variables, knowing the generating function or characteristic function of them. Algorithms are being presented for numerical derivation of functions composed and rational fractions that appear later in main algorithms. It makes a brief foray into the theory of homogeneous linear recurring series to argue theoretically developed algorithms.

1. Formularea problemei

Se consideră un sistem aleator discret L_Θ cu mulțimea de stări posibile $E=\{e_1,e_2,\dots,e_\omega\}$, $|E|=\omega\le\infty$. Starea sistemului la fiecare etapă $n=0,1,2,\dots$ este $E_n\in E$. Trecerea sistemului din starea u în starea v la momentul de timp t este însoțită de timpul de transfer $\theta_{(u,v)}(t)$, care este o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție

$$F_{\theta_{(u,v)}(t)}(x)=P(\theta_{(u,v)}(t)<x),\forall u,v\in E,\forall x\in\mathbf{R},\forall t\ge 0.$$

Pe mulțimea E este definită o funcție de probabilitate $p^*:E\to[0,1]$, unde $p^*(e)$ reprezintă probabilitatea cu care sistemul L_Θ își începe evoluția din starea e, adică $p^*(e)=P(E_0=e),\forall e\in E$. Vectorul $P^*=((p^*(e_j))_{j=\overline{1,\omega}})^T$ se numește repartiție inițială a sistemului L_Θ. Trecerea sistemului din starea $u\in E$ în starea $v\in E$ la momentul de timp t este efectuată cu probabilitatea $p_{(u,v)}(t)$.

Finisarea evoluției sistemului este condiționată de trecerea consecutivă a sistemului printr-o secvență fixată de stări $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in E^m$. Fie că stoparea sistemului aleator discret L_Θ s-a realizat la momentul de timp T_Θ. Valoarea T_Θ se numește timp de evoluție al sistemului aleator discret L_Θ și, după cum se observă, este o variabilă aleatoare. Se consideră problema determinării caracteristicilor de bază ale timpului de evoluție T_Θ.

În continuare, se vor generaliza și se vor completa rezultatele obținute în [1] pentru sistemele aleatoare discrete cu timp de transfer aleator. Se vor elabora algoritmi polinomiali de determinare a caracteristicilor probabilistice ale timpului de transfer.

2. Caracteristici probabilistice ale variabilelor aleatoare

Considerăm o variabilă aleatoare oarecare ξ. Variabila ξ este complet descrisă de funcția sa de repartiție $F_\xi(x)=P(\xi<x),\ x\in\mathbf{R}$. Mărimea $\nu_n(\xi)=M(\xi^n)$ se numește moment de ordin n al variabilei aleatoare ξ. Valoarea medie $M(\xi)$, dispersia $D(\xi)$ și abaterea medie pătratică $\sigma(\xi)$ pot fi exprimate utilizând momentele de ordin 1 și 2:

$$M(\xi)=\nu_1(\xi),\ D(\xi)=\nu_2(\xi)-\nu_1^2(\xi),\ \sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}. \tag{1}$$

Funcția $\Phi_\xi(t)=M(e^{it\xi})$ se numește funcție caracteristică a variabilei aleatoare oarecare ξ. Menționăm două proprietăți esențiale:

1) Dacă variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sunt independente, atunci $\Phi_{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \Phi_{\xi_j}(t)$;

2) Dacă $\exists M(|\xi|^n) < \infty$, atunci $\Phi_\xi^{(k)}(0) = i^k M(\xi^k), k = \overline{0, \infty}$.

În caz discret, variabila aleatoare ξ este complet descrisă de repartiția $((x_j, p_{x_j}))_{j=1}^{\omega}$, unde $\{x_1, x_2, \dots, x_\omega\}$ ($\omega \le \infty$) este mulțimea valorilor posibile, iar $p_{x_j} = P(\xi = x_j)$, $j = \overline{1, \omega}$, reprezintă probabilitatea cu care ξ ia valoarea respectivă x_j. Dacă $x_j \in N$, $j = \overline{1, \omega}$, atunci variabila aleatoare ξ poate fi privită ca o variabilă aleatoare naturală cu repartiția $((n, p_n))_{n=0}^{\infty}$, unde $p_n = 0, \forall n \in N \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_\omega\}$.

Funcția $G^{[p]}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ se numește funcție generatoare a șirului numeric $p = (p_n)_{n=\overline{0,\infty}}$. Dacă p reprezintă șirul probabilităților variabilei aleatoare naturale ξ, atunci se notează $rep(\xi) = p$ și funcția $G_\xi(z) = G^{[p]}(z)$ se numește funcție generatoare a variabilei aleatoare ξ. În continuare vom utiliza următoarele proprietăți ale funcției generatoare:

1) $G_\xi(1) = 1$, $G_\xi^{(k)}(1) = M([\xi]_k), \forall k \ge 1$, unde $[\xi]_k = \prod_{j=0}^{k-1} (\xi - j)$;

2) Dacă variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sunt independente, atunci $G_{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}(z) = \prod_{j=1}^{n} G_{\xi_j}(z)$.

O descriere mai detaliată a funcțiilor generatoare și caracteristice poate fi găsită în [2-4].

Sunt cunoscute relațiile $[\xi]_k = \sum_{j=1}^{k} s(k, j) \xi^j$, $\xi^k = \sum_{j=1}^{k} S(k, j) [\xi]_j$, $\forall k \ge 1$, unde $s(k, j)$ sunt numerele Stirling de speța întâi, iar $S(k, j)$ sunt numerele Stirling de speța a doua și se calculează conform relațiilor recurente

$$\begin{aligned} s(n,0) = 0,\ s(n,n) = 1,\ s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k),\ k = \overline{1, n-1}; \\ S(n,1) = S(n,n) = 1,\ S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k), k = \overline{2, n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Utilizând proprietățile de mai sus, obținem formulele:

$$\nu_k(\xi) = G_\xi^{(k)}(1) - \sum_{j=1}^{k-1} s(k, j) \nu_j(\xi) = \sum_{j=1}^{k} S(k, j) G_\xi^{(j)}(1),\ \forall k \ge 1, \tag{3}$$

$$M(\xi) = G'_\xi(1),\ D(\xi) = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2,\ \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{4}$$

Fie $T(\xi) = \sum_{k=0}^{m} a_k \xi^k \in C[\xi]$. Cunoscând momentele $\nu_k(\xi)$, $k = \overline{1, m}$, putem determina $M(T(\xi))$ utilizând formula $M(T(\xi)) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \nu_k(\xi)$.

3. Metode numerice de derivare a unor funcții de formă specială

În Secțiunea 2 s-a prezentat modul de reducere a calculului momentelor unei variabile aleatoare la determinarea valorii derivatei de ordin respectiv a unei funcții (funcția generatoare sau funcția caracteristică) în careva punct real fixat. În această secțiune se vor analiza două clase de funcții ce vor apărea ulterior la analiza sistemelor aleatoare discrete.

3.1. Derivarea numerică a fracțiilor raționale

Fie $\forall A_0(z), H_0(z) \in C[z]$. Considerăm fracția rațională $G(z) = \dfrac{A_0(z)}{H_0(z)}$. Prin inducție matematică se demonstrează formula $G^{(k)}(z) = \dfrac{A_k(z)}{H_k(z)}$, $\forall k \in N$, unde polinoamele $A_k(z)$ și $H_k(z)$ se determină utilizând formulele recurente

$$A_{j+1}(z) = A_j'(z)H_0(z) - (j+1)A_j(z)H_0'(z),\ H_{j+1}(z) = H_0(z)H_j(z);\ j = 0,1,2,\ldots. \qquad (5)$$

Fie $\forall x = (x_k)_{k=0}^{s} \in C^{s+1}, \forall y = (y_j)_{j=0}^{t} \in C^{t+1}, X(z) = \sum_{k=0}^{s} x_k z^k \in C[z], Y(z) = \sum_{j=0}^{t} y_j z^j \in C[z]$.

Introducem următoarele operații şi notații adiționale:

1) $X(z) \,|\, z = x,\ x \,|\, \alpha = X(\alpha),\ \forall \alpha \in C$;
2) $\Delta_0(x) = \sum_{k=0}^{s} x_k$, $\Delta_j(x) = \sum_{k=1}^{s} k^j x_k$, $\forall j \in N^*$;
3) $[x] = (x_1, 2x_2, \ldots, sx_s)$;
4) $x^{[t]} = (x, 0, 0, \ldots, 0) \in C^{t+1}$, $x_{[t]} = (0, 0, \ldots, 0, x) \in C^{t+1}, \forall t \in N$. Dacă $t < s$, atunci în $x^{[t]}$ se elimină ultimele componente ale vectorului x, iar în $x_{[t]}$ se elimină primele componente;
5) $x\langle + \rangle y = x^{[r]} + y^{[r]}$, $x\langle - \rangle y = x^{[r]} - y^{[r]}$, unde $r = \max\{s, t\}$;
6) $x\langle \cdot \rangle y = (z_i)_{i=0}^{s+t}$, unde $z_i = \sum_{k+j=i,\ 0\le k\le s,\ 0\le j\le t} x_k y_j$, $i = \overline{0, s+t}$.

Se observă următoarele proprietăți:

1) $\Delta_0(x) = x \,|\, 1$;
2) $X'(z) \,|\, z = [X(z) \,|\, z]$, $(\alpha X(z)) \,|\, z = \alpha(X(z) \,|\, z)$, $\forall \alpha \in C$;
3) $(X(z) \,|\, z)\langle \times \rangle (Y(z) \,|\, z) = (X(z) \times Y(z)) \,|\, z$, $\forall \times \in \{+, -, \cdot\}$.

Vom nota $\alpha_j = A_j(z) \,|\, z$, $\chi_j = H_j(z) \,|\, z$, $j = 0,1,2,\ldots$.

Formulele recurente (5) se transformă astfel:

$$\alpha_{j+1} = ([\alpha_j]\langle \cdot \rangle \chi_0)\langle - \rangle (j+1)(\alpha_j \langle \cdot \rangle [\chi_0]),\ \chi_{j+1} = \chi_0 \langle \cdot \rangle \chi_j, \qquad (6)$$

iar formula pentru derivata de ordin k a funcției $G(z)$ devine

$$G^{(k)}(z) = \frac{\alpha_k \,|\, z}{\chi_k \,|\, z}. \qquad (7)$$

Astfel, am argumentat

Algoritmul 1

Date de intrare: $z_0 \in C$, *coeficienții numărătorului* α_0 *și ai numitorului* χ_0;

Date de ieşire: $G^{(k)}(z_0),\ k = \overline{1, n}$;

1) Se determină α_k *și* χ_k, $k = \overline{1, n}$, *conform formulei* (6);

2) Se determină $G^{(k)}(z_0),\ k = \overline{1, n}$, *conform formulei* (7).

Se remarcă faptul că, pentru a exista derivatele $G^{(k)}(z_0)$, $k=1,2,\ldots$, este necesar şi suficient să se verifice condiţia $\chi_0 \mid z_0 \neq 0$.

3.2. Derivarea numerică a funcției compuse

Considerăm funcţia compusă $h(x)=f(g(x))$. Definim funcţia auxiliară

$$B_\alpha(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n)}(x))=\alpha_0\prod_{j=1}^{n}(g^{(j)}(x))^{\alpha_j},\forall\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in N^{n+1}.$$

Utilizând inducţia matematică, se demonstrează că $h^{(n)}(x)$ poate fi reprezentată sub forma

$$h^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n}R_{\Lambda_{n,k}}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n+1-k)}(x))f^{(k)}(g(x)),\tag{8}$$

unde

$$R_{\Lambda_{n,k}}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n+1-k)}(x))=\sum_{\alpha\in\Lambda_{nk}}B_\alpha(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n+1-k)}(x)),\tag{9}$$

iar mulţimile Λ_{nk} vor fi deteminate ulterior.
Derivând formula (8), se obţine:

$$h^{(n+1)}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}f^{(k)}(g(x))\left(\sum_{j=1}^{n+1-k}U_{nkj}(x)+V_{n,k-1}(x)\right),\tag{10}$$

unde

$$\begin{gathered}U_{nkj}(x)=g^{(j+1)}(x)\frac{\partial R_{\Lambda_{nk}}}{\partial g^{(j)}(x)}=\sum_{\alpha\in\Lambda_{nk}}\alpha_0\alpha_j(g^{(j)}(x))^{\alpha_j-1}(g^{(j+1)}(x))^{\alpha_{j+1}+1}\times\\ \times\prod_{\overline{r=1,n+1-k},\,r\notin\{j,j+1\}}(g^{(r)}(x))^{\alpha_r}=R_{\Lambda^{(j)}_{n+1,k}}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n+2-k)}(x)),\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}V_{nk}(x)=g'(x)R_{\Lambda_{nk}}=R_{\Lambda^{*}_{n+1,k}}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n+1-k)}(x)),k=\overline{1,n},\\ V_{n,0}(x)=0,\end{gathered}\tag{12}$$

iar mulţimile $\Lambda^{(j)}_{n+1,k}$ şi $\Lambda^{*}_{n+1,k}$, $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n+1-k}$, se descriu astfel:

$$\begin{gathered}\Lambda^{(j)}_{n+1,k}=\{\beta=(\beta_r)_{r=0}^{n+2-k}\in N^{n+3-k}\mid\alpha\in\Lambda_{nk},\alpha_j\neq0,\alpha_{n+2-k}=0;\\ \beta_0=\alpha_0\alpha_j,\beta_j=\alpha_j-1,\beta_{j+1}=\alpha_{j+1}+1;\beta_r=\alpha_r,r=\overline{1,n+2-k},r\notin\{j,j+1\}\},\end{gathered}\tag{13}$$

$$\Lambda^{*}_{n+1,k}=\{\beta=(\alpha_0,\alpha_1+1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1-k})\mid\alpha=(\alpha_r)_{r=0}^{n+1-k}\in\Lambda_{nk}\}.\tag{14}$$

Definim operaţia de adunare a submulţimilor mulţimii N^{n+1}, $\forall n\in N$, în modul următor:

$$A+B=\{\beta=(\beta_r)_{r=0}^{n}\in N^{n+1}\mid\exists\alpha_0:\gamma(\alpha_0,\beta)=(\alpha_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in A\cup B,\beta_0=\sum_{\gamma(\alpha_0,\beta)\in A\cup B}\alpha_0\}.$$

Se observă proprietatea

$$R_{A+B}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n)}(x))=(R_A+R_B)(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n)}(x)).\tag{15}$$

Substituind formulele (11) şi (12) în relaţia (10) şi utilizând proprietatea (15), se obţine

$$h^{(n+1)}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}R_{\Lambda_{n+1,k}}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n+2-k)}(x))f^{(k)}(g(x)),$$

unde

$$\Lambda^*_{n+1,0} = \varnothing, \Lambda_{n+1,k} = \sum_{j=1}^{n+1-k} \Lambda^{(j)}_{n+1,k} + \Lambda^*_{n+1,k-1}, k = \overline{1, n+1}. \tag{16}$$

Deoarece $h'(x) = g'(x) f'(g(x))$, avem $\Lambda_{1,1} = \{(1,1)\}$.

Am obținut următorul algoritm de derivare a funcției compuse:

Algoritmul 2

Date de intrare: $x_0 \in C, g^{(n)}(x_0), f^{(n)}(g(x_0)), n = \overline{1, N}$;

Date de ieşire: $h^{(n)}(x_0),\ n = \overline{1, N}$, *unde* $h(x) = f(g(x))$;

1) Se fixează $\Lambda_{1,1} = \{(1,1)\}$;

2) Pentru fiecare $n = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, n}$, *se efectuează următorii paşi:*

a) Se determină $\Lambda^{(j)}_{n+1,k}$, $j = \overline{1, n+1-k}$, *conform formulei* (13);

b) Se determină $\Lambda^*_{n+1,k}$, *conform formulei* (14);

c) Se determină $\Lambda_{n+1,k}$, *conform formulei* (16);

3) Se determină $R_{\Lambda_{n,k}}(g'(x_0), g''(x_0), \ldots, g^{(n+1-k)}(x_0)), n = \overline{1, N}, k = \overline{1, n}$, *conform formulei* (9);

4) Se determină $h^{(n)}(x_0), n = \overline{1, N}$, *conform formulei* (8).

4. Şiruri recurent liniare omogene

4.1. Noțiuni fundamentale

Fie K un subcâmp al câmpului $(C, +, \cdot)$.

Şirul $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se numeşte m-recurent liniar omogen peste câmpul K dacă există vectorul $q = (q_k)_{k=0}^{m-1} \in K^m$, astfel încât $a_n = \sum_{k=0}^{m-1} q_k a_{n-1-k}, \forall n \geq m.$

Dacă $q_{m-1} \neq 0$, şirul a se numeşte nedegenerat, în caz contrar − degenerat. Vectorul q se numeşte vector generator, iar vectorul $I^{[a]}_m = (a_n)_{n=0}^{m-1}$ se numeşte stare inițială a şirului a. Şirul a se numeşte recurent liniar omogen peste câmpul K dacă $\exists m \in N^*$, astfel încât şirul a este m-recurent liniar omogen peste câmpul K. Vom nota:

$Rol[K][m]$ − mulțimea şirurilor m-recurent liniare omogene nedegenerate peste câmpul K;

$Rol[K]$ − mulțimea şirurilor recurent liniare omogene nedegenerate peste câmpul K;

$G[K][m](a)$ − mulțimea vectorilor generatori de lungime m ai şirului $a \in Rol[K][m]$;

$G[K](a)$ − mulțimea vectorilor generatori ai şirului $a \in Rol[K]$.

Funcția $G^{[a]} : C \to C$, $G^{[a]}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, se numeşte funcție generatoare a şirului $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq C$.

Funcția $G^{[a]}_t : C \to C$, $G^{[a]}_t(z) = \sum_{n=0}^{t-1} a_n z^n$, se numeşte funcție generatoare parțială de ordin t a şirului $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq C$.

Fie $a \in Rol[K][m]$, $q \in G[K][m](a)$. Polinomul $H_m^{[q]}(z) = 1 - zG_m^{[q]}(z)$ se numeşte polinom caracteristic unitar al şirului a. Ecuația $H_m^{[q]}(z) = 0$ se numeşte ecuație caracteristică. Orice polinom $H_{m,\alpha}^{[q]}(z) = \alpha H_m^{[q]}(z)$, $\alpha \in K^*$, se numeşte polinom caracteristic al şirului a. Vom nota:
$H[K][m](a)$ − mulțimea polinoamelor caracteristice de grad m ale şirului $a \in Rol[K][m]$;
$H[K](a)$ − mulțimea polinoamelor caracteristice ale şirului $a \in Rol[K]$.

Şirul $a \in Rol[K]$ se numeşte m-minimal peste mulțimea K dacă se verifică $a \in Rol[K][m] \setminus \bigcup_{t=1}^{m-1} Rol[K][t]$, numărul m numindu-se dimensiune recurentă a şirului a peste mulțimea K (notație: $\dim[K](a) = m$).

4.2. Proprietăți

Sunt juste următoarele proprietăți:

1) $Rol[K][1] \subseteq Rol[K][2] \subseteq \ldots \subseteq Rol[K][m] \subseteq \ldots \subseteq Rol[K]$;

2) $Rol[K] = \lim\limits_{m \to \infty} Rol[K][m] = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Rol[K][m]$;

3) Fie $a \in Rol[K][m],\ q \in G[K][m](a),\ H_{m,\alpha}^{[q]}(z) = \prod\limits_{k=0}^{p-1} (z - z_k)^{s_k}$, $z_i \neq z_j$, $\forall i \neq j$. Atunci:

a) $G^{[a]}(z) = \dfrac{G_m^{[a]}(z) - z\sum\limits_{k=0}^{m-1} q_k z^k G_{m-1-k}^{[a]}(z)}{H_m^{[q]}(z)}$, $\forall z \in D \setminus F$, unde D este domeniul de convergență al seriei $G^{[a]}(z)$, iar F este mulțimea rădăcinilor polinomului $H_m^{[q]}(z)$;

b) $a_n = I_m^{[a]} \cdot ((B^{[a]})^T)^{-1} \cdot (\beta_n^{[a]})^T$, $\forall n \in N$, unde $\beta_i^{[a]} = \left(\dfrac{i^j}{z_k^i} \right)_{\substack{k=\overline{0,\, p-1}, \\ j=\overline{0, s_k - 1}}}$, $\forall i \geq 0$, $B^{[a]} = (\beta_i^{[a]})_{i=0}^{m-1}$ (pentru simplitate, se consideră $0^0 = 1$);

4) Fie $G^{[b]}(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$, $A(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k z^k \in C[z]$, $B(z) = \beta \left(1 - \sum\limits_{k=0}^{m-1} q_k z^{k+1} \right) \in K[z]$, $\beta \neq 0$, $\deg(A(z)) < \deg(B(z)) = m$. Atunci $b \in Rol[K][m]$, $B(z) \in H[K][m](b)$ şi starea inițială $I_m^{[b]} = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$ se determină conform formulei $b_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} q_j a_{k-1-j} + \alpha_k$, $k = \overline{0, m-1}$.

5) Fie $a^{(j)} \in Rol[K],\ P_j(z) \in H[K](a^{(j)}),\ \alpha_j \in C,\ j = \overline{1,t}$. Atunci $a = \sum\limits_{k=1}^{t} \alpha_k a^{(k)} \in Rol[K]$ şi $P(z) = c.m.m.m.c.((P_j(z))_{j=1}^t) \in H[K](a)$;

6) Fie $a \in Rol[K][m_1],\ b \in Rol[K][m_2],\ u \in G[K][m_1](a),\ v \in G[K][m_2](b)$. Considerăm descompunerile canonice $H_{m_1,\alpha_1}^{[u]}(z) = \prod\limits_{k=0}^{p-1} (z - z_k)^{s_k}$, $H_{m_2,\alpha_2}^{[v]}(z) = \prod\limits_{k=0}^{p^*-1} (z - z_k^*)^{s_k^*}$. Atunci

$ab \in Rol[C]$ şi $P(z) = c.m.m.m.c.(\{(z - z_k z_r^*)^{s_k + s_r^* - 1} \mid k = \overline{0, p-1}, r = \overline{0, p^* - 1}\}) \in H[C](ab)$;

7) Fie $a \in Rol[K]$, $\exists a_k \neq 0$ şi $P(z) \in H[K][\dim[K](a)](a)$. Sunt juste următoarele relații:

$$|G[K][\dim[K](a)](a)| = 1 \text{ şi } H[K](a) = \{Q(z) \in K[z] \mid Q(z) \vdots P(z), Q(0) \neq 0\};$$

8) Fie $a \in Rol[K][m]$. Atunci $\dim[K](a) \leq m$;

9) Fie $a^{(k)} \in Rol[K], \alpha_k \in C, k = \overline{1,t}$. Sunt juste inegalitățile:

$$\dim[K]\left(\sum_{k=1}^{t} \alpha_k a^{(k)}\right) \leq \sum_{k=1}^{t} \dim[K](a^{(k)}),\ \dim[C]\left(\prod_{k=1}^{t} a^{(k)}\right) \leq \prod_{k=1}^{t} \dim[C](a^{(k)}).$$

10) Fie $a \in Rol[K_1],\ K_1 \subseteq K_2$. Atunci $a \in Rol[K_2]$ şi se verifică $\dim[K_2](a) \leq \dim[K_1](a)$.

4.3. Repartiții recurent liniare omogene

Considerăm o variabilă aleatoare naturală ξ, $a = rep(\xi) \in Rol[C][m]$. Sunt juste următoarele proprietăți:

1) $a \in Rol[R][m]$ şi $\dim[R](a) = \dim[C](a)$;

2) Dacă $q \in G[C][m](a)$ şi $H_m^{[q]}(1) = 0$, atunci $\dim[C](a) < m$, rădăcina $z = 1$ fiind fictivă (adică $\dfrac{H_m^{[q]}(z)}{z-1} \in H[C][m-1](a)$).

Aceste proprietăți ne permit să considerăm doar repartiții recurent liniare omogene peste R şi să putem calcula valorile $G_\xi^{(k)}(1),\ \forall k \geq 0$, utilizând formula $G_\xi(z) = \dfrac{A_0(z)}{H_0(z)}$, unde:

$$\begin{gathered} A_0(z) = G_m^{[a]}(z) - z\sum_{k=0}^{m-1} q_k z^k G_{m-1-k}^{[a]}(z) \in R[z],\ H_0(z) = H_m^{[q]}(z) \in R[z], \\ H_0(1) \neq 0,\ q \in G[R][m](a),\ \deg(A_0(z)) < \deg(H_0(z)) = m. \end{gathered} \tag{17}$$

Deci, $G_\xi(z)$ este o fracție rațională regulată.

Fie $\alpha_0 = A_0(z) \mid z$ şi $\chi_0 = H_0(z) \mid z$. Utilizând relațiile (17), obținem:

$$\chi_0 = (1, -q_0, -q_1, \ldots, -q_{m-1}), \tag{18}$$

$$\alpha_0 = I_m^{[a]} \langle - \rangle \sum_{k=0}^{m-2} q_k (\delta_{k+1} \langle \cdot \rangle I_{m-1-k}^{[a]}), \tag{19}$$

unde $\delta_s = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in C^{s+1},\ \forall s \in N$.

Deci, putem determina valorile $G_\xi^{(k)}(1),\ k = 1, 2, \ldots$, aplicând Algoritmul 1 pentru $z_0 = 1$. Obținem următorul algoritm de determinare a caracteristicilor variabilei aleatoare ξ:

Algoritmul 3

Date de intrare: *$q \in G[R][m](a),\ I_m^{[a]} \in R^m$, unde $a = rep(\xi) \in Rol[R][m]$;*

Date de ieşire: *$M(\xi),\ D(\xi),\ \sigma(\xi),\ \nu_k(\xi),\ k = \overline{1,n},\ n \geq 2$;*

1) Se determină χ_0 conform formulei (18);

2) Se determină vectorul $\mu = (\mu_k)_{k=0}^{m-1}$ conform formulei recurente

$$\mu_{m-1} = -(\chi_0)_m,\ \mu_k = \mu_{k+1} - (\chi_0)_{k+1},\ k = m-2, m-3, \ldots, 0;$$

3) Se determină $\Delta_0(\chi_0)=1-\mu_0$. *Dacă* $\Delta_0(\chi_0)=0$, *atunci* $\chi_0 := \mu,\ m := m-1$ *şi se trece la pasul 2), în caz contrar* $q := -(\chi_0)_{[m-1]}$ *și se trece la pasul 4);*

4) Se determină α_0 *conform formulei* (19);

5) Se determină valorile $G_\xi^{(k)}(1)$, $k=\overline{1,n}$, *utilizând Algoritmul 1;*

6) Se determină $M(\xi),\ D(\xi)$ *și* $\sigma(\xi)$ *utilizând relația* (4);

7) Se determină numerele Stirling de speța a doua (sau de speța întâi) $S(k,j)$, $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,k}$, *conform formulelor recurente* (2);

8) Se determină momentele $\nu_k(\xi),\ k=\overline{1,n}$, *conform formulei* (3).

Se remarcă faptul că etapa a doua a algoritmului reprezintă schema lui Horner de împărțire a polinomului $\chi_0 \mid z$ la binomul $1-z$, câtul fiind $\mu \mid z$. Ea este necesară de efectuat pentru a asigura condiția $\Delta_0(\chi_0)\neq 0$. Complexitatea acestui algoritm este $O(m^2n^2)$. Dacă nu este necesară determinarea momentelor, atunci algoritmul se rezumă la primele şase etape aplicate pentru $n=2$, complexitatea devenind $O(m^2)$.

5. Algoritmi de determinare a caracteristicilor timpului de evoluție

5.1. Sisteme aleatoare discrete staționare cu stări independente şi timp de transfer unitar

Considerăm problema formulată în Secțiunea 1 cu următoarele specificări:

$$\theta_{(u,v)}(t)=1,\ p_{(u,v)}(t)=p^*(v),\ \forall u,v\in E,\ \forall t\geq 0.$$

Vom nota $X_k=\{x_k\}$, $\overline{X_k}=E\setminus X_k$, $\pi_k=p^*(x_k)$, $w_k=\prod_{j=1}^{k}\pi_j$, $k=\overline{1,m}$. Fie $a=rep(T_\Theta)$.

Inegalitatea $T_\Theta\geq m-1$ implică $a_n=0,\ n=\overline{0,m-2}$. Dacă $w_m=0$, atunci $a_n=0,\ \forall n\in N$ şi $\lim_{n\to\infty}a_n=1$, adică sistemul aleator L_Θ are o evoluție infinită, ceea ce implică faptul că momentele timpului de evoluție sunt infinite. În continuare vom considera $w_m\neq 0$.

Deoarece $T_\Theta=m-1 \Leftrightarrow E_j=x_{j+1},\ j=\overline{0,m-1}$, avem egalitatea $a_{m-1}=w_m$. Deci,

$$I_m^{[a]}=(0,0,\ldots,0,w_m)\in R^m. \tag{20}$$

Considerăm $\forall n\in Z$. Fie $S(E)=\{A\mid A\subseteq E\}$. Vom nota

$$P_\Phi(n)=P(T_\Theta=n, E_j\in\Phi_j, j=\overline{0,t-1}),\ \forall\Phi=(\Phi_j)_{j=0}^{t-1}\in(S(E))^t, t\in N.$$

În baza celor expuse, introducem următoarele funcții pe Z:

$$\alpha_k(n)=P_{(X_1,X_2,\ldots,X_{k-1},\overline{X_k})}(n),\ \beta_k(n)=P_{(X_1,X_2,\ldots,X_k)}(n),\ \gamma_k(n)=P_{(X_2,X_3,\ldots,X_k)}(n),\ k=\overline{1,m}.$$

Avem:

$$\beta_k(n)=P_{(X_1,X_2,\ldots,X_k)}(n)=a_n-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(n),\ k=\overline{1,m}. \tag{21}$$

Considerăm mulțimile $T_s=\{s+1\}\cup\{t\in\{2,3,\ldots,s\}\mid x_{t-1+j}=x_j, j=\overline{1,s+1-t}\},\ s=\overline{1,m}$. Elementele minime din aceste mulțimi sunt:

$$t_s=\min_{k\in T_s}k,\ s=\overline{1,m}. \tag{22}$$

Valoarea t_s reprezintă poziția în vectorul $(x_1, x_2, \dots, x_s)$ începând cu care, dacă amplasăm acest vector, elementele suprapuse coincid.
Utilizând formula (21), obținem:

$$\gamma_s(n) = P_{(X_2, X_3, \dots, X_s)}(n) = \pi_2 \pi_3 \dots \pi_{t_s - 1} P_{(X_{t_s}, X_{t_s+1}, \dots, X_s)}(n - t_s + 2) =$$

$$= \frac{w_{t_s - 1}}{\pi_1} \beta_{s+1-t_s}(n - t_s + 2) = \frac{w_{t_s - 1}}{\pi_1} \left(a_{n - t_s + 2} - \sum_{j=1}^{s+1-t_s} \alpha_j (n - t_s + 2) \right), \ s = \overline{1, m}. \qquad (23)$$

În particular, obținem relația

$$\gamma_1(n) = a_n, \ n = \overline{0, \infty}. \qquad (24)$$

Valorile $\alpha_k(n), \ k = \overline{1, m}$, se determină astfel:

$$\alpha_1(n) = P_{(\overline{X_1})}(n) = (1 - \pi_1) a_{n-1}, \qquad (25)$$

$$\alpha_k(n) = P_{(X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, \overline{X_k})}(n) = \pi_1 P_{(X_2, X_3, \dots, X_{k-1}, \overline{X_k})}(n-1) = \pi_1 (P_{(X_2, X_3, \dots, X_{k-1})}(n-1) -$$

$$- P_{(X_2, X_3, \dots, X_k)}(n-1)) = \pi_1 (\gamma_{k-1}(n-1) - \gamma_k(n-1)), \ k = \overline{2, m}. \qquad (26)$$

Pentru determinarea repartiției $a = rep(T_\Theta)$ se obține formula recurentă

$$a_n = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(n) = (1 - \pi_1) a_{n-1} + \sum_{j=2}^{m} \pi_1 (\gamma_{j-1}(n-1) - \gamma_j(n-1)) =$$

$$= (1 - \pi_1) a_{n-1} + \pi_1 (a_{n-1} - \gamma_m(n-1)) = a_{n-1} - \pi_1 \gamma_m (n-1), \ \forall n \geq m. \qquad (27)$$

Conform formulelor $(23)-(26)$, utilizând inducția matematică, se demonstrează că $\exists u_{jk}, v_{jk} \in R$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, j-1}$, astfel încât

$$\alpha_j(n) = \sum_{k=0}^{j-1} u_{jk} a_{n-1-k}, \ \gamma_j(n-1) = \sum_{k=0}^{j-1} v_{jk} a_{n-1-k}, \ j = \overline{1, m}, \forall n \in Z. \qquad (28)$$

Din relațiile (24) și (25) se obține

$$u_{1,0} = 1 - \pi_1, \ v_{1,0} = 1. \qquad (29)$$

Utilizând reprezentarea (28), formula (23) obține forma

$$\gamma_s(n-1) = \frac{w_{t_s - 1}}{\pi_1} \left(a_{(n-1) - t_s + 2} - \sum_{j=1}^{s+1-t_s} \sum_{k=0}^{j-1} u_{jk} a_{n - t_s - k} \right) =$$

$$= \frac{w_{t_s - 1}}{\pi_1} \left(a_{(n-1)-(t_s - 2)} - \sum_{k=t_s-1}^{s-1} a_{n-1-k} \sum_{j=k-t_s+2}^{s+1-t_s} u_{j, k - t_s + 1} \right) = \sum_{k=0}^{s-1} v_{sk} a_{n-1-k},$$

unde

$$\begin{cases} v_{sk} = 0, \ k = \overline{0, t_s - 3}, \ v_{s, t_s - 2} = \dfrac{w_{t_s - 1}}{\pi_1}, \\ v_{sk} = -\dfrac{w_{t_s - 1}}{\pi_1} \displaystyle\sum_{j=k-t_s+2}^{s-t_s+1} u_{j, k - t_s + 1}, \ k = \overline{t_s - 1, s-1} \end{cases}, \ s = \overline{1, m}, \qquad (30)$$

iar formula (26) se transformă astfel:

$$\alpha_s(n) = \pi_1 \left(\sum_{k=0}^{s-2} v_{s-1,k} a_{n-1-k} - \sum_{k=0}^{s-1} v_{sk} a_{n-1-k} \right) = \sum_{k=0}^{s-1} u_{sk} a_{n-1-k},$$

unde

$$u_{sk} = \pi_1 (v_{s-1,k} - v_{sk}),\ k = \overline{0, s-2},\ u_{s,s-1} = -\pi_1 v_{s,s-1},\ s = \overline{2, m}. \quad (31)$$

Formula (27) devine

$$a_n = a_{n-1} - \pi_1 \sum_{k=0}^{m-1} v_{mk} a_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} q_k a_{n-1-k},\ \forall n \ge m,$$

unde

$$q_0 = 1 - \pi_1 v_{m,0},\ q_k = -\pi_1 v_{m,k},\ k = \overline{1, m-1}. \quad (32)$$

Deci, $a = rep(T_\Theta) \in Rol[R][m]$ și $q = (q_k)_{k=0}^{m-1} \in G[R][m](a)$. Ținând cont de formula (20), se obține $\dim[R](a) = m$.

Astfel, am argumentat teoretic următorul algoritm ce ne permite să determinăm vectorul generator şi starea inițială a repartiției timpului de evoluție a sistemelor aleatoare discrete staționare cu stări independente şi timpul de transfer unitar, complexitatea algoritmului fiind $O(m^3)$. Ulterior, având vectorul generator q și starea inițială $I_m^{[rep(T_\Theta)]}$, pot fi determinate caracteristicile probabilistice ale variabilei aleatoare T_Θ utilizând Algoritmul 3.

Algoritmul 4

Date de intrare: $E,\ X \in E^m,\ p^* : E \to [0,1]$;

Date de ieşire: $q \in G[R][m](rep(T_\Theta)),\ I_m^{[rep(T_\Theta)]}$;

1) Se determină $\pi_k = p^*(x_k),\ w_k = \prod_{j=1}^{k} \pi_j,\ k = \overline{1, m}$;

2) Dacă $w_m = 0$, *atunci* $I_1^{[rep(T_\Theta)]} = (0),\ q = (1) \in G[R][1](rep(T_\Theta))$ *și algoritmul se stopează, în caz contrar se trece la pasul 3);*

3) Se determină $I_m^{[rep(T_\Theta)]}$ *conform formulei* (20);

4) Se determină $u_{1,0}$ *și* $v_{1,0}$ *conform formulei* (29);

5) Pentru fiecare $s = \overline{2, m}$ *se calculează coeficienții* u_{sk} *și* v_{sk}, $k = \overline{0, s-1}$:

   a) se determină coeficientul t_s *conform formulei* (22);

   b) se determină coeficienții v_{sk}, $k = \overline{0, s-1}$, *conform formulei* (30);

   c) se determină coeficienții u_{sk}, $k = \overline{0, s-1}$, *conform formulei* (31);

6) Se determină componentele vectorului generator q *conform formulei* (32).

Utilizând vectorul generator q determinat cu ajutorul Algoritmului 4 şi aplicând Algoritmul 3 pentru $n = 2$, se obțin formule simplificate ce permit calcularea valorii medii şi a dispersiei cu complexitatea $O(m)$:

$$M(T_\Theta) = \mu = m - 2 + \frac{1 + \Delta_1(q)}{w_m},\ D(T_\Theta) = (m-1)(m-2) + \mu(\mu - 2m + 3) + \frac{\Delta_1(q) + \Delta_2(q)}{w_m}. \quad (33)$$

Dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = e \in E$ şi $p = p^*(e)$, atunci vectorul $q = (q_k)_{k=0}^{m-1} \in G[R][m](rep(T_\Theta))$ se determină mai simplu conform formulei $q_k = (1-p)p^k$, $k = \overline{0, m-1}$, complexitatea algoritmului fiind $O(m)$. În cazul $m = 1$, se obține $q = (1-p) \in G[R][1](rep(T_\Theta))$, adică timpul de evoluție are repartiție geometrică cu rația $r = 1-p$.

5.2. Sisteme aleatoare staționare cu stări independente şi timp de transfer aleator

Considerăm un sistem aleator L_Θ, din clasa sistemelor analizate în Secțiunea 5.1., cu următoarea modificare: timpul de transfer dintr-o stare în alta este aleator, cu lege de repartiție ce nu depinde de stările prin care trece sistemul, nici de momentul de timp la care se efectuează trecerea.

Fie θ o variabilă aleatoare ce are aceeaşi lege de repartiție ca şi timpul de transfer. Vom presupune că toate caracteristicile probabilistice necesare ale variabilei aleatoare θ sunt cunoscute. În caz general, determinarea exactă a acestora este problematică, fiind posibilă doar pentru o clasă restrânsă de legi de repartiție.

Sistemului L_Θ i se pune în corespondență sistemul aleator asociat L_1, cu timp de transfer unitar. Fie T_Θ timpul de evoluție a sistemului L_Θ, iar T_1 − timpul de evoluție a sistemului asociat L_1. Este remarcat faptul că T_1 reprezintă numărul de treceri pe care le efectuează sistemul L_Θ în decursul evoluției sale.

Fie $a = rep(T_1),\ \theta_j = \theta_{(E_j, E_{j+1})}(\tau_j),\ j = \overline{0, T_1 - 1}$, unde τ_j este momentul de timp la care se efectuează trecerea. Utilizând formula probabilității totale, obținem $F_{T_\Theta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{\sum_{j=0}^{k-1}\theta_j}(x)$. Substituind această relație în formula de determinare a funcției caracteristice şi ținând cont că variabilele aleatoare $\theta_j,\ j = \overline{0, T_1 - 1}$, sunt independente, se obține:

$$\Phi_{T_\Theta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{\sum_{j=0}^{k-1}\theta_j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{\sum_{j=0}^{k-1}\theta_j}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_{\sum_{j=0}^{k-1}\theta_j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \prod_{j=0}^{k-1} \Phi_{\theta_j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\Phi_\theta(t))^k = G_{T_1}(\Phi_\theta(t)). \tag{34}$$

Utilizând proprietățile funcțiilor generatoare şi caracteristice, obținem:

$$\Phi_\theta^{(k)}(0) = i^k \nu_k(\theta),\ G_{T_1}^{(k)}(\Phi_\theta(0)) = G_{T_1}^{(k)}(1),\ k = 1, 2, \ldots. \tag{35}$$

Menționăm că valorile $\nu_k(\theta)$ sunt considerate cunoscute, iar valorile $G_{T_1}^{(k)}(1),\ k = \overline{1, \infty}$, pot fi obținute aplicând Algoritmii 4 şi 3.

Utilizând valorile (35) ca date de intrare pentru Algoritmul 2, putem obține valorile $\Phi_{T_\Theta}^{(k)}(0),\ k = 1, 2, \ldots$. Cunoscând aceste valori, putem determina momentele timpului de evoluție T_Θ conform formulei

$$\nu_k(T_\Theta) = \frac{1}{i^k} \Phi_{T_\Theta}^{(k)}(0),\ k = \overline{1, \infty}. \tag{36}$$

În particular, obținem:

$$M(T_\Theta) = M(\theta)M(T_1),\ D(T_\Theta) = M(T_1)D(\theta) + (M(\theta))^2 D(T_1). \tag{37}$$

Algoritmul 5

Date de intrare: $E,\ X \in E^m,\ p^* : E \to [0,1],\ \nu_k(\theta),\ k = \overline{1, n}$;

Date de ieşire: $M(T_\Theta),\ D(T_\Theta),\ \sigma(T_\Theta),\ \nu_k(T_\Theta),\ k=\overline{1,n}$;

1) Se determină $M(\theta)$ *şi* $D(\theta)$ *conform formulei* (1);

2) Se determină $M(T_1),\ D(T_1),\ G_{T_1}^{(k)}(1),\ k=\overline{1,n}$, *utilizând consecutiv Algoritmii 4 şi 3;*

3) Se determină $M(T_\Theta)$ *şi* $D(T_\Theta)$ *conform formulei* (37);

4) Se determină $\sigma(T_\Theta)$ *conform formulei* (1);

5) Se determină $\Phi_\theta^{(k)}(0),\ k=\overline{1,n}$, *conform formulei* (35);

6) Se determină $\Phi_{T_\Theta}^{(k)}(0),\ k=\overline{1,n}$, *utilizând Algoritmul 2;*

7) Se determină $\nu_k(T_\Theta),\ k=\overline{1,n}$, *conform formulei* (36).

Dacă nu este necesară determinarea momentelor, atunci algoritmul se rezumă la primele patru etape, complexitatea fiind $O(m^3)$.

Fie $q\in G[R][m](T_1)$. Utilizând formulele (17), (20), (34), funcția $\Phi_{T_\Theta}(t)$ ia forma

$$\Phi_{T_\Theta}(t)=G_{T_1}(\Phi_\theta(t))=\frac{w_m(\Phi_\theta(t))^{m-1}}{H_m^{[q]}(\Phi_\theta(t))}. \tag{38}$$

Dacă θ este o variabilă aleatoare naturală, atunci şi T_Θ este variabilă aleatoare naturală cu funcția generatoare

$$G_{T_\Theta}(z)=G_{T_1}(G_\theta(z))=\frac{w_m(G_\theta(z))^{m-1}}{H_m^{[q]}(G_\theta(z))}. \tag{39}$$

Considerăm cazul particular $c=rep(\theta)\in Rol[R][s]$. Fie $r\in G[R][s](c)$. Conform proprietăților menționate în Secțiunea 4.2., avem:

$$G_\theta(z)=\frac{A(z)}{H_s^{[r]}(z)}, \tag{40}$$

unde $\deg(A(z))<s$. Substituind relația (40) în formula (39) şi amplificând cu $(H_s^{[r]}(z))^{m-1}$, obținem $G_{T_\Theta}(z)=\dfrac{U(z)}{V(z)}$, unde $U(z)=w_m(A(z))^{m-1}$, iar $V(z)$ se determină astfel:

$$V(z)=(H_s^{[r]}(z))^{m-1}H_m^{[q]}\left(\frac{A(z)}{H_s^{[r]}(z)}\right)=(H_s^{[r]}(z))^{m-1}-\sum_{k=0}^{m-1}q_k(A(z))^{k+1}(H_s^{[r]}(z))^{m-k-2}.$$

Avem: $\deg((A(z))^{k+1}(H_s^{[r]}(z))^{m-k-2})<s(k+1)+s(m-k-2)=s(m-1)=\deg((H_s^{[r]}(z))^{m-1})$, $k=\overline{0,m-1}$. Deci, $M=\deg(V(z))=s(m-1)>(m-1)\deg(A(z))=\deg(U(z))$.

Aplicând proprietățile descrise în Secțiunea 4.2., obținem:

$$rep(T_\Theta)\in Rol[R][M],\ V(z)\in H[R][M](T_\Theta),\ I_M^{[rep(T_\Theta)]}=(c_0,c_1,\ldots,c_{M-1}), \tag{41}$$

unde $c_k=\sum_{j=0}^{k-1}q_jc_{k-1-j}+u_k$, $k=\overline{0,M-1}$, iar coeficienții q_k şi u_k, $k=\overline{0,M-1}$, se determină conform relațiilor $u=(u_0,u_1,\ldots,u_{M-1})=(U(z)\,|\,z)^{[M-1]}$, $H_{M,V(0)}^{[q]}(z)=V(z)$.

Deci, dacă $rep(\theta)\in Rol[R]$, pentru determinarea caracteristicilor probabilistice ale timpului de evoluție T_Θ putem aplica formulele (41) urmate de Algoritmul 3. Această metodă reprezintă o alternativă mai eficientă a Algoritmului 5 pentru acest caz particular.

Referințe:

1. Lazari A. Algorithm for determining the characteristics time evolution of random discrete systems with varying time of states transitions: International Conference of Young Researchers, Scientific Abstracts, VI edition. - Chişinău, 2008, p.115.
2. Shiryaev A.N. Probability. - Springer-Verlag, 1984.
3. Poştaru A., Leahu A. Probabilitate, procese aleatoare şi aplicații. - Chişinău: Ştiința,1991.
4. Ciumac P., Ciumac V., Ciumac M. Teoria probabilităților & elemente de statistică matematică. - Chişinău: Tehnica, UTM, 2003.

Prezentat la 17.02.2009